объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-94-219

А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян

СТРУКТУРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГУРВИЦА

Направлено в журнал «Journal of Physics A: Math.Gen.»

1994

Введение

Небиективные билинейные преобразования Леви-Чивита [1], Кустаанхеймо-Штифеля [2] и Гурвица [3, 4] являются не только изящными, но и полезными математическими конструкциями. Эти преобразования помогли решить весьма широкий спектр проблем: спинорная регуляризация уравнений небесной механики [5], проблема кулон-осцилляторного соответствия в квантовой механике [6], некоторые проблемы квантовой химии [7], функционального интегрирования [8], релятивистской квантовой теории составных систем [9], бозонного исчисления [10] и геометрического квантования [11]. Установлена связь преобразования Гурвица (H) с неассоциативными алгебрами [12], представлением Фока-Баргмана-Швингера [13], проведена параметризация Кели-Клейна [14] и параметризация Эйлера [15], развита небилинейная версия преобразования Гурвица [16].

В настоящей статье обсуждается структура H-преобразования. За отправную точку принята не 8×8-матрица, элементами которой служат декартовы координаты конфигурационного пространства, а формулы, выражающие x-координаты через u-координаты в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x_0 &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2 \,, \\
x_1 &= 2(u_0u_4 - u_1u_5 - u_2u_6 - u_3u_7) \,, \\
x_2 &= 2(u_0u_5 + u_1u_4 - u_2u_7 + u_3u_6) \,, \\
x_3 &= 2(u_0u_6 + u_1u_7 + u_2u_4 - u_3u_5) \,, \\
x_4 &= 2(u_0u_7 - u_1u_6 + u_2u_5 + u_3u_4) \,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Как видно из (1), H отображает 8-мерное конфигурационное u-пространство в 5-мерное конфигурационное x-пространство. Алгебраическая структура преобразования H такова, что выполняется тождество:

$$r^2 \equiv x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_4^2 = (u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_7^2)^2 \equiv u^4 \,. \tag{2}$$

В частном случае $u_1 = u_2 = u_3 = u_5 = u_6 = u_7 = 0$ H переходит в преобразование Леви-Чивита

$$\begin{aligned}
x_0 &= u_0^2 - u_4^2 \,, \\
x_1 &= 2u_0u_4 \,, \\
x_2 &= x_3 = x_4 = 0 \,.
\end{aligned}$$

Ниже будет найдено представление, в котором H определяется двумя структурными элементами: преобразованием Леви-Чивита и унитарным унимодулярным преобразованием. Пространства, в которых действуют эти преобразования, будут уточнены ниже.

§1 Структурные элементы

Координата x_0 в (1) структурно выделена среди остальных координат x-пространства. Координаты u можно объединить в группы (u_0, u_1, u_2, u_3) и (u_4, u_5, u_6, u_7) в соответствии с той ролью, которую они играют в формировании координаты x_0. Учитывая сказанное, мы отделим координату x_0 от координат x_1, x_2, x_3, x_4 и введем комплексные координаты

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + ix_2 \quad &, \quad z_3 = x_3 + ix_4\,, \\ v_0 = u_0 + iu_1 \quad &, \quad v_2 = u_2 + iu_3\,; \\ v_4 = u_4 + iu_5 \quad &, \quad v_6 = u_6 + iu_7\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Двумерным комплексным векторам (z_1, z_3), (v_0, v_2) и (v_4, v_6) соответствуют модули

$$\begin{aligned} \mu &= (z_1^* z_1 + z_3^* z_3)^{1/2}, \\ f &= (v_0^* v_0 + v_2^* v_2)^{1/2}, \\ g &= (v_4^* v_4 + v_6^* v_6)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Сами эти векторы, согласно (1), связаны преобразованием

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_0 & -v_2^* \\ v_2 & v_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_4 \\ v_6 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Матрица этого преобразования унитарна с весом, т.е.

$$\begin{pmatrix} v_0^* & v_2^* \\ -v_2 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 & -v_2^* \\ v_2 & v_0^* \end{pmatrix} = f^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Учитывая свойства (6), получим

$$(z_1^*, z_3^*) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = 4f^2 (v_4^*, v_6^*) \begin{pmatrix} v_4 \\ v_6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из выражения для координаты x_0 следует

$$\begin{aligned} x_0 &= f^2 - g^2\,, \\ \mu &= 2fg\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Мы видим, что в структуру H входит в качестве составного элемента преобразование Леви-Чивита, отображающее конформно первый квадрант плоскости $f + ig$ в верхнюю полуплоскость $x_0 + i\mu$:

$$x_0 + i\mu = (f + ig)^2.$$

Перейдем теперь от координат (3) к параметрам a_j Кели-Клейна

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_4 \\ v_6 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} a_4 \\ a_6 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} |a_1|^2 + |a_3|^2 &= 1\,, \\ |a_0|^2 + |a_2|^2 &= 1\,, \\ |a_4|^2 + |a_6|^2 &= 1 \end{aligned}$$

и выделим из (5) унитарное унимодулярное преобразование

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & -a_2^* \\ a_2 & a_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_6 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Согласно (5)

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(v_0 v_4 - v_2^* v_6)\,, \\ z_3 &= 2(v_2 v_4 + v_0^* v_6)\,. \end{aligned}$$

Действуя на второе из этих соотношений оператором комплексного сопряжения и затем объединяя полученное равенство с первым соотношением, приходим к формуле

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3^* \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_4 & -v_6 \\ v_6^* & v_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_2^* \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Соотношения (5) и (10) дуальны друг к другу в следующем смысле: в (5) матрица преобразования и столбец, на который она действует, зависят от координат (u_0, u_1, u_2, u_3) и (u_4, u_5, u_6, u_7); в (10)—наоборот, матрица преобразования определяется координатами (u_4, u_5, u_6, u_7), а соответствующий ей столбец—координатами (u_0, u_1, u_2, u_3).

Теперь вместо (9) имеем

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 & -a_6 \\ a_6^* & a_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2^* \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Из (9) и (11) следует, что вторым структурным элементом H является унитарное унимодулярное преобразование, действующее в пространстве параметров Кели-Клейна.

§2 Спинорная реализация H

Примем для параметров Кели-Клейна следующее представление

$$a_1 = \cos\frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\,, \quad a_3 = \sin\frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}\,,$$

$$a_0 = \cos\frac{\beta_1}{2} e^{-i\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}}\,, \quad a_2 = \sin\frac{\beta_1}{2} e^{i\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2}}\,,$$

$$a_4 = \cos\frac{\beta_2}{2} e^{-i\frac{\alpha_2+\gamma_2}{2}}\,, \quad a_6 = \sin\frac{\beta_2}{2} e^{i\frac{\alpha_2-\gamma_2}{2}}\,.$$

Углы Эйлера изменяются в пределах

$$0 \le \alpha < 2\pi\,, 0 \le \beta \le \pi\,, -2\pi \le \gamma < 2\pi$$

(такие же неравенства имеют место для остальных углов).

Подставляя эти формулы в преобразования (9) и (11), приходим к спинорной реализации:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \\ \sin\frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \end{pmatrix} \doteq \mathcal{R}(\alpha_1\,, \beta_1\,, \gamma_1) \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta_2}{2} e^{-i\frac{\alpha_2+\gamma_2}{2}} \\ \sin\frac{\beta_2}{2} e^{i\frac{\alpha_2-\gamma_2}{2}} \end{pmatrix}\,, \qquad (12)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \\ \sin\frac{\beta}{2} e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\gamma_2\,, \beta_2\,, \alpha_2) \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta_1}{2} e^{-i\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}} \\ \sin\frac{\beta_1}{2} e^{i\frac{\gamma_1-\alpha_1}{2}} \end{pmatrix} \qquad (13)$$

$\mathcal{R}$ означает здесь матрицу конечных вращений:

$$\mathcal{R}(a, b, c) = \begin{pmatrix} \cos\frac{b}{2} e^{-i\frac{a+c}{2}} & -\sin\frac{b}{2} e^{-i\frac{a-c}{2}} \\ \sin\frac{b}{2} e^{i\frac{a-c}{2}} & \cos\frac{b}{2} e^{i\frac{a+c}{2}} \end{pmatrix}\,.$$

Величины $(x_0\,, \mu\,, \alpha\,, \beta\,, \gamma)$ и $(f\,, g\,, \alpha_1\,, \beta_1\,, \gamma_1\,, \alpha_2\,, \beta_2\,, \gamma_2)$ имеют смысл эйлеровых координат в x- и u-пространствах:

$$z_1 = \mu a_1\,, \qquad z_3 = \mu a_3\,,$$

$$v_0 = f a_0\,, \qquad v_2 = f a_2\,,$$

$$v_4 = g a_4\,, \qquad v_6 = g a_6\,.$$

Здесь a_j—введенные выше параметры Кели-Клейна.

В пространстве углов $(\alpha_1\,, \beta_1\,, \gamma_1\,, \alpha_2\,, \beta_2\,, \gamma_2)$ преобразование H действует по схеме

$$S^3(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{R}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\mathcal{R}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) S^3(0, 0, 0)\,,$$

$$S^3(\gamma, \beta, \alpha) = \mathcal{R}(\gamma_2, \beta_2, \alpha_2)\mathcal{R}(\gamma_1, \beta_1, \alpha_1) S^3(0, 0, 0)\,,$$

т.е. H конструирует, из заданных угловых триплетов $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, матрицы конечных вращений, переводящие полюс трехмерной сферы в точку, которой соответствуют угловые координаты x-пространства.

Заключение

В этой работе нас интересовала структура преобразования Гурвица. Мы показали, что существуют две дуальные друг к другу формы описания структуры H. Сказанное можно резюмировать следующими равенствами

$$\begin{pmatrix} x_0 + i\mu \\ a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + ig & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & -a_2^* \\ 0 & a_2 & -a_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f + ig \\ a_4 \\ a_6 \end{pmatrix}\,,$$

$$\begin{pmatrix} x_0 + i\mu \\ a_1 \\ a_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + ig & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -a_6 \\ 0 & a_6^* & a_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f + ig \\ a_0 \\ a_2^* \end{pmatrix}\,,$$

Обе формы записи утверждают одно и то же: H расщепляется на преобразование Леви-Чивита и унитарное унимодулярное преобразование, связывающее параметры Кели-Клейна x-пространства с параметрами Кели-Клейна u-пространства.

Мы благодарны Л.С. Давтяну, Л.Г. Мардояну и В.Н. Первушину за полезные замечания.

Литература

[1] T. Levi-Civita, Sur la Rèsolution Qualitative di Problème Restveint des Trois Corps, Opera Mathematical, **2** (1956) 411.

[2] P. Kustaanheimo, Spinor Regularization of the Kepler Motion, Ann. Univ. Turku, Ser. **A1** (1964) 73.

[3] L.S. Davtyan, L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. J.Phys.:Math.Gen. **A20** (1987) 6121.

[4] D. Lambert, M. Kibler, J.Phys.:Math.Gen. **A21** (1988) 307.

[5] E. Stiefel, G. Scheifele, Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1971.

[6] M. Kibler, A. Ronveaux, T. Negadi, J.Math.Phys. **26** (1986) . L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan, in "Schrödinger Operators Standart and Non-Standart", World Scientific, Singapore (1989).

[7] M. Kibler, T. Negadi, Croatica Chemica Acta, CCACAC, **57** (1984) 1509.

[8] A. Inomata, G. Junker, R. Wilson, Found. of Phys. **23** (1993) 1073.

[9] A.O. Barut, C.K.E. Schneider, R.Wilson, J.Math.Phys. **20** (1970) 2244.

[10] M. Kibler, T. Negadi, Lett. Nuovo Cimento, **37** (1983) 225.

[11] I.V. Mladenov, J. Tsanov, J.Geom. and Phys. **2** (1985) 125.

[12] I.V. Polubarinov, On Application of Hopf Fiber Bundles in Quantum Theory, Preprint JINR, E2-84-607, Dubna (1984).

[13] M. Hage Hassan and M. Kibler, On Hurwitz Transformations, preprint LYCEN, Lyon, (1991) 9110.

[14] L.S. Davtyan, J.Math.Phys. **34**, (1993) 4834.

[15] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian and V.M. Ter-Antonyan, The Eulerian Parameterization of the Hurwitz Transformation, preprint JINR, E5-94-121, Dubna, (1994).

[16] L.S. Davtyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan, The Hurwitz Tramsformation: Non-bilinear Version, preprint JINR, E5-94-119, Dubna, (1994).

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июня 1994 года.