объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-94-292

М.А.Назаренко

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ СТЕПЕНИ $(k,1)$ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ $H_2(D)$

Направлено в журнал «Математические заметки»

1994

Пространство Харди $H_2(\mathcal{D})$ образовано аналитическими функциями в круге $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$, имеющими почти всюду на границе $\partial\mathcal{D} = \{z : |z| = 1\}$ предельные значения по некасательным путям с конечной нормой $||\cdot||$, порожденной скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)\cdot\overline{g(z)}\cdot|dz| = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(z)\cdot\overline{g(z)}}{z}dz.$$

Известно, что полиномы z^j при целых неотрицательных j образуют ортонормированный базис в пространстве $H_2(\mathcal{D})$ и для каждого элемента $f \in H_2(\mathcal{D})$ выполнено равенство

$$||f||^2 = \sum_{j=0}^{\infty}|f_j|^2, \quad \text{где} \quad f_j = (f, z^j) = \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \quad —$$

коэффициенты степенного ряда

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j, \qquad z \in \mathcal{D}. \tag{1}$$

При каждом целом неотрицательном k символом $\mathbf{P}_k$ обозначим пространство полиномов степени не выше k, а $\mathbf{R}_{k,1} \subset H_2(\mathcal{D})$ — совокупность рациональных функций с числителем из $\mathbf{P}_k$ и линейным знаменателем. Величины наилучших приближений функции $f \in H_2(\mathcal{D})$ этими множествами определим соответственно равенствами

$$\mathbf{e}_k(f) = \inf_{P\in\mathbf{P}_k}||f - P||, \qquad \mathbf{r}_{k,1}(f) = \inf_{R\in\mathbf{R}_{k,1}}||f - R||.$$

Рассмотрим аппроксимацию подпространством $\mathbf{R}_k(c)$, состоящим из рациональных функций

$$r(z) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j + \frac{az^k}{1 - \overline{c}z} \tag{2}$$

степени $(k, 1)$ с фиксированным знаменателем $(1 - \overline{c}z)$, где $c \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$. Для данной функции f обозначим рациональную функцию наилучшего приближения из этого подпространства символом

$r(k,c)$. Известно ([1], стр. 273–274), что если рациональная функция r имеет вид (2), то интерполяционные условия

$$f(0)=r(0),\ f'(0)=r'(0),\dots\ f^{(k-1)}(0)=r^{(k-1)}(0), \tag{3}$$

$$f(c)=r(c) \tag{4}$$

необходимы и достаточны для совпадения r и $r(k,c)$. Если рациональная функция $r=r(k,c)$ к тому же удовлетворяет равенству $||f-r||=\mathbf{r}_{k,1}(f)$, то справедливо дополнительное условие интерполяции

$$f'(c)=r'(c). \tag{5}$$

Введем удобные для дальнейших рассуждений вспомогательные функции

$$F_k(z)=\sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j}z^j. \tag{6}$$

Из равенств (3) и (4) получаем следующее представление:

$$r(z;k,c)=\sum_{j=0}^{k-1} f_j\ z^j+\frac{az^k}{1-\overline{c}z},\ \text{где} \tag{7}$$

$$a=\left(1-|c|^2\right)\cdot F_k(c). \tag{8}$$

Символом $\Omega_k(c)$ обозначим квадрат величины наименьшего уклонения данной функции f от подпространства $\mathbf{R}_k(c)$.

Лемма 1. *При $c\in\mathcal{D}$ выполнено равенство*

$$\Omega_k(c)=||F_k||^2-\left(1-|c|^2\right)\cdot\left|F_k(c)\right|^2. \tag{9}$$

Доказательство. Воспользуемся равенствами (7) и (8), а также возможностью сокращения сомножителей вида z^k под знаком нормы без изменения ее величины. Получаем следующие соотношения:

$$\Omega_k(c)\ =\ \left\|f(z)-\sum_{j=0}^{k-1} f_j\ z^j-\frac{az^k}{1-\overline{c}z}\right\|^2=$$

$$=\ \left\|z^k\cdot\left(F_k(z)-\frac{a}{1-\overline{c}z}\right)\right\|^2=\left\|F_k(z)-\frac{a}{1-\overline{c}z}\right\|^2=$$
$$=\ ||F_k||^2-\left(F_k(z),\ \frac{a}{1-\overline{c}z}\right)-\left(\frac{a}{1-\overline{c}z},\ F_k(z)\right)+$$
$$+\left\|\frac{a}{1-\overline{c}z}\right\|^2. \tag{10}$$

Легко получить два вспомогательных равенства

$$\left(F_k(z),\ \frac{1}{1-\overline{c}z}\right)=F_k(c),$$

$$\left\|\frac{1}{1-\overline{c}z}\right\|^2=\frac{1}{1-|c|^2}.$$

Подстановка этих значений в выражение (10), используя (8) и свойства скалярного произведения, дает (9). Функция $\Omega_k(c)$ по непрерывности может быть доопределена при $c=0$ значением $\Omega_k(0)=||F_k||^2-|f_k|^2=\mathbf{e}_k^2(f)$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathbf{e}_{-1}(f)=||f||$, тогда для любых $f\in H_2(\mathcal{D})$, $c\in\mathcal{D}$ и при произвольном целом неотрицательном k выполнено неравенство*

$$||f-r(k,c)||\le\mathbf{e}_{k-1}(f).$$

Лемма 2. *Пусть $f\in H_2(\mathcal{D})\backslash\mathbf{P}_{k-1}$, тогда стационарные точки c функции $\Omega_k(\overline{c})$ удовлетворяют равенству*

$$\overline{F_k(c)}\cdot\sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j}\,c^{j-1}\cdot\left(j-(j+1)|c|^2\right)=0. \tag{11}$$

Доказательство. При $c\in\partial\mathcal{D}$ предельные значения функции $\Omega_k(c)$ равны $||F_k||^2=\mathbf{e}_{k-1}^2(f)$, так как $(1-|c|^2)F_k(c)\to 0$ в силу леммы работы [2]. $\mathbf{r}_{k,1}^2(f)=\min\{\,\Omega_k(c):\ c\in\mathcal{D}\,\}$, следовательно,интересующие нас точки минимума функции $\Omega_k(c)$ находятся среди ее стационарных точек, которые в свою очередь удовлетворяют следующему уравнению:

$$d\Omega_k(c)\equiv\frac{\partial}{\partial c}\Omega(c)\cdot dc+\frac{\partial}{\partial\overline{c}}\Omega_k(c)\cdot d\overline{c}=0.$$

Несложно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial c}\Omega(c)=\frac{\partial}{\partial c}\left(||F_k||^2-(1-|c|^2)\cdot\left|F_k(c)\right|^2\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial c}||F_k||^2-\frac{\partial}{\partial c}\Big((1-|c|^2)\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\overline{f}_{k+s}\,\overline{c}^s\cdot\sum_{j=0}^{\infty}f_{k+j}\,c^j\Big)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial c}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\overline{f}_{k+s}\,f_{k+j}\cdot\left(\overline{c}^s\,c^j-\overline{c}^{s+1}\,c^{j+1}\right)\Big),$$

$$\overline{\left(\frac{\partial}{\partial\overline{c}}\Omega(c)\right)}=\frac{\partial}{\partial c}\Omega(c).$$

Рассмотрим интересующий нас случай

$$\frac{\partial}{\partial c}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\overline{f}_{k+s}\,f_{k+j}\cdot\left(\overline{c}^s\,c^j-\overline{c}^{s+1}\,c^{j+1}\right)\Big)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\overline{f}_{k+s}\,f_{k+j}\cdot\left(j\,\overline{c}^s\,c^{j-1}-(j+1)\,\overline{c}^{s+1}\,c^j\right)=$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\overline{f}_{k+s}\,\overline{c}^s\cdot f_{k+j}\,c^{j-1}\cdot\left(j-(j+1)|c|^2\right)=$$

$$=\overline{F_k(c)}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}f_{k+j}\,c^{j-1}\cdot\left(j-(j+1)|c|^2\right)=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $f\in H_2(\mathcal{D})$ и k — любое натуральное число. Если $f\notin\mathbf{P}_{k-1}$, тогда выполнено неравенство*

$$\mathbf{e}_{k-1}(f)>\mathbf{r}_{k,1}(f). \tag{12}$$

Доказательство будем вести от противного. Пусть $P\in\mathbf{P}_{k-1}$, $||f-P||=\mathbf{e}_{k-1}(f)$, тогда, в силу свойств гильбертова пространства $H_2(\mathcal{D})$, выполнены равенства

$$P(z)=\sum_{j=0}^{k-1}f_j\,z^j,\quad f(z)-P(z)=z^k\cdot F_k(z).$$

Предположим, что $||f-P||=\mathbf{r}_{k,1}(f)$, тогда для любого $c\in\mathcal{D}$ должно иметь место соотношение ортогональности

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\Big(f(z)-P(z)\Big)\cdot\overline{\left(\frac{z^k}{1-\overline{c}z}\right)}\cdot\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{F_k(z)}{z-c}dz=F_k(c).$$

В силу произвольности $c\in\mathcal{D}$, получаем тождество $F_k\equiv 0$, а это означает, что $f\in\mathbf{P}_{k-1}$. Лемма доказана.

Полученное соотношение (9) для функции $\Omega_k(c)$ используется при изучении аппроксимаций в $H_2(\mathcal{D})$ рациональными функциями с одним свободным полюсом. Следующие утверждения дают необходимые условия на параметр c, реализующий равенство $||f-r(k,c)||=\mathbf{r}_{k,1}(f)$.

Теорема 1. *Невырожденный полюс $1/\overline{c}$ рациональной функции наилучшего приближения класса $\mathbf{R}_{k,1}$ должен удовлетворять равенству*

$$\sum_{j=0}^{\infty}f_{k+j}\,c^{j-1}\cdot\left(j-(j+1)|c|^2\right)=0. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим стационарные точки функции $\Omega_k(c)$, удовлетворяющие соотношению (11). Если $F_k(c)=0$, то, в силу (11) и (12), $\Omega_k(c)=\mathbf{e}^2_{k-1}(f)>\mathbf{r}_{k,1}(f)$. Теорема доказана.

Применим полученный результат для определения рациональных функций наименьшего уклонения степени $(k,1)$ от мономов.

Следствие 2. *Пусть $n>k\geq 0$. Тогда $\forall\theta\in[0,2\pi)$*

$$\mathbf{r}_{k,1}(z^n)=\sqrt{1-\frac{1}{n-k+1}\left(1-\frac{1}{n-k+1}\right)^{n-k}}=$$

$$=\left\|z^n-\sqrt{\frac{(n-k)^{n-k}}{(n-k+1)^{n-k+1}}}\cdot\frac{e^{i(k-n)\theta}\cdot z^k}{\sqrt{n-k+1}-e^{i\theta}\sqrt{n-k}\cdot z}\right\|.$$

Доказательство. Используем соотношение (13) для определения стационарных точек функции Ω_k. Получаем

$$c^{n-k-1}\cdot\left((n-k)-(n-k+1)|c|^2\right)=0,$$

$$|c|^2=\frac{n-k}{n-k+1}=1-\frac{1}{n-k+1}. \tag{14}$$

$\Omega_k(0)=1$. Найдем величину функции Ω_k при полученном значении $|c|$.

$$\Omega_k\left(e^{i\theta}\sqrt{\frac{n-k}{n-k+1}}\right)=1-\frac{1}{n-k+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n-k+1}\right)^{n-k}.$$

От аргумента θ комплексного числа c ничего не зависит. Для расчета коэффициентов рациональной функции наилучшего приближения используем условие первой интерполяции, выраженное в формуле (8).

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{n-k+1}\cdot\left(\sqrt{\frac{n-k}{n-k+1}}e^{-i\theta}\right)^{n-k}= \\ &=\sqrt{\frac{(n-k)^{n-k}}{(n-k+1)^{n-k+2}}}\cdot e^{i(k-n)\theta}. \end{aligned} \tag{15}$$

Следствие доказано.

Идея применения условий интерполяции для поиска рациональной функции наилучшего приближения со свободным полюсом получила свое развитие, например, в работах [3] и [4]. Следующее утверждение устанавливает эквивалентность интерполяционных условий (3)–(5) и стационарности функции $\Omega_k(c)$ в присутствующей в (4)–(5) точке c.

Теорема 2. *Зафиксируем $f\in H_2(\mathcal{D})$ и натуральное число k. Если существует точка $c\in\mathcal{D}\backslash\{0\}$ и элемент $r\in\mathbf{R}_{k,1}$, удовлетворяющий равенствам (3)–(5), то выполнено (11). Обратно, если число $c\in\mathcal{D}\backslash\{0\}$ удовлетворяет соотношению (11), то для рациональной функции (7) выполнены условия (3)–(5).*

Доказательство. Пусть выполнены условия (3)–(5), тогда рациональная функция r определяется равенством (7), а ее коэффициент a задается равенством (8). Если $a=0$, то $F_k(c)=0$ и выполняется (11). Запишем равенство (4) в развернутом виде

$$\sum_{j=0}^{k-1}f_j\,c^j+a\cdot\frac{c^k}{1-|c|^2}=r(c)=f(c)=\sum_{j=0}^{k-1}f_j\,c^j+c^k\cdot\sum_{j=0}^{\infty}f_{k+j}\,c^j.$$

При $c\neq 0$ это эквивалентно соотношению

$$a=\left(1-|c|^2\right)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}f_{k+j}\,c^j.$$

Интерполяционное условие (5)

$$\sum_{j=0}^{k-1}j\,f_j\,c^{j-1}+a\,c^{k-1}\cdot\frac{k+(k-1)|c|^2}{(1-|c|^2)^2}=r'(c)=$$

$$=f'(c)=\sum_{j=0}^{k-1}j\,f_j\,c^{j-1}+c^{k-1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(k+j)\,f_{k+j}\,c^j.$$

эквивалентно равенству

$$a=\frac{(1-|c|^2)^2}{k+(1-k)|c|^2}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(k+j)\,f_{k+j}\,c^j.$$

Теперь приравняем полученные выражения для коэффициента a.

$$\left(k+(1-k)|c|^2\right)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}f_{k+j}\,c^j=\left(1-|c|^2\right)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(k+j)\,f_{k+j}\,c^j.$$

Приведение подобных под знаком суммы даст соотношение

$$\sum_{j=0}^{\infty}f_{k+j}\,c^j\left(-k-(1-k)|c|^2+(k+j)-(k+j)|c|^2\right)=0.$$

Сокращения взаимообратных выражений приведет к окончательному равенству

$$\sum_{j=0}^{\infty}f_{k+j}\,c^j\left(j-(j+1)|c|^2\right)=0.$$

$c \neq 0$, все изложенные рассуждения обратимы. Теорема полностью доказана.

Убедимся, что интерполяционные условия (3)–(5) не являются достаточными для определения рациональной функции наименьшего уклонения из класса $\mathbf{R}_{k,1}$.

Теорема 3. *Для любого натурального k существует функция $f \in H_2(\mathcal{D})$ и рациональная функция r степени $(k,1)$, интерполирующая f в нуле с кратностью k и в точке, инверсионной собственному полюсу дважды, но не являющаяся рациональной функцией наилучшего приближения степени $(k,1)$.*

Замечание 1. Другими словами, утверждается существование $f \in H_2(\mathcal{D})$ и рациональной функции степени $(k,1)$ вида (7) таких, что условие (13) выполнено, но $\Omega_k(c) > \mathbf{r}^2_{k,1}(f)$. Фактически в теореме доказано более сильное условие $\Omega_k(c) > \mathbf{e}^2_k(f)$, то есть приближение этой рациональной функцией хуже, чем пространством полиномов.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z) = z^k + 2 \cdot z^{k+1}$. Соотношение (13) для этой функции имеет вид

$$-\overline{c} + 2\left(1 - 2|c|^2\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overline{c} = 2 - 4|c|^2.$$

Следовательно, c является вещественным числом. Вычислим корни этого уравнения.

$$4c^2 + c - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8} \in \mathcal{D}.$$

Рассмотрим значения функции Ω_k, выраженной формулой (9), в обоих случаях:

$$\Omega_k\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) = ||F_k||^2 - \frac{207 + 33\sqrt{33}}{256} < \mathbf{e}^2_k(f),$$

$$\Omega_k\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{8}\right) = ||F_k||^2 - \frac{207 - 33\sqrt{33}}{256} > \mathbf{e}^2_k(f).$$

Теперь опишем рациональную функцию $r(k,c)$, осуществляющую наилучшее приближение в подпространстве рациональных функций при фиксированном $c = -(1+\sqrt{33})/8$.

$$a = \left(1 - |c|^2\right) \cdot F_k(\overline{c}) = \frac{39 - 9\sqrt{33}}{64},$$

$$r\left(z; k, -\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) = \frac{39 - 9\sqrt{33}}{8} \cdot \frac{z^k}{8 + (1+\sqrt{33})z}.$$

Доказательство теоремы полностью закончено.

Составим таблицу $\{\mathbf{r}_{n,m}(f)\}$ из величин наименьших уклонений $f \in H_2(\mathcal{D})$ от рациональных функций степени не выше (n,m) в пространстве $H_2(\mathcal{D})$. Известно, что элементы $\mathbf{r}_{n,0}(f) = \mathbf{e}_n(f)$, образующие нулевую строку, могут быть членами любой невозрастающей стремящейся к нулю последовательности. Из результатов работы [4] следует, что главная диагональ $\{\mathbf{r}_{n,n}(f)\}$ должна строго убывать, если f не является рациональной функцией (этот факт впервые был получен в работе [5] при рациональных аппроксимациях в $L_2[a,b]$). В заключительной части работы [6] показано существование при любом наперед заданном натуральном k функций $f \in H_2(\mathcal{D})$, для которых выполнены соотношения $\mathbf{e}_k(f) = \mathbf{r}_{k,1}(f) > 0$, то есть неулучшаемость аппроксимации при увеличении степени знаменателя. В следующей теореме получен аналогичный результат для первой строки введенной таблицы $\{\mathbf{r}_{n,m}(f)\}$.

Теорема 4. *При любых натуральных k и s существует $g \in H_2(\mathcal{D}) \backslash \mathbf{R}_{k+s,1}$ такая, что выполнено соотношение*

$$\mathbf{r}_{k,1}(g) = \mathbf{r}_{k+s,1}(g).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{z^{k+j}}{\sqrt{2^j}} + \frac{z^{k+s+1}}{\sqrt{2^{s-3}}}. \tag{16}$$

Обозначим рациональную функцию наилучшего приближения степени $(k+s,1)$ для функции (16) через r. Воспользуемся интерполяционными свойствами (3), тогда

$$r(z) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{z^{k+j}}{\sqrt{2^j}} + \frac{az^{k+s}}{1-cz}, \tag{17}$$

значит

$$||g-r|| = \left\|\frac{z^{k+s+1}}{\sqrt{2^{s-3}}} - \frac{az^{k+s}}{1-cz}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2^{s-3}}}\left\|z - \frac{\sqrt{2^{s-3}}\cdot a}{1-cz}\right\|.$$

В следствии 2 приведен общий вид рациональных функций наилучшего приближения для мономов. Они образуют целое семейство, определяемое тем, что величина модуля точки полюса есть некоторая постоянная, а коэффициент в числителе определяется из интерполяционных свойств (4). В нашем случае $k = 0$, $n = 1$. Из уравнения (14) получаем $|c|^2 = 1/2$. Рассмотрим одну из этих функций, а именно такую, что $c = 1/\sqrt{2}$. Уравнение (15) даст равенство

$$a = \frac{1}{\sqrt{2^s}}.$$

Теперь преобразуем функцию (17) при $c = 1/\sqrt{2}$.

$$r(z) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{z^{k+j}}{\sqrt{2^j}} + \frac{1}{\sqrt{2^s}} \cdot \frac{z^{k+s}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}z} = \frac{z^k}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}z} \in \mathbf{R}_{k,1}. \tag{18}$$

Получаем следующие соотношения:

$$||g-r|| \geq \mathbf{r}_{k,1}(g) \geq \mathbf{r}_{k+s,1}(g) = ||g-r||,$$

где в первом неравенстве использовано представление (18), а в последнем равенстве — (17). Теорема доказана.

Автор благодарен доценту кафедры Теории функций и функционального анализа Вячеславову Н. С. (Московский государственный университет) за обсуждение постановок задач и методов их доказательств. Автор глубоко признателен профессору Долженко Е. П. (МГУ), профессору Жидкову Е. П. и доценту Вавилову В. В. (МГУ) за внимание и поддержку работы над данной тематикой. Автор благодарен профессору Зинову В. Г. за дружеские и стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] Уолш Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ. 1961г.

[2] Назаренко М. А. О возможности совпадения полиномиальной и рациональной аппроксимаций первой степени в пространстве $H_2(\mathcal{D})$. // Сообщения ОИЯИ, 1993, Р5-93-284.

[3] Ерохин В. Д. О наилучшем приближении аналитических функций посредством рациональных дробей со свободными полюсами. // Доклады АН СССР, 1959, Т. **128**(1). С. 29–32.

[4] Левин А. Л. Расположение полюсов рациональных функций наилучшего приближения и смежные вопросы. // Матем. сб., 1969, Т. **80**(122), 2(10), С. 281–289.

[5] Cheney E. W., Goldstein A. A. Mean–square approximation by generalized rational functions. // Math. Zeitsch., 1967, V. **95**, P. 232–241.

[6] Nazarenko M. A. Relations between rational and polinomial approximations in the Banach spaces. // Препринт ОИЯИ, 1994, E5-94-145.

Рукопись поступила в издательский отдел 27 июля 1994 года.