сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-94-199

П.Е.Жидков*

ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

*E-mail: ZHIDKOV@THEOR.JINRC.DUBNA.SU

1994

1. Введение. Основные результаты

1^0. Настоящая статья посвящена построению инвариантной меры (ИМ) для динамической системы (ДС), порожденной нелинейным уравнением Шредингера (НУШ)

$$iu_t + u_{xx} + f(x, |u|^2)u = 0, \quad x \in (0, A),\ t \in R, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = u(A,t) = 0, \quad t \in R. \tag{2}$$

Задачу (1)–(2) дополним начальными условиями

$$u(x, t_0) = \phi(x). \tag{3}$$

Отметим, что совершенно аналогично может быть рассмотрена периодическая по x задача (1)–(3).

Данная работа является продолжением работ автора [1–3] по этой тематике: в работе [1] (без доказательства) представлена ИМ для ДС, порожденной НУШ. Подобный результат для волнового уравнения содержится в работе [2]. В работе [3] ИМ построена для некоторой абстрактной системы, в форме которой могут быть представлены многие "солитонные" уравнения. Меры, подобные рассматриваемой здесь и в работах [1–3], ранее изучались в нескольких статьях (см., например,[4–7]), однако их инвариантность осталась в этих работах неисследованной. В статье [8] ИМ построена для некоторой физической системы, а в работе [9] — для ДС, порождаемой уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$$

с условиями периодичности по x на некотором фазовом пространстве. К сожалению, в работе [9] некоторые важные этапы доказательства пропущены.

ИМ для задачи (1)–(3) имеют важные физические приложения, частично указанные в работах [4–9]. В статье [10] мера, подобная рассматриваемой ниже мере μ, используется (без доказательства инвариантности) для построения статистической механики НУШ. Работы [1–3] и настоящая работа возникли в первую очередь в связи с задачей объяснения хорошо известного в теории нелинейных колебаний явления Ферми – Пасты – Улама [11,12]. Это явление, первоначально обнаруженное указанными авторами в результате численного моделирования системы шаров с ненулевыми массами, связанных пружинами с нелинейным законом упругости, состоит в явлении приближения произвольного решения соответствующей эволюционной системы дифференциальных уравнений к своему начальному положению с произвольной точностью в моменты времени $t_n \to +\infty$. Подобное свойство в теории ДС называется устойчивостью по Пуассону траектории. Впоследствии в результате численных экспериментов оно было обнаружено для многих "солитонных" уравнений. Если существует конечная (мера всего фазового пространства конечна) ИМ для ДС, порождаемой на подходящем фазовом пространстве некоторым уравнением, то по теореме о возвращении Пуанкаре [13] почти все по ИМ точки фазового пространства устойчивы по Пуассону, что (частично) объясняет указанное явление.

Главная цель настоящей статьи — построить ИМ для ДС, порождаемой задачей (1)–(3) на подходящем фазовом пространстве. Сначала кратко излагается доказательство результатов работы [1], на которые опирается дальнейшее изложение. Используется более простой подход работы [2], который позволяет несколько ослабить предположения работы [1]. Затем построение ИМ проводится при более слабых предположениях о нелинейности в уравнении. К сожалению, в последнем случае изложение носит условный характер, поскольку не удается проверить полностью все условия Теоремы для конкретных нелинейностей в уравнении. Трудности связаны с тем, что соответствующие результаты о корректности смешанной задачи для уравнения Шредингера не доказаны.

2^0. Рассмотрим вместо задачи (1)–(3) задачу для вещественной и мнимой частей комплексной функции u (т.е. положим $u^1 = Re\ u,\ u^2 = Im\ u,\ \phi^1 = Re\ \phi,\ \phi^2 = Im\ \phi$):

$$u^1_t + u^2_{xx} + f(x,(u^1)^2 + (u^2)^2)u^2 = 0, \qquad (4)$$

$$u^2_t - u^1_{xx} - f(x,(u^1)^2 + (u^2)^2)u^1 = 0, \quad x \in (0,A),\ t \in R, \qquad (5)$$

$$u^i(0,t) = u^i(A,t) = 0, \quad t \in R, \qquad (6)$$

$$u^i(x,t_0) = \phi^i(x). \qquad (7)$$

Обозначим через L_2 обычное вещественное пространство Лебега функций $g(x)$ аргумента $x \in (0,A)$, квадратично интегрируемых по $(0,A)$ со скалярным произведением $(g,h) = \int\limits_0^A g(x)h(x)dx$ и нормой $||g|| = (g,g)^{\frac{1}{2}}$, а через L_p– пространство Лебега функций g с той же областью определения и нормой $||g||_p = \{\int\limits_0^A |g(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}}$. Через Δ обозначим замыкание оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ в L_2, определенного сначала на множестве бесконечно дифференцируемых функций g аргумента $x \in [0,A]$, удовлетворяющих условию $g(0) = g(A) = 0$. Хорошо известно, что Δ– самосопряженный положительный оператор на L_2. Пусть $\{e_n(x)\}_{n=1,2,3,...}$, где $e_n(x) = (\frac{2}{A})^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\pi n x}{A}$,– ортонормированный базис в L_2 из его собственных функций с соответствующими собственными значениями $\lambda_n = (\frac{\pi n}{A})^2$. Через P_n обозначим ортогональный проектор в L_2 на линейную оболочку $X_n = span(e_1,...,e_n)$ функций $e_1,...,e_n$. Рассмотрим конечномерную аппроксимацию задачи (4)–(7) по Галеркину:

единственное (обобщенное) решение класса $C(R;X)$ (см. далее), что делает корректным предположение (H2).

Существует различные определения ДС. Здесь принято следующее

Определение.

Пусть M– сепарабельное метрическое пространство и пусть $h(x,t)$– функция, отображающая любые $x \in M$, $t \in R$ в $h(x,t) \in M$, причем отображение M на M взаимно однозначно при любом фиксированном t. Пусть, кроме того,

1. $h(x,0) = x$ для любого $x \in M$;

2. $h(h(x,\tau),t) = h(x,t+\tau)$ для любых $x \in M$, $t,\tau \in R$;

3. функция $h(x,t)$ непрерывна по $x \in M$ при любом фиксированном t.

Тогда h называется ДС на фазовом пространстве M.

Мера m, определенная на борелевской сигма - алгебре пространства M, называется ИМ, если $m(\Omega) = m(h(\Omega,t))$ для любого борелевского множества $\Omega \subset M$ и любого $t \in R$.

Пусть $m(M) < \infty$, где m– ИМ некоторой ДС h. Тогда справедлива теорема о возвращении Пуанкаре [13].

Имеет место

Теорема .

Пусть выполнено предположение (H2). *Тогда*

1) *функция $g(x,t)$ из* (H2) *является ДС на X;*

2) $e^{\Phi(x)}$– *измеримый в смысле меры w функционал на X и борелевская мера*

$$\mu(\Omega) = \int\limits_{\Omega} e^{\Phi(x)} w(dx)$$

является ИМ для ДС g.

В дополнение, $\mu(B_R(a)) > 0$ для любого шара $B_R(a) = \{x \in X| \; ||x-a||_X \le R\}$ с $R > 0$ и мера любого ограниченного множества в X конечна.

Замечание 1

В дальнейшем будет доказано, что шар $B_R(0)$ при любом $R > 0$ является инвариантным множеством, т. е. если $\phi \in B_R(0)$, то $g(\phi,t) \in B_R(0)$ при любом t. Таким образом, функция g является ДС на фазовом пространстве $B_R(0)$ и, в силу теоремы 1, $\mu(B_R(0)) < \infty$. По теореме о возвращении Пуанкаре [13], почти все по мере μ точки $x \in X$ устойчивы по Пуассону, следовательно, для каждой из этих точек существует последовательность точек $t_n \to +\infty$ такая, что $g(x,t_n) \to x$ по норме X. В силу теоремы множество точек $x \in X$, обладающих этим свойством, образует всюду плотное в X множество.

Замечание 2

Пусть $f(x,s^2) = \lambda|s|^p$. Тогда п. 1,4 предположения (H2) справедливы при $p \in (0,2)$, если $\lambda > 0$, и при $p > 0$, если $\lambda < 0$. К сожалению, вопрос о проверке условий 2,3 из (H2) остается открытым. Заметим, что в случае задачи Коши для уравнения (1) известен результат [16] о корректности задачи в случае $u(x,t_0) \in L_2$. Однако, доказательство на случай смешанной задачи не переносится.

О содержании работы. В разделе 2 кратко изложено построение ИМ в предположении (H1). Этот подход полностью аналогичен подходу работы [2] для волнового уравнения. Кроме того, в этом разделе содержится полное обоснование результатов работы [1]. В разделе 3 доказана приведенная выше теорема.

Все используемые в работе сведения из общей теории меры содержатся, например, в [17]. В дальнейшем не оговаривая этого каждый раз, через $C, C_1, C_2, C', C'', ...$ обозначаются положительные постоянные.

2. ИМ для задачи с ограниченной нелинейностью

Рассмотрим задачи (4)–(7) и (8)–(10). В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $u(.,t) = (u^1(.,t), u^2(.,t))$, $u_n(.,t) = (u_n^1(.,t), u_n^2(.,t))$, $\phi^1 = Re\,\phi$, $\phi^2 = Im\,\phi$,

$$P^n = \begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\Delta) & \sin(t\Delta) \\ -\sin(t\Delta) & \cos(t\Delta) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \sin(t\Delta) & -\cos(t\Delta) \\ \cos(t\Delta) & \sin(t\Delta) \end{pmatrix}.$$

<u>Предложение 1</u>

Пусть выполнено предположение (H1). *Тогда*

(а) *для любого* $\phi \in X$ *и любого* n *задачи* (4)–(7) *и* (8)–(10) *имеют единственные решения* $u(.,t) \in C(R;X)$ *и* $u_n(.,t) \in C(R;X^n)$ *(решение* $u(.,t)$*- обобщенное);*

(б) *для любого* $\phi \in X$ *и любого отрезка* $I = [t_0 - T, t_0 + T]$, *где* $T > 0$, *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in I} ||u_n(.,t) - u(.,t)||_X = 0;$$

(в) *для любого отрезка* I *и любого* $\epsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что* $\max_{t\in I} ||u_n(.,t) - v_n(.,t)||_X < \epsilon$ *для любых двух решений* u_n *и* v_n *задачи* (8)–(10) *таких, что* $||u_n(.,t_0) - v_n(.,t_0)||_X < \delta$ *и для любого* $n = 1,2,3,...$;

(г) *на* X *определена ДС* $g(\phi,t)$, *сопоставляющая любым* $\phi \in X$, $t \in R$ *точку* $u(t-t_0) \in X$;

(д) $\frac{d}{dt}||u(.,t)||_X = 0$;

(е) *функционал* $\Phi(u)$ *измерим по мере* w *и ограничен на любом ограниченном множестве. Борелевская мера*

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega e^{\Phi(u)} w(du)$$

является инвариантной для ДС $g(\phi,t)$ *на* X *(здесь* Ω*- произвольное борелевское подмножество* X*).*

<u>Замечание 3</u>

(Обобщенное) решение задачи (4)–(7) понимается как решение следующего интегрального уравнения:

$$u(t) = A(t-t_0)\phi + \int_{t_0}^{t} B(t-s)[f(x,|u(x,s)|^2)u(x,s)]ds, \quad (11)$$

где $\phi = (\phi^1, \phi^2)$. Оправданием этому определению является утверждение (б) из Предложения 1. Аналогично, решение $u_n(.,t)$ задачи (8)–(10) удовлетворяет уравнению:

$$u_n(.,t) = P^n A(t-t_0)\phi + \int_{t_0}^{t} B(t-s)P^n[f(x,|u_n(x,s)|^2)u_n(x,s)]ds. \quad (11n)$$

Набросок <u>доказательства.</u> Локальная однозначная разрешимость уравнения (11) доказывается стандартно (см. например, [18]). При достаточно малых $T > 0$ оператор из правой части (11) отображает $C(I;X)$ в себя и является сжимающим. Однозначная разрешимость задачи (8)–(10) и представление (11n) для ее решений очевидны. Кроме того, непосредственно проверяется, что $\frac{d}{dt}||u_n||_X^2 = 0$. Отсюда, в частности, следует продолжаемость любого решения задачи (8)–(10) для всех t и его единственность. Далее, из неравенства

$$||u_n(t) - u(t)||_X \le C_1||u_n(t_0) - u(t_0)||_X + C_2\int_{t_0}^{t} ||u_n(s) - u(s)||_X ds +$$

$$C_3 \int_{t_0}^{t} ||P^n u(s) - u(s)||_X ds,$$

вытекающего из (11) и (11n), следует, что $u_n(t)$ сходится в $C(I;X)$ к решению задачи (4)–(7) $u(t)$ на любом отрезке I, на котором $u(t)$ существует. Следовательно, на I имеем: $\frac{d}{dt}||u(t)||_X = 0$. Отсюда следует глобальная (для всех t) разрешимость задачи (4)–(7). Таким образом, утверждения (а),(б), (д) доказаны.

Далее, (в) следует из неравенства

$$||u_n(t)-v_n(t)||_X \le C_1||u_n(t_0)-v_n(t_0)||_X+C_2\int_{t_0}^{t}||u_n(s)-v_n(s)||_X ds.$$

Ясно, что подобное (в) утверждение справедливо и для решений задачи (4)–(7). Обозначим через $g(\phi,t)$, где $\phi \in X$, решение $u(.,t-t_0)$ задачи (11) в момент $t-t_0$. Свойства 1–3 из определения ДС вытекают теперь для функции g из доказанного и из соответствующих свойств решений задачи (8)–(10). Следовательно, (г) доказано.

Докажем (е). Используя предположения об f, легко доказать, что функционал $\Phi(u)$ непрерывен на X, следовательно, измерим (в смысле меры w), и ограничен на любом ограниченном множестве из X. На фазовом пространстве X^n ДС $g_n(x,t)$, порожденной задачей (8)–(10), рассмотрим гауссовскую (конечномерную) центрированную меру w_n с корреляционным оператором SP^n. Поскольку P^n коммутирует с S, это самосопряженный положительный оператор.

Лемма 1

Борелевская мера $\mu_n(\Omega) = \int_{\Omega} e^{\Phi(x)}w_n(dx)$ является ИМ для ДС g_n на фазовом пространстве $X^n = X_n \otimes X_n$ (здесь $\Omega \subset X^n$– борелевское).

Доказательство. Перепишем систему (8)–(10) для коэффициентов a_i, b_i, где $u_n^1 = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)e_i$, $u_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i(t)e_i$. Получим:

$$\dot{a}_i(t) = -\nabla_b H_n(a,b), \tag{12}$$

$$\dot{b}_i(t) = \nabla_a H_n(a,b), \tag{13}$$

$$a_i(t_0) = (u_n^1(.,t_0),\phi_i),\;\; b_i(t_0) = (u_n^2(.,t_0),\phi_i), \tag{14}$$

где $a=(a_1,...,a_n)$, $b=(b_1,...,b_n)$, $H_n(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{2}(a_i^2+b_i^2) + \Phi(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i, \sum_{i=1}^{n} b_ie_i)$. Поскольку система (12)–(14) – гамильтонова, она имеет ИМ μ' на своем фазовом пространстве R^{2n}:

$$\mu'(A) = (2\pi)^{-n}\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\int_A e^{H_n(a,b)}da\, db,$$

где $A \subset R^{2n}$– борелевское.

Ясно, что для любого борелевского $\Omega \subset X^n$ имеем: $\mu'(A) = \mu_n(\Omega)$, где $A = \{(a,b) \in R^{2n}|\ (\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i, \sum_{i=1}^{n} b_i\phi_i) \in \Omega\}$, и лемма доказана.

Продолжим меры w_n на X по правилу: для любого борелевского $\Omega \subset X$ положим $w_n(\Omega) = w_n(\Omega \bigcap X^n)$. Поскольку $\Omega \bigcap X^n$– борелевское в X^n, это определение корректно.

Лемма 2

Последовательность w_n слабо сходится на X к w.

Доказательство. Рассмотрим замыкание N в X множества $\{x \in X|\ (S^{-\frac{1}{3}}x,x) \le R^2\}$, где $R > 0$. Ясно, что N–компакт. Применяя лемму II.1.1 из [14, с. 58], получаем, что $w_n(X \setminus N) \le R^{-2}Tr(S^{\frac{2}{3}}) \to 0$ при $R \to +\infty$. По теореме Прохорова последовательность w_n слабо компактна.

Далее, поскольку $w_n(M) \to w(M)$ для любого цилиндрического множества $M \subset X$ ($w_n(M) = w(M)$ для всех достаточно больших n), и в силу единственности продолжения меры с алгебры на минимальную сигма–алгебру, w_n слабо сходится к w, и лемма доказана.

Лемма 3

$\lim_{n\to\infty}\inf \mu_n(\Omega) \geq \mu(\Omega)$ для любого открытого $\Omega \subset X$.

$\lim_{n\to\infty}\sup \mu_n(K) \leq \mu(K)$ для любого замкнутого ограниченного $K \subset X$.

Доказательство стандартно (см. [17]).

Лемма 4

$\mu(\Omega) = \mu(g(\Omega,t))$ для любого открытого $\Omega \subset X$ и $t \in R$.

Доказательство. Пусть $\Omega \subset X$ открыто и ограничено. Тогда $g(\Omega,t)$ также открыто и ограничено по доказанному. Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Ясно, что существует компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\mu(\Omega \setminus K) < \epsilon$. Тогда $g(K,t)$– также компакт. Пусть $\alpha = \min\{dist(K,\partial\Omega); dist(g(K,t),\partial g(\Omega,t))\}$, где $\partial\Omega$– граница множества Ω. Ясно, что $\alpha > 0$. По доказанным утверждениям Предложения 1 для любого $x \in K$ найдется $R > 0$ такое, что для любых $y,z \in B_R(x) = \{y \in X|\ ||y-x||_X < R\}$ и любых n имеем: $||u_n(t+t_0)-v_n(t+t_0)||_X < \frac{\alpha}{3}$, где $u_n(t)$ и $v_n(t)$– решения задачи (8)–(10) с $\phi = y$ и $\phi = z$ соответственно.

Пусть $B_{R_1}(x_1), ..., B_{R_m}(x_m)$– конечное покрытие компакта K указанными шарами, $B = \bigcup_{l=1}^{m} B_{R_l}(x_l)$. Тогда в силу доказанных утверждений Предложения 1 имеем:
$dist(u_n(.,t),\partial g(\Omega,t)) \geq \frac{\alpha}{2}$ для всех достаточно больших номеров n и всех $\phi \in B$. Тогда в силу лемм 1,3 имеем:

$$\mu(\Omega) \leq \mu(B)+\epsilon \leq \lim_{n\to\infty}\inf \mu_n(B)+\epsilon = \lim_{n\to\infty}\inf \mu_n(g_n(B,t))+\epsilon \leq$$

$$\leq \mu(g(\Omega,t)) + \epsilon$$

и, в силу произвольности $\epsilon > 0$,

$$\mu(\Omega) \leq \mu(g(\Omega,t)).$$

Как следствие получаем: $\mu(\Omega) = \mu(g(g(\Omega,t),-t) \geq \mu(g(\Omega,t))$, откуда $\mu(\Omega) = \mu(g(\Omega,t))$.

Для произвольного открытого $\Omega \subset X$ имеем: $\mu(\Omega) =$

$$= \lim_{R\to\infty} \mu(B_R(0)\bigcap\Omega) = \lim_{R\to\infty} \mu(B_R(0)\bigcap g(\Omega,t)) = \mu(g(\Omega,t)),$$

и лемма доказана.

Для произвольного борелевского $\Omega \subset X$ равенство $\mu(\Omega) = \mu(g(\Omega,t))$ получим, приближая Ω открытыми множествами, содержащими его, и Предложение 1 доказано.

3. Доказательство теоремы

Воспользуемся доказанным в разделе 2 предложением 1, согласно которому для любого $N = 1,2,3,...$ задача (4)–(7) с $f = f_N$ порождает на фазовом пространстве X ДС $g_N(x,t)$, обладающую борелевской ИМ $\mu_N(\Omega) = \int_\Omega e^{\Phi_N(u)}w(du)$. Пусть также $g(x,t)$– ДС на фазовом пространстве X, порождаемая задачей (4)–(7) с функцией f. В силу предположений теоремы для любого борелевского $\Omega \subset X$ имеем: $\lim_{N\to\infty}\mu_N(\Omega) = \mu(\Omega) \leq +\infty$, где $\mu(\Omega) = \int_\Omega e^{\Phi(u)}w(du)$ (здесь счетно–аддитивная мера μ принимает значения из расширенной числовой прямой $R\bigcup\{+\infty\}$ [17]).

Пусть $s > 0$, $H^s = \{u \in L_2(0,A)|\ \Delta^{\frac{s}{2}}u \in L_2(0,A)\}$ и пусть $||u||_s = ||\Delta^{\frac{s}{2}}u||$, $(u,v)_s = (\Delta^{\frac{s}{2}}u,\Delta^{\frac{s}{2}}v)$ для любых $u,v \in H^s$. В дальнейшем потребуется следующее

Предложение 2.

Пусть $s \in (0,\frac{1}{2})$. Тогда для любого $p \in (2,\frac{2}{1-2s})$ и для любого $r \in (s,\frac{1}{2})$ существует $C > 0$ такое, что любая $u \in H^r$ принадлежит L_p и имеет место неравенство:

$$||u||_p \leq C||u||^{1-\frac{1}{s}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}||u||_r^{\frac{1}{s}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}. \qquad (15)$$

Доказательство. Ясно, что неравенство (15) достаточно доказать для функций g класса C_0^∞, т.е. бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию $g(0) = g(A) = 0$.

Лемма 5

Пусть $s \in (0,1)$. Тогда существует $C > 0$ такое, что

$$|||g|||_{2,s} \le C||g||_s$$

для всех $g \in C_0^\infty$ (здесь $|||g|||_{p,s}^p = ||g||_p^p + \int\limits_0^A\int\limits_0^A \frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}dx\ dy$, а $\overset{o}{W}{}_p^s$ – хорошо известное пространство Слободецкого с нормой $|||\cdot|||_{p,s}$).

Доказательство. Используем рассуждения, подобные приведенным в [19, с. 288–289]. Очевидно, что

$$||\Delta^{\frac{s}{2}}g||_2 = \sum_{l=1}^{\infty}(\frac{\pi l}{A})^{2s}g_l^2, \quad g = \sum_{l=1}^{\infty} g_l e_l(x) = -\frac{i}{2}(\frac{2}{A})^{\frac{1}{2}}\sum_{-\infty}^{\infty} g_l e^{\frac{i\pi l x}{A}},$$

где $g_l = (g, e_l)$ $(l > 0)$, $g_{-l} = -g_l$ $(l = 0, 1, 2, ...)$. Поэтому имеют место соотношения:

$$|||g|||_{2,s} = \frac{1}{2A}\int\limits_0^A dy \int\limits_{-y}^{A-y} dt|t|^{-1-2s}|\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{ily}(e^{ilt}-1)|^2 \le$$

$$\le \int\limits_{-A}^{A} dt|t|^{-1-2s}\sum_{l=-\infty}^{\infty}|g_l|^2|e^{ilt}-1|^2 \le$$

$$\le \sum_{l=-\infty}^{\infty}|g_l|^2|l|^{2s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|e^{ilt}-1|^2}{|l|^{2s}|t|^{-1-2s}}dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty}|g_l|^2|l|^{2s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|e^{ir}-1|^2}{|r|^{-1-2s}}dr =$$

$$= C||\Delta^{\frac{s}{2}}g||^2,$$

где $C = const > 0$, и Лемма 5 доказана.

На основании теоремы вложения (см. [20], стр. 409) имеют место непрерывные вложения $\overset{o}{W}{}_2^s$ в L_p при

$$p \le \frac{2}{1-2s}, \quad s \in (0, \frac{1}{2}), \tag{16}$$

и $\overset{o}{W}{}_2^r$ в $\overset{o}{W}{}_2^s$ при $0 < s < r$. Следовательно, в силу леммы 5 H^s непрерывно вложено в $L_p(0, A)$ при p и s, удовлетворяющих (16).

Введем еще норму $||g||_{2,s}^2 = ||\frac{g(x)}{x^s}||_{L_2}^2 + ||\frac{g(x)}{(x-A)^s}||_{L_2}^2 + |||g|||_{2,s}^2$. В силу теоремы вложения W_2^s в L_p при условии (16) и в силу неравенства Гельдера

$$||g||_{2,s} \le C|||g|||_{2,r} \tag{17}$$

для всех g и $0 < s < r$ ($C > 0$– не зависит от $g \in C_0^\infty(0, A)$).

Введем еще

$$[p_s(g)]^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+2s}}dxdy,$$

$$|||g|||_{2,s,\infty}^2 = ||g||_{L_2(-\infty,\infty)}^2 + [p_s(g)]^2.$$

Тогда для любой $g \in C_0^\infty(0, A)$ имеем в силу неравенства Гельдера:

$$|||g|||_{2,s,\infty} \le C||g||_{2,r}, \tag{18}$$

где $C > 0$– не зависит от g, а $0 < s < r$. Через $W_2^s(-\infty, \infty)$ обозначим пространство Слободецкого.

Лемма 6

Существует $C > 0$ такое, что для любой $g \in W_2^s(-\infty, \infty)$ при $s \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in [2, \frac{2}{1-2s})$ имеет место неравенство

$$||g||_{L_p(-\infty,\infty)} \le C||g||_{L_2(-\infty,\infty)}^{1-\frac{1}{s}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}[p_s(g)]^{\frac{1}{s}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}.$$

Доказательство. Согласно [20] $W_2^s(-\infty,\infty)$ непрерывно вложено в $L_p(-\infty,\infty)$ при $2 \le p \le \frac{2}{1-2s}$. Ясно, что $g_a = g(ax) \in W_2^s(-\infty,\infty)$ при любом $a > 0$, поэтому

$$||g_a||_{L_p} \le C|||g_a|||_{W_2^s(-\infty,\infty)}, \quad .$$

откуда

$$||g||_{L_p(R)} \le C\{a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}||g||_{L_2(R)} + a^{\frac{1}{2}-s-\frac{1}{p}}p_s(g)\}, \qquad (19)$$

причем это неравенство выполнено для всех $g \in W_2^s(-\infty,\infty)$ и для всех $a > 0$. Правая часть достигает минимума при

$$a = \left\{ \frac{(s+\frac{1}{p}-\frac{1}{2})p_s(g)}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})||g||_{L_2(-\infty,\infty)}} \right\}^{\frac{1}{s}}.$$

Подставив это выражение в (19), получим утверждение леммы 6.

Утверждение Предложения 2 теперь вытекает из лемм 5 и 6 и неравенств (17), (18).

Пусть $X^s = H^s \otimes H^s$.

Лемма 7

$w(X^s) = 1$ *для любого* $s \in (0, \frac{1}{2})$.

Доказательство. Ясно, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n(R) = M(R) \subset X$ для любого $R > 0$, где $M_n(R) = \{x \in X|\ ||P^n x||_s^2 \le R^2\}$, и $M_1(R) \supset M_2(R) \supset M_3(R) \supset ... \supset M_n(R) \supset ...,\ \bigcup\limits_{R>0} M(R) = X^s$. Далее, имеем для любого $R > 0$ согласно лемме II.1.1 из [14, с. 58]:

$$w(M_n) \ge 1 - \frac{Tr\ S^{-1+s}}{R^2}.$$

Отсюда: $w(X^s) \ge 1 - \frac{Tr\ S^{s-1}}{R^2}$. Следовательно, $w(X^s) = 1$ в силу произвольности $R > 0$, и лемма 7 доказана.

Лемма 8

$0 < \mu(B_R(a)) < +\infty$ *для любого шара* $B_R(a) = \{x \in X|\ ||x-a||_X \le R\}$, *где* $R > 0$.

Доказательство. Ясно, что $B_R(a) \supset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B_k = \{x \in B_R(a)|\ ||x||_{X^s} \in [k-1, k)\}$, для любого $s \in (0, \frac{1}{2})$. В силу условия (H2) и Предложения 2 найдется s из этого интервала такое, что $\Phi(x) \le C(||x||_{X^s}^{2d+2} + ||x||_{X^s}^2)$, где $C = const > 0$– не зависит от $u \in X^s$, а $d = \max\{d_1; d_2\}$. Имеем: $\mu(B_R(a)) \ge \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \ge \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k w(B_k)$, где $c_k = const > 0$, и $w(B_R(a)) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w(B_k)$ в силу леммы 7. Поскольку $w(B_R(a)) > 0$, имеем: $w(B_k) > 0$ для некоторого k, следовательно, $\mu(B_R(a)) > 0$.

Далее, в силу Предложения 2, имеем: $\exp\{\Phi(x)\} \le$

$$\le \exp\{C_1(||x_1||+||x_2||)^{q+\frac{1}{s}-\frac{q}{2s}}(||\Delta^{\frac{r}{2}}x_1||+||\Delta^{\frac{r}{2}}x_2||)^{\frac{q}{2s}-\frac{1}{s}}+C_2||x||^2\},$$

где $q = 2d_2+2$, $\frac{2}{1-2s} > q$, $s < r < \frac{1}{2}$. Очевидно, что, поскольку $d_2 \in (0,1)$, найдутся $s, r \in (0, \frac{1}{2})$, $r > s$, столь большие, что $\frac{q}{2s} - \frac{1}{s} < 2$. Следовательно,

$$\exp\{\Phi(x)\} \le \exp\{C_3||u||_{X^r}^{\gamma} + C_4\}, \qquad (20)$$

где $\gamma \in (0, 2)$.

На пространстве X^s, $s \in (0, \frac{1}{2})$, рассмотрим центрированную гауссовскую меру w_s с корреляционным оператором S^{1-s}. Поскольку S^{1-s}– ядерный оператор, мера w_s счетно–аддитивна. Прямыми вычислениями можно проверить, что $w(M) = w_s(M \bigcap X^s)$ для любого цилиндрического множества $M \subset X$. В силу однозначности продолжения меры с алгебры на минимальную сигма–алгебру и поскольку $M \bigcap X^s$– цилиндрическое множество в X^s, если M– цилиндрическое множество в X, имеем

$$w(\Omega) = w(\Omega \bigcap X^s) = w_s(\Omega \bigcap X^s)$$

для любого борелевского $\Omega \subset X$.

Таким образом,

$$\int\limits_{B_R(a)} e^{\Phi(x)}\, w(dx) = \int\limits_{B_R(a)\bigcap X^s} e^{\Phi(x)}\, w_s(dx). \qquad (21)$$

Поскольку для произвольной гауссовской меры ν на гильбертовом пространстве H известно, что $\int\limits_H e^{\alpha\|v\|_H^2}\nu(dv) < +\infty$ для малых $\alpha > 0$ (см. [15]), и так как $\gamma \in (0,2)$ в неравенстве (20), интеграл в правой части (21) конечен, и лемма 8 доказана.

Лемма 9

Пусть $\Omega \subset X$ открыто и ограничено. Тогда для любого t $\mu(\Omega) = \mu(g(\Omega, t))$.

Доказательство. Положим $\Omega_N = g_N(\Omega, t)$, $A_k = \bigcap\limits_{N \geq k} \Omega_N$, $A = \bigcup\limits_{k\geq 1} A_k$. Пусть $x \in \Omega$. Тогда по предположению теоремы $g(x,t) \in \Omega_N$ для всех достаточно больших N, поэтому $g(\Omega,t) \subset A$. Имеем: $\mu_N(\Omega) \geq \mu_N(A_k)$, откуда $\mu(\Omega) \geq \mu(A_k)$ для любого k, поэтому $\mu(\Omega) \geq \mu(A) \geq \mu(g(\Omega,t))$. Заменяя Ω на $g(\Omega, t)$ и t на $-t$, имеем:

$$\mu(\Omega) \leq \mu(g(\Omega, t)),$$

и лемма 9 доказана.

Для произвольного ограниченного $\Omega \subset X$ равенство $\mu(\Omega) = \mu(g(\Omega, t))$ следует из доказанной леммы 9 с помощью аппроксимации множества Ω открытыми множествами снаружи.

Пусть Ω неограничено. Положим $\Omega_R = \{x \in \Omega |\ \|x\|_X \leq R\}$. По предположению теоремы имеем $g(\Omega_R, t) = B_R(0) \bigcap g(\Omega, t)$. Переходя к пределу в равенстве $\mu(\Omega_R) = \mu(g(\Omega_R, t))$ при $R \to +\infty$, получим: $\mu(\Omega) = \mu(g(\Omega,t))$, и теорема доказана.

Литература

1. Жидков П.Е.// ДАН СССР, 1991, т. **317**, N 3, с. 543–546.
2. Zhidkov P.E.// J. Nonlinear Anal.: Theory, Meth. Appl., 1994, v. **22**, p. 319–325.
3. Zhidkov P.E.// Prepr. JINR E5-92-395, Dubna, 1992.
4. Арсеньев А.А.// Мат. Сб., 1983, т. **121**, с. 297–309.
5. Песков Н.В.// ТМФ, 1985, т. **64**, с. 32–40.
6. Чуешов И.Д.// Мат. Сб, 1986, т. **130**, с. 394–403.
7. Чуешов И.Д.// ТМФ, 1988, т. **75**, с. 445–450.
8. Casati G., Guarneri I., Valz-Griz F.// J. Statist. Phys., 1983, v. **30**, p. 195–218.
9. Friedlander L.// Commun. Math. Phys., 1985, v. **98**, p. 1–16.
10. Lebowitz J.L., Rose H.A., Speer E.R.// J. Statist. Phys., 1988, v. **50**, p. 657–687.
11. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.–Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
12. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.-Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
13. Немыцкий В.В., Степанов В.В.-Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., 1949.
14. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.-Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.

15. Го Х.–Х.–Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.

16. Tsutsumi Y.// Funkcialaj Ekvac.. 1987, v. **30**, p. 115–125.

17. Халмош Р. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.

18. Рид М., Саймон Б.–Методы современной математической физики, т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. М. Мир, 1978.

19. Хермандер Л. – Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.

20. Трибель Х.-Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 мая 1994 года.

Жидков П.Е. **Р5-94-199**

Инвариантная мера для нелинейного уравнения Шредингера

Строится инвариантная мера для динамической системы, порождаемой нелинейным уравнением Шредингера. Получены условия ее ограниченности. Результат позволяет применить теорему о возвращении Пуанкаре, которая объясняет известное в теории нелинейных волн явление Ферми — Пасты — Улама.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод автора

P.E.Zhidkov P5-94-199

An Invariant Measure for a Nonlinear Schrödinger Equation

We construct an invariant measure for the dynamical system generated by a nonlinear Shrödinger equation. Conditions of the boundedness of the measure constructed are obtained. The result allows us to apply the Poincare recurrence theorem which (partially) explains the Fermi — Pasta — Ulam phenomenon well-known in the theory of nonlinear waves.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994