94-220

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-94-220

А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян

РЕДУКЦИЯ ГУРВИЦА — ЭЙЛЕРА

Направлено в журнал «Journal of Physics A: Math.Gen.»

1994

Введение

В работе [1] была установлена связь преобразования Гурвица H с квантовой теорией углового момента. В настоящей статье сделан еще один шаг в этом направлении. Показано, что редукцию, индуцируемую преобразованием H в пространстве векторов состояний, можно интерпретировать как правило сложения квантовых угловых моментов.

Напомним, что $H : E^8_u \to E^5_x$, где буквой E обозначены 8-мерное и 5-мерное евклидовы пространства. Введем обозначения

$$\vec{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_7)\,,$$

$$\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_4)\,.$$

Известно [2], что для произвольной функции $\Psi(\vec{x})$ выполняется условие

$$(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2)\Psi(\vec{x}) = 0\,. \qquad (1)$$

Здесь

$$\mathcal{L}_j = \mathcal{J}_j + \mathcal{K}_j\,, \qquad (2)$$

а операторы $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{K}_j$ имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} u_2 & -u_3 & -u_0 & u_1 \\ u_3 & u_2 & -u_1 & -u_0 \\ u_1 & -u_0 & u_3 & -u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial u_0 \\ \partial/\partial u_1 \\ \partial/\partial u_2 \\ \partial/\partial u_3 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 \\ \mathcal{K}_2 \\ \mathcal{K}_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -u_6 & -u_7 & u_4 & u_5 \\ -u_7 & u_6 & -u_5 & u_4 \\ -u_5 & u_4 & u_7 & -u_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial u_4 \\ \partial/\partial u_5 \\ \partial/\partial u_6 \\ \partial/\partial u_7 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Пусть $\Phi(\vec{u})$ есть вектор состояния, определенный в E^8_u. Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2)\Phi(\vec{u}) = 0\,. \qquad (5)$$

Согласно (1) это уравнение можно считать необходимым условием того, что $\Phi(\vec{u})$ является функцией от аргумента $\vec{x}$. Ниже будет доказано, что (5) является также достаточным условием. Это означает, что в с я к а я функция $\Phi(\vec{u})$, удовлетворяющая (5), есть функция от аргумента $\vec{x}$. В доказательстве приведенного утверждения существенную роль играют эйлеровы координаты, и потому естественно (5) назвать редукцией Гурвица-Эйлера (HE).

§1. Алгебра $SO(3) \times SO(3)$

Введем операторы инфинитезимальных плоскостных вращений

$$\mathcal{D}_{ij} = -u_i \frac{\partial}{\partial u_j} + u_j \frac{\partial}{\partial u_i} \ .$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям [3]:

$$[\mathcal{D}_{jk}, \mathcal{D}_{km}] = \mathcal{D}_{mj} \ .$$

Операторы $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{K}_j$ можно представить в виде

$$\mathcal{J}_1 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{02} + \mathcal{D}_{31}), \qquad \mathcal{K}_1 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{64} + \mathcal{D}_{75}),$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{03} + \mathcal{D}_{12}), \qquad \mathcal{K}_2 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{74} + \mathcal{D}_{56}),$$

$$\mathcal{J}_3 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{01} + \mathcal{D}_{23}), \qquad \mathcal{K}_3 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{54} + \mathcal{D}_{67}) \ .$$

Справедливы коммутационные соотношения

$$[\mathcal{J}_j, \mathcal{K}_m] = 0 \ , \tag{6}$$

$$[\mathcal{J}_j, \mathcal{J}_m] = i\epsilon_{jm\lambda}\mathcal{J}_\lambda \ , \tag{7}$$

$$[\mathcal{K}_j, \mathcal{K}_m] = i\epsilon_{jm\lambda}\mathcal{K}_\lambda \ . \tag{8}$$

Таким образом, операторы $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{K}_j$ являются генераторами группы $SO(3) \otimes SO(3)$, дуйствующей в пространстве E_u^8.

§2. Квантовые волчки

Перейдем в E_u^8 от декартовых координат u_j к эйлеровым координатам [4]

$$u_0 + iu_1 = f \cos\frac{\beta_1}{2} e^{-i\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}}, u_2 + iu_3 = f \sin\frac{\beta_1}{2} e^{i\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2}} \ , \tag{9}$$

$$u_4 + iu_5 = g \cos\frac{\beta_2}{2} e^{-i\frac{\alpha_2+\gamma_2}{2}}, u_6 + iu_7 = g \sin\frac{\beta_2}{2} e^{i\frac{\alpha_2-\gamma_2}{2}} \ . \tag{10}$$

Область изменения координат Эйлера фиксируется неравенствами

$$0 \le f,\, g < \infty,\ 0 \le \beta_1,\, \beta_2 \le \pi;\ 0 \le \alpha_1,\, \gamma_1;\ \alpha_2,\, \gamma_2 < 2\pi \ .$$

Из (9) следует, что

$$f = (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}, \qquad \beta_1 = 2\arctan\left(\frac{u_2^2 + u_3^2}{u_0^2 + u_1^2}\right)^{1/2},$$

$$\alpha_1 = -\arctan\frac{u_1}{u_0} + \arctan\frac{u_3}{u_2}, \qquad \gamma_1 = -\arctan\frac{u_1}{u_0} - \arctan\frac{u_3}{u_2} \ .$$

Пользуясь этими формулами,можно доказать, что производные по декартовым координатам связаны с производными по эйлеровым координатам следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial u_0 \\ \partial/\partial u_1 \\ \partial/\partial u_2 \\ \partial/\partial u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{f} \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial f \\ \partial/\partial \alpha_1 \\ \partial/\partial \beta_1 \\ \partial/\partial \gamma_1 \end{pmatrix} . \tag{11}$$

Здесь M, N, P и Q есть 2×2-матрицы

$$M = \begin{pmatrix} f\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} & , & -\cos^{-1}\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \\ -f\cos\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} & , & -\cos^{-1}\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} -2\sin\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} & , & -\cos^{-1}\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \\ 2\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} & , & -\cos^{-1}\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} f\sin\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} & , & -\sin^{-1}\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} \\ f\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} & , & \sin^{-1}\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} & , & \sin^{-1}\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} \\ 2\cos\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} & , & -\sin^{-1}\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Формулы, соответствующие координатам (10), получаются из (11) заменой $f \to g$, "1" $\to$ "2".

Теперь можно показать, что

$$\mathcal{J}_1 = i\sin\gamma_1\cot\beta_1\frac{\partial}{\partial\gamma_1} - i\cos\gamma_1\frac{\partial}{\partial\beta_1} - i\frac{\sin\gamma_1}{\sin\beta_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} \ ,$$

$$\mathcal{J}_2 = i\cos\gamma_1\cot\beta_1\frac{\partial}{\partial\gamma_1} + i\sin\gamma_1\frac{\partial}{\partial\beta_1} - i\frac{\cos\gamma_1}{\sin\beta_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} \ , \tag{12}$$

$$\mathcal{J}_3 = i\frac{\partial}{\partial\gamma_1} \ .$$

Связь операторов $\mathcal{K}_j$ с углами $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ отличается от связи оператора $\mathcal{J}_j$ с углами $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Это объясняется тем, что операторы $\mathcal{K}_j$ не получаются из операторов $\mathcal{J}_j$ подстановкой $u_0 \to u_4, u_1 \to u_5, u_2 \to u_6, u_3 \to u_7$, т.к. в $\mathcal{K}_j$ вместо $\mathcal{D}_{46}, \mathcal{D}_{47}$ и $\mathcal{D}_{45}$ входят $\mathcal{D}_{64}, \mathcal{D}_{74}$ и $\mathcal{D}_{54}$.

Имеем

$$\mathcal{K}_1 = -i \sin\alpha_2 \cot\beta_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + i \cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\beta_2} + i \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} \frac{\partial}{\partial\gamma_2} ,$$

$$\mathcal{K}_2 = i \cos\alpha_2 \cot\beta_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + i \sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\beta_2} - i \frac{\cos\alpha_2}{\sin\beta_2} \frac{\partial}{\partial\gamma_2} , \quad (13)$$

$$\mathcal{K}_3 = -i \frac{\partial}{\partial\alpha_2} .$$

Формулы (12) и (13) переходят друг в друга при преобразовании

$$\gamma_1 \longleftrightarrow -\alpha_2 , \quad \alpha_1 \longleftrightarrow -\gamma_2 , \quad \beta_1 \longleftrightarrow -\beta_2 . \quad (14)$$

Можно убедиться, что

$$\vec{\mathcal{J}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\beta_1^2} - \cot\beta_1 \frac{\partial}{\partial\beta_1} - \frac{1}{\sin^2\beta_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} - 2\cos\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\gamma_1} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma_1^2}\right) , \quad (15)$$

$$\vec{\mathcal{K}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\beta_2^2} - \cot\beta_2 \frac{\partial}{\partial\beta_2} - \frac{1}{\sin^2\beta_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} - 2\cos\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\gamma_2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma_2^2}\right) . \quad (16)$$

Введем операторы

$$\mathcal{J}_{3'} = i \frac{\partial}{\partial\alpha_1} , \qquad \mathcal{K}_{3'} = -i \frac{\partial}{\partial\gamma_2} . \quad (17)$$

Нормированные собственные функции операторов $(\vec{\mathcal{J}}^2, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_{3'})$ и $(\vec{\mathcal{K}}^2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_{3'})$, соответствующие собственным значениям $j(j+1), m, \tau$ и $k(k+1), \lambda, q$ даются выражениями

$$\Phi^j_{m\tau} = \left(\tfrac{2j+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \mathcal{D}^j_{m\tau}(\gamma_1, \beta_1, \alpha_1) ,$$
$$\Phi^k_{-\lambda q} = \left(\tfrac{2j+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \mathcal{D}^k_{\lambda q}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) , \quad (18)$$

в которых справа стоят $\mathcal{D}$-функции Вигнера. Таким образом, мы приходим к системе, состоящей из двух независимых квантовых шаровых волчков.

§2. *HE*-редукция

Из соотношений (2) и (6)-(8) следует, что

$$[\mathcal{L}_j , \mathcal{L}_m] = i\epsilon_{jm\lambda}\mathcal{L}_\lambda . \quad (19)$$

Мы видим, что HE-редукция тождественна проблеме сложения моментов $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$.

Уравнение (5) равноценно системе уравнений

$$\mathcal{L}_j\Phi(\vec{u}) = 0 . \quad (20)$$

Очевидно, что

$$(\vec{\mathcal{L}} - \vec{\mathcal{J}})^2\Phi = \vec{\mathcal{K}}^2\Phi ,$$

и потому

$$\vec{\mathcal{J}}^2\Phi = \vec{\mathcal{K}}^2\Phi .$$

В этом уравнении переменные, относящиеся к операторам $\vec{\mathcal{J}}^2$ и $\vec{\mathcal{K}}^2$, разделяются:

$$\Phi = \Phi^j\Phi^k ,$$

$$\frac{\vec{\mathcal{J}}^2\Phi^j}{\Phi^j} = \frac{\vec{\mathcal{K}}^2\Phi^k}{\Phi^k} = q .$$

Отсюда заключаем, что $q = j(j+1) = k(k+1)$, т.е. $j = k$.

Далее, из (5) ясно, что сложение моментов $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{K}_j$ должно производиться по следующей схеме:

$$\Phi^j_{\tau q} = \sum_{m=-j}^{j} C^{0,0}_{j,m;j,-m}\Phi^j_{m\tau}\Phi^j_{-mq} . \quad (21)$$

Здесь функции $\Phi^j_{m\tau}$ и Φ^j_{-mq} взяты из (18), а через $C^{0,0}_{j,m;j,-m}$ обозначены коэффициенты Клебша-Гордана.

Известно [5], что

$$C^{0,0}_{j,m;j,-m} = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} ,$$

$$\mathcal{D}^j_{m\tau}(\gamma_1, \beta_1, \alpha_1) = (-1)^{m-j}\mathcal{D}^j_{\tau m}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) .$$

Пользуясь последними двумя формулами имеем

$$\Phi^j_{\tau q} = \frac{(-1)^{j-k}}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi^2}}\sum_{m=-j}^{j}\mathcal{D}^j_{\tau m}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\mathcal{D}^j_{mq}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) .$$

Согласно теореме сложения для $\mathcal{D}$-функций Вигнера [5]:

$$\sum_{m=-j}^{j} \mathcal{D}^j_{\tau m}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\mathcal{D}^j_{mq}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = \mathcal{D}^j_{\tau q}(\alpha, \beta, \gamma),$$

где α, β, γ связаны с $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ следующим образом:

$$\cot(\alpha - \alpha_2) = \cos\beta_2 \cot(\alpha_1 + \gamma_2) + \cot\beta_1 \frac{\sin\beta_2}{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)},$$

$$\cos\beta = \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos(\alpha_1 + \gamma_2),$$

$$\cot(\gamma - \gamma_1) = \cos\beta_1 \cot(\alpha_1 + \gamma_2) + \cot\beta_2 \frac{\sin\beta_1}{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)}.$$

Как показано в работе [6], углы α, β и γ совпадают с угловыми координатами Эйлера в пространстве E^5_x. Таким образом, условие (5) действительно редуцирует $\Phi(\vec{u})$ в функцию от аргумента $\vec{x}$.

Заключение

В этой статье выявлен механизм редукции, индуцируемой преобразованием Гурвица в пространстве векторов состояний. Показано, что существует два эквивалентных друг другу механизма редукции. Первому из них соответствует дифференциальное уравнение (5), второму — правило сложения квантовых угловых моментов (21).

Мы благодарны Л.С. Давтяну, Л.Г. Мардояну и В.Н. Первушину за полезные обсуждения.

Литература

[1] M. Hage Hassan and M. Kibler, On Hurwitz Transformations, preprint LYCEN, Lyon (1991) 9110.

[2] L.S. Davtyan, L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. J.Phys.:Math.Gen. A20 (1987) 6121.

[3] M.J. Englefield, Group Theory and the Coulomb Problem, Wiley-Interscience. New-York. London. Sydney. Toronto. (1972).

[4] А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян, Структура преобразования Гурвица, препринт ОИЯИ, Р5-94-219, Дубна (1994).

[5] Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский, Квантовая теория углового момента. Наука. Ленинград. (1975).

[6] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian and V.M. Ter-Antonyan, The Eulerian Parameterization of the Hurwitz Transformation, preprint JINR, E5-94-121, Dubna (1994).

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июня 1994 года.