СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 9384

В.М.Лебеденко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРУПП ЛИ

1975

Р5 - 9384

В.М.Лебеденко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРУПП ЛИ

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются группы Ли, разложимые специальным образом в произведение однопараметрических подгрупп $A_i = [a_i(t_i)]_{t_i \in R}$.

Найдены простые соотношения /связывающие параметры t_i /, характеризующие эти группы.

Показано, что все неабелевы группы рассматриваемого типа разрешимы /ступени 2/.

Основные термины и символы, применяемые в работе,- общеупотребительны /см. [2,3,4] /. Исключение составляют некоторые понятия, приведенные ниже.

II. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Группу G называют произведением своих подгрупп A_i $(i=1,...,n)$ –

$G = A_1 \dots A_n$

/взятых в данном порядке/, если каждый элемент $g \in G$ представим в виде

$$g = a_1 \dots a_n ,$$

где

$$a_i \in A_i \ (i=1,...,n).$$

Определение 2. Произведением двух подмножеств A, B группы G называется множество всех элементов вида xy, где $x \in A$, $y \in B$. Оно обозначается через AB /аналогично определяется произведение n множеств - $A_1 \dots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{1 \le i \le n} A_i$ /.

Определение 3. Подгруппы A и B группы G называются **перестановочными**, если множества AB и BA совпадают.

Замечание. Если $AB = BA$, то вовсе не обязательно выполнение соотношения $xy = yx$ для любых x, y, $x \in A, y \in B$ /см. [4] /.

Определение 4. Группу G, разложимую в произведение $A_1 \dots A_n$, будем называть **P-произведением** подгрупп A_i, если любые две подгруппы A_i и A_j /$i,j \le n$, $i \ne j$/ перестановочны и для любого k ($k \le n$)

$$A_k \cap \Big(\prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne k}} A_i \Big) = E$$

/E- единичная подгруппа/.

Замечание. Если G – P - произведение подгрупп $A_i (i \le n)$ и $i_1 \dots i_n$ - перестановка индексов $1 \dots n$, то $G = A_{i_1} \dots A_{i_n}$ – P - произведение подгрупп A_{i_k}, взятых в этом порядке. Однако легко показать, что если фиксировать некоторый порядок следования сомножителей $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ P- произведения, то каждый элемент $g \in G$ имеет однозначную запись вида

$$g = a_{i_1} \dots a_{i_n}, \qquad \text{где} \qquad a_{i_k} \in A_{i_k}$$

/см. [4] /.

Определение 5. Группу G будем называть **PR-группой** /или группой типа PR /, если она разложима в P-произведение своих однопараметрических подгрупп $A_i = [a_i(t_i)]_{t_i \in R}$ $(1 \le i \le n)$ типа R* /т.е. $A_i \cong R$ - аддитивной группе действительных чисел/ и является группой Ли относительно параметров t_i $(1 \le i \le n)$ **.

---

* $a_i(t_i) = a_i(t_i') \leftrightarrow t_i = t_i'$; $a_i(t_i) a_i(t_i') = a_i(t_i') a_i(t_i) = a_i(t_i + t_i')$ при любых $t_i, t_i' \in R$.

** Т.е. $(t_1, \dots, t_n)$ - глобальные дифференцируемые координаты группы Ли G.

III. СООТНОШЕНИЯ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ PR-ГРУППЫ

1. О двухпараметрических PR-группах Ли

Известны две двухпараметрические группы Ли типа PR. Это аддитивная группа евклидова пространства E_2 и группа афинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию. Последняя группа изоморфна группе векторов $(a, b)_1$, $a \in (0, \infty)$, $b \in (-\infty, \infty)$ с операцией умножения

$$(a_1, b_1)_1 (a_2, b_2)_1 = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)_1$$

/см. [7] /.

Роль единицы здесь играет элемент $(1,0)_1$. Покажем, что эту группу можно представить в виде P-произведения однопараметрических подгрупп типа R. Очевидно, что каждый элемент $(a_1, b_1)_1$ может быть однозначно записан в виде

$$(e^{x_0}, e^{x_0} x_1)_1 \quad (\text{где } x_0 = \ln a_1, \quad x_1 = \frac{b_1}{a_1}).$$

Если $(a_2, b_2)_1 = (e^{y_0}, e^{y_0} y_1)_1$, то

$$(a_1, b_1)_1 \cdot (a_2, b_2)_1 = (e^{x_0}, e^{x_0} x_1)_1 \cdot (e^{y_0}, e^{y_0} y_1)_1 =$$

$$= (e^{x_0 + y_0}, e^{x_0} e^{y_0} y_1 + e^{x_0} x_1)_1 =$$

$$= (e^{x_0 + y_0}, e^{x_0 + y_0} (e^{-y_0} x_1 + y_1))_1. \qquad /1/$$

Рассмотрим группоид K /см. [3] /, состоящий из векторов (x_0, x_1) $(x_i \in R)$, с операцией

$$(x_0, x_1)(y_0, y_1) = (e^{-y_0} x_1 + y_1). \qquad /2/$$

Он изоморфен предыдущей группе. Действительно, положим для любого $(a, b)_1$, $(a,b)_1 \phi = (\ln a, b/a)$. Очевидно, что ϕ - отображение на все множество K. Соотношения /1/ показывают, что ϕ - гомоморфизм. Если

$$(\ln a_1, \frac{b_1}{a_1}) = (\ln a_2, \frac{b_2}{a_2}), \quad \text{то} \quad a_1 = a_2, b_1 = b_2,$$

т.е. ϕ - взаимно-однозначное соответствие. Итак, группоид K изоморфен предыдущей группе. Следовательно, K-группа, изоморфная группе афинных движений прямой, сохраняющих ориентацию, и группе элементов $(a,b)_1$ /см. [3]/. Группа K содержит две однопараметрические подгруппы:

$$B_1 = [(0,y)]_{y \in R} \quad \text{и} \quad B_2 = [(x,0)]_{x \in R} .$$

Так как $(x,y) = (x,0)(0,y)$, то $K = B_2 \cdot B_1$. Пересечение

$$B_1 \cap B_2 = [(0,0)] = E .$$

Подгруппы B_1 и B_2 перестановочны:

$$(0,y)(0,x) = (x, e^{-x} y) = (x,0)(0, e^{-x} y) \qquad /3/$$

/отсюда легко заключить, что B_2 нормальный делитель в K и что K, как расширение абелевой группы с помощью абелевой группы, является разрешимой группой /см. [4]//. Из соотношений /2/ видно, что K -группа Ли относительно x и y. Так как подгруппы B_i изоморфны R, то K – PR -группа /следовательно, и группа элементов $(a,b)_1$ - типа PR /.

Соотношения /3/ можно переписать следующим образом:

$$b_1(t_1)b_2(t_2) = b_2(t_2)b_1(e^{-t_2} t_1) \qquad /4/$$

/для любых $b_i(t_i) \in B_i$, $i = 1,2$ /.

Легко показать, что всякая группа, разложимая в P-произведение двух однопараметрических подгрупп B_1 и B_2, удовлетворяющих соотношениям типа /4/, изоморфна K.

С другой стороны, как мы увидим ниже, в группе K можно выбрать и другие пары перестановочных однопараметрических подгрупп с тривиальным пересечением, дающие в произведении группу K. Эти подгруппы удовлетворяют соотношениям, которые могут несколько отличаться от соотношений типа /4/.

З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что роль единицы в K играет элемент $(0,0)$, а $(x_0, x_1)^{-1} = (-x_0, -e^{x_0} x_1)$ для любого элемента $(x_0, x_1) \in K$.

Л е м м а. Если группа K является P-произведением некоторых двух однопараметрических подгрупп, то при соответствующей нумерации этих подгрупп A_1, A_2, все пары элементов $a_1(t_1)$, $a_2(t_2)$ $(a_i(t_i) \in A_i)$ связаны соотношениями вида

$$a_1(t_1)a_2(t_2) = a_2(t_2)a_1(e^{rt_2} t_1), \qquad /5/$$

где $0 \neq r$ - для каждой пары постоянно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим сначала, какие вообще однопараметрические подгруппы содержит группа K. Если $[a(t)]_{t \in R}$ $(a(0) = e = (0,0))$ - однопараметрическая подгруппа в K /см. [2]/, то для любого $t \in R$ $a(t) = (u(t), v(t)) \in K$, где $u(t)$ и $v(t)$ - непрерывные функции, $a(t)a(s) = a(t+s)$ для любых $s, t \in R$. Из того, что

$$(u(t_1+t_2), v(t_1+t_2)) = (u(t_1), v(t_1))(u(t_2), v(t_2)) =$$

$$= (u(t_1) + u(t_2), e^{-u(t_2)} v(t_1) + v(t_2)),$$

вытекают соотношения:

$$u(t_1+t_2) = u(t_1) + u(t_2), \qquad /6/$$

$$v(t_1+t_2) = e^{-u(t_2)} v(t_1) + v(t_2). \qquad /7/$$

Как известно, вяская непрерывная функция, удовлетворяющая соотношениям /6/, имеет вид

$$u(t) = ct \quad (c \equiv \text{Const}).$$

Следовательно, функция $v(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$v(t_1+t_2)=e^{-ct_2}v(t_1)+v(t_2). \qquad /8/$$

Пусть $c\neq 0$. Положив в соотношениях /8/ сначала $t_1=1$, $t_2=t$, а потом $t_1=t$, $t_2=1$, получим, что

$$v(t)=\frac{v(1)}{e^{-c}-1}(e^{-ct}-1)=k(e^{-ct}-1),$$

где $0\neq k\equiv const$, если $v(1)\neq 0$ /при $v(1)=0$, $v(t)\equiv 0$ /. Если же $c=0$, то $v(t)$ удовлетворяет соотношениям типа /6/ и поэтому имеет вид $v(t)=pt$. Итак, однопараметрические подгруппы в K могут иметь один из следующих видов:

$$[(ct,0)]_{t\in R}, \quad c\neq 0; \qquad /9/$$

$$[(0,pt)]_{t\in R}, \quad p\neq 0; \qquad /10/$$

$$[(ct,\ k(e^{-ct}-1)],\quad c\neq 0,\quad k\neq 0. \qquad /11/$$

Легче всего проверить, что подмножества вида /9/ и /10/ являются однопараметрическими подгруппами типа R.

Соотношения

$$(ct,\ k(e^{-ct}-1))=(0,0)\ \leftrightarrow\ t_1=0,$$

$$(ct_1,k(e^{-ct_1}-1))(ct_2,k(e^{-ct_2}-1))=$$

$$=(c(t_1+t_2),e^{-ct_2}k(e^{-ct_1}-1)+k(e^{-ct_2}-1))=$$

$$=(c(t_1+t_2),\ k(e^{-c(t_1+t_2)}-1))$$

показывают, что множества типа /11/ также являются однопараметрическими подгруппами типа R.

Теперь из указанных групп нам необходимо выделить пары перестановочных подгрупп и имеющих тривиальное

пересечение. Очевидно, что любые две подгруппы типа /9/ имеют нетривиальное пересечение. То же и для групп типа /10/. Предположим, что элементы двух подгрупп типа /11/ имеют вид:

$$a_1(t)=(c_1t,\ k_1(e^{-c_1t}-1)),$$

$$a_2(t)=(c_2t,\ k_2(e^{-c_2t}-1)).$$

Покажем, что эти подгруппы не имеют нетривиального пересечения тогда и только тогда, когда $k_1\neq k_2$. Действительно, если $k_1=k_2$, то при $t_1=1$, $t_2=c_1/c_2$ $a_1(t_1)=a_2(t_2)\neq(0,0)$. Пусть $k_1\neq k_2$. Допустим, что при $t\neq 0$

$$(c_1t,k_1(e^{-c_1t}-1))=(c_2t',k_2(e^{-c_2t'}-1)).$$

Тогда $c_1t=c_2t'\neq 0$ и $k_1(e^{-c_1t}-1)=k(e^{-c_2t'}-1)$. Откуда следует, что $k_1=k_2$. Мы пришли к противоречию.

Предположим теперь, что две подгруппы вида /11/ перестановочны, то есть для любых t_1 и t_2 есть такие t_1' и t_2', что $a_2(t_2)a_1(t_1)=a_1(t_1')a_2(t_2')$, или

$$(c_2t_2,\ k_2(e^{-c_2t_2}-1))(c_1t_1,k_1(e^{-c_1t_1}-1))=$$

$$=(c_1t_1+c_2t_2,\ e^{-c_1t_1}k_2(e^{-c_2t_2}-1)+k_1(e^{-c_1t_1}-1))=$$

$$=(c_1t_1',k_1(e^{-c_1t_1'}-1))(c_2t_2',k_2(e^{-c_2t_2'}-1))=$$

$$=(c_1t_1'+c_2t_2',\ e^{-c_2t_2'}k_1(e^{-c_1t_1'}-1)+k_2(e^{-c_2t_2'}-1)).$$

Следовательно, для любых действительных t_1 и t_2 система

$$\begin{cases} c_1t_1'+c_2t_2'=c_1t_1+c_2t_2, \\ e^{-c_2t_2'}k_1(e^{-c_1t_1'}-1)+k_2(e^{-c_2t_2'}-1)= \\ \quad =e^{-c_1t_1}k_2(e^{-c_2t_2}-1)+k_1(e^{-c_1t_1}-1) \end{cases} \qquad /12/$$

разрешима относительно t_1' и t_2'. Из разрешимости системы /12/ следует, что $t_2' = \frac{c_1}{c_2}(t_1 - t_1') + t_2$, а при $x = e^{c_1 t_1'}$ справедливо равенство

$$(k_2 - k_1)(q_1 q_2 x - q_1 q_2 + q_1 - 1) = 0, \qquad /13/$$

где $q_1 = e^{-c_1 t_1}$, $q_2 = e^{-c_2 t_2}$. То есть уравнения /13/ должны иметь положительные корни при любых допустимых значениях параметров q_1 и q_2. Используя элементарные приемы исследования таких уравнений, мы получаем, что это возможно только при $k_1 = k_2$. Но этот случай мы отбрасываем по известным причинам. Нам остается рассмотреть пары подгрупп типов

/9/, /1O/,
/9/, /11/,
/1O/, /11/.

Очевидно, что пересечение любой подгруппы типа /9/ с подгруппой типа /1O/ тривиально. Пусть $A_2 \ni a_2(t) = (ct, 0)$, $A_1 \ni a_1(t) = (0, pt)$. Тогда для любого $(x, y) \in K$

$$(x, y) = a_2\left(\frac{x}{c}\right) a_1\left(\frac{y}{p}\right),$$

то есть $K = A_2 A_1$. Используя соотношения /4/, получаем, что

$$a_1(t_1)\, a_2(t_2) = b_1(ct_1)\, b_2(pt_2) =$$

$$= b_2(pt_2)\, b_1(ce^{-pt_2} t_1) = a_2(t_2)\, a_1(e^{-pt_2} t_1).$$

То есть мы получили соотношения, указанные в формулировке Леммы.

Рассмотрим комбинацию /9/, /11/. Очевидно, что пересечение соответствующих подгрупп тривиально. Пусть группа первого типа состоит из элементов вида $(qt_1, 0)$, а группа второго типа - из элементов вида $(ct_2, k(e^{-ct_2} - 1))$. Предположим, что эти группы перестановочны. То есть для любых t_1 и t_2 разрешимы относительно t_1' и t_2' уравнения

$$(qt_1, 0)(ct_2, k(e^{-ct_2} - 1)) =$$

$$= (ct_2', k(e^{-ct_2'} - 1))(qt_1', 0),$$

что эквивалентно разрешимости систем

$$\begin{cases} qt_1 + ct_2 = qt_1' + ct_2', \\ e^{-ct_2} - 1 = e^{-qt_1'}(e^{-ct_2'} - 1). \end{cases}$$

Из разрешимости этих систем следует существование положительных решений у уравнений вида

$$x - \alpha\beta + \beta - 1 = 0$$

/где $x = e^{-qt_1'}$, $\alpha = e^{-qt_1}$, $\beta = e^{-ct_2}$/ при любых α, β, $\alpha, \beta > 0$. Однако не при любых α, β, $\alpha, \beta > 0$ соответствующие уравнения разрешимы. Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 4$ положительных решений нет. Итак, комбинация /9/, /1O/ не удовлетворяет нашим условиям.

Рассмотрим комбинацию типов /1O/, /11/. Так же, как и в предыдущем случае, легко проверить, что соответствующие группы имеют тривиальное пересечение. Убедимся в том, что любая подгруппа типа /1O/ перестановочна с любой подгруппой типа /11/. Действительно, для любых t и t уравнения

$$(0, pt_1)(ct_2, k(e^{-ct_2} - 1)) = (ct_2, e^{-ct_2} pt_1 + k(e^{-ct_2} - 1)) =$$

$$= (ct_2', k(e^{-ct_2'} - 1))(0, pt_1') = (ct_2', k(e^{-ct_2'} - 1) + pt_1')$$

разрешимы, причем однозначно:

$$t_2' = t_2, \qquad t_1' = e^{-ct_2} t_1.$$

Отсюда видно, что соответствующие подгруппы удовлетворяют соотношениям, указанным в формулировке леммы. Остается проверить, что группа K разлагается в произведение таких подгрупп. Иначе: для любых ли действительных a и b разрешимы уравнения

$$(a,b)=(ct_2, e^{-ct_2}pt_1+k(e^{-ct_2}-1))?$$

Эти решения легко найти

$$t_2=\frac{a}{c},\quad t_1=\frac{b-k(e^{-a}-1)}{e^{-a}p}.$$

Мы рассмотрели все возможные случаи. И там, где условия леммы выполнялись, выполнялось и утверждение леммы. Таким образом лемма доказана.

Замечание. Легко убедиться в том, что при соответствующей замене переменных соотношения типа /5/ переходят в соотношения типа /4/. Однако в дальнейшем нам встретятся группы, в которых несколько однопараметрических подгрупп попарно связаны соотношениями типа /5/. В таких случаях не всегда возможно все соотношения заменить соотношениями /4/.

2. Отношения "||" и "≺"

Введем некоторые отношения на множестве однопараметрических подгрупп, образующих P-произведение $A_1 \ldots A_n$ $(n \geq 2)$.

Определение 6. Будем считать, что при $i \neq j$, $A_i \| A_j$, если $xy=yx$ для любых x, y, $x \in A_i$, $y \in A_j$.

Определение 7. Будем считать, что $A_i \prec A_j$ $(i \neq j)$, если для любых $a_i(t_i) \in A_i$, $a_j(t_j) \in A_j$ выполняются соотношения

$$a_i(t_i)a_j(t_j)=a_j(t_j)a_i(e^{r_{ij}t_j}t_i), \qquad /5'/$$

где $0 \neq r_{ij}$ - некоторая постоянная /для каждых i и j /.

Замечания. Легко увидеть, что соотношения /5′/ эквивалентны следующим:

$$a_j(t_j)a_i(t_i)=a_i(e^{-r_{ij}t_j}t_i)a_j(t_j). \qquad /5''/$$

Отношение "≺" антисимметрично, и никакие две подгруппы A_i и A_j $(i \neq j)$ не могут быть связаны одновременно отношениями "||" и "≺". Это следует из несовместимости равенств

$$a_j(t_j)a_i(e^{r_{ij}t_j}t_i)=a_j(e^{-r'_{ji}t_i}t_j)a_i(t_i),$$

$$a_j(t_j)a_i(e^{r_{ij}t_j}t_i)=a_j(t_j)a_i(t_i)$$

при $t_i \neq 0 \neq t_j$.

PR-группа G является абелевой тогда и только тогда, когда все пары A_i, A_j $(i \neq j)$ связаны отношением "||". Всякая такая группа изоморфна аддитивной группе евклидова пространства E_n.

3. Отношения "||", "≺" и PR-группы

Теорема. Справедливы следующие утверждения:

1/ всякая неабелева PR-группа G 2-разрешима /то есть $[G',G']=E$, где $G'=[G,G] \neq E$ * /.

2/ Группа G, разложимая в P-произведение однопараметрических подгрупп $A_i=[a_i(t_i)]_{t_i \in R}$ $(1 \leq i \leq n, n \geq 2)$ типа R, является PR-группой /относительно параметров $t_1,\ldots,t_n$ / тогда и только тогда, когда каждая пара A_i, A_j $(i \neq j)$ удовлетворяет одному из условий - $A_i \prec A_j$, $A_j \prec A_i$, $A_i \| A_j$, и никакая тройка A_i, A_j, A_k не связана соотношениями $A_i \prec A_j$, $A_j \prec A_k$.

Доказательство. Предположим, что некоторая группа G является P-произведением однопараметрических подгрупп $A_i=[a_i(t_i)]_{t_i \in R}$ типа R $-G=A_1\ldots A_n$ $(n \geq 2)$ и PR-группой относительно параметров t_i. Из этого следует, что для каждой пары i,j $(i,j \leq n, i \neq j)$ подгруппа A_iA_j является /глобально/ параметрической, то есть группой Ли /см. [6] / относительно параметров t_i и t_j. Иными словами, A_iA_j - двухпараметрическая группа Ли. Она гомеоморфна евклидову пространству E_2, так как A_i, $A_j \cong R$, и, следовательно, связна и односвязна /см. [9] /. Отсюда вытекает /см. [2] /, что либо A_iA_j - абелева

---

* Здесь E - единичная подгруппа, а [G,G] означает коммутант группы G /см. [4] /.

группа и $A_i \| A_j$, либо $A_i A_j \cong K$ /см. п.1/. Если $A_i A_j \cong K$, то, как установлено в лемме, или $A_i \prec A_j$, или $A_j \prec A_i$. Если каждая пара A_i, A_j связана отношением "$\|$" / G - абелева группа/, то, естественно, ни одна тройка A_i, A_j, A_k не связана соотношениями $A_i \prec A_j$, $A_j \prec A_k$. Предположим, что в множестве $[A_i]_{1 \le i \le n}$ не каждая пара A_i, A_j связана отношением "$\|$" и есть тройка A_i, A_j, A_k, удовлетворяющая условию

$A_i \prec A_j$, $A_j \prec A_k$.

При этом может быть, что

а/ $A_k \prec A_i$,

b/ $A_i \prec A_k$ или $A_i \| A_k$.

В силу свойств P-произведения подгруппа $G' = A_i A_j A_k$ - P-произведение своих подгрупп A_i, A_j, A_k /в обоих случаях/. Из нашего предположения в случае а/ следует, что операцию в G' можно задать так /см. /5'/,/5''//:

$$(a_i(t_i)a_j(t_j)a_k(t_k))(a_i(t_i')a_j(t_j')a_k(t_k')) =$$

$$= a_i(t_i + e^{-r_{ij}t_j} t_i')a_j(t_j + e^{-r_{jk}e^{r_{ki}t_i'}t_k} t_j')\, a_k(e^{r_{ki}t_i'} t_k + t_k').$$

Пусть $a_i(t_i)a_j(t_j)a_k(t_k) = g$, $a_i(t_i')a_j(t_j')a_k(t_k') = g'$, $g'' = a_i(t_i'')a_j(t_j'')a_k(t_k'')$.

Тогда последние компоненты произведений $(gg')g''$, $g(g'g'')$ соответственно равны

$$a_k(e^{r_{ki}t_i''}(e^{r_{ki}t_i'} t_k + t_k') + t_k'') = c$$

и

$$a_k(e^{r_{ki}(t_i' + e^{-r_{ij}t_j'}t_i'')} t_k + e^{r_{ki}t_i''} t_k' + t_k'') = c'.$$

В силу ассоциативности умножения и свойств P-произведения эти компоненты должны совпадать при любых значениях переменных. Однако $c \ne c'$ при $t_i' = t_k' = t_k'' = 0$, $t_j' = t_i'' = t_k = 1$ /так как $r_{ij} \ne 0 \ne r_{ki}$ /. Мы пришли к противоречию. Следовательно, случай а/ при наших предположениях не может иметь места.

Рассмотрим вторую возможность:

$A_i \prec A_j$, $A_j \prec A_k$ и $A_i \prec A_k$ или $A_i \| A_k$.

В этом случае элементы $a_i(t_i)$ и $a_k(t_k)$ подгрупп A_i и A_k связаны соотношениями

$$a_i(t_i)a_k(t_k) = a_k(t_k)a_i(e^{r_{ik}t_k} t_i),$$

где $r_{ik} \ne 0$ при $A_i \prec A_k$ и $r_{ik} = 0$ при $A_i \| A_k$. Далее, операция в G'/см. /5'/, /5''// задается так:

$$(a_i(t_i)a_j(t_j)a_k(t_k))(a_i(t_i')a_j(t_j')a_k(t_k')) =$$

$$= a_i(t_i + e^{-(r_{ij}t_j + r_{ik}t_k)} t_i')a_j(t_j + e^{-r_{jk}t_k} t_j')a_k(t_k + t_k')$$

/где $r_{ij} \ne 0$, $r_{jk} \ne 0$ /.

Пусть $a_i(t_i)a_j(t_j)a_k(t_k) = g$, $a_i(t_i')a_j(t_j')a_k(t_k') = g'$, $g'' = a_i(t_i'')a_j(t_j'')a_k(t_k'')$.

В силу ассоциативности операции в G' первые компоненты произведений $g(g'g'')$, $(gg')g''$ соответственно

$$a_i(t_i + e^{-(r_{ij}t_j + r_{ik}t_k)}(t_i' + e^{-(r_{ij}t_j' + r_{ik}t_k')} t_i''))$$

и

$$a_i(t_i + e^{-(r_{ij}t_j + r_{ik}t_k)} t_i' + e^{-(r_{ij}(t_j + e^{-r_{jk}t_k} t_j') + r_{ik}(t_k + t_k'))} t_i''),$$

должны совпадать при любых значениях параметров. Но они не совпадают при $t_i = t_i' = 0$, $t_i'' = t_j'' = t_j' = t_k = t_k'' = 1$. И в случае b/ мы пришли к противоречию.

Полученные противоречия показывают, что наше предположение неверно. То есть никакая тройка A_i, A_j, A_k не связана соотношениями $A_i \prec A_j$, $A_j \prec A_k$*. Таким образом, первая часть утверждения 2/ доказана.

Предположим теперь, что некоторая неабелева группа G является P-произведением однопараметрических подгрупп $A_i = [a_i(t_i)]_{t_i \in R} \cong R$, $G = A_1 \ldots A_n$. Причем каждая пара A_i, A_j $(i \ne j)$ удовлетворяет одному из условий $A_i \prec A_j$, $A_j \prec A_i$, $A_i \| A_j$ и никакая тройка A_i, A_j, A_k не связа-

---

* Из нашего доказательства следует, что это свойство групп, разложимых в P-произведение однопараметрических подгрупп типа R.

на соотношениями $A_i \prec A_j$, $A_j \prec A_k$. Отсюда следует, что для каждой подгруппы A_i выполняется только одно из условий:

c) существует A_j, $A_j \succ A_i$;

d) существует A_k, $A_k \prec A_i$,

e) $A_i \| A_\ell$ для любого $\ell \le n$, $\ell \ne i$.

В соответствии с этим множество $\{A_i\}_{1 \le i \le n}$ разбивается на три непересекающихся множества B_1, B_2, B_3. Множества B_1, B_2 и B_3 состоят соответственно из элементов типа c), d) и e). Причем $B_1 \ne \emptyset, B_2 \ne \emptyset$, B_3 может быть и пустым, элементы каждого множества B_i $(i = 1,2,3)$ связаны между собой отношением "$\|$", а для любых A_i, A_j, $A_i \in B_1, A_j \in B_2$: $A_i \prec A_j$ или $A_i \| A_j$.

Покажем, что группа G 2-разрешима. Пусть

$$G_1 = \prod_{A_i \in B_1} A_i, \quad G_2 = \prod_{A_i \in B_2 \cup B_3} A_i .$$

Тогда G_1 - нормальный делитель G. Это вытекает из того, что для любого элемента $a_i(t_i) \in A_i$, $A_i \in B_1$ и любого элемента $a_j(t_j) \in A_j$, $A_j \in B_2 \cup B_3$

$$a_j^{-1}(t_j)\, a_i(t_i)\, a_j(t_j) \in A_i \qquad (A_i \prec A_j, \text{ или } A_i \| A_j),$$

а все элементы $B_2 \cup B_3$ связаны отношением "$\|$". По теореме об изоморфизмах /см. [4] /

$$G/G_1 \cong G_2/(G_2 \cap G_1) \cong G_2,$$

так как пересечение $G_2 \cap G_1$ тривиально ввиду свойств P-произведения. Но G_2- абелева группа. Следовательно,

$$G \supset G_1 \supset E -$$

-разрешимый нормальный ряд длины 2. Отсюда вытекает 2-разрешимость G, поскольку она - неабелева группа /см. [4] /. Отсюда и из предыдущего уже следует первое утверждение теоремы.

Теперь покажем, что группа G является группой Ли относительно параметров $t_1, \dots, t_n$ /т.е. PR-группой/. В соответствии с нашими построениями подгруппы A_i можно перенумеровать так: $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$, где индексы i_k удовлетворяют условиям: $A_{i_k} \in B_1$ при $1 \le k \le p$ $(1 \le p < n)$, $A_{i_k} \in B_2 \cup B_3$ при $p+1 \le k \le n$. Группа $G = A_{i_1} \dots A_{i_n}$ и является P-произведением подгрупп A_{i_k}, взятых в этом порядке. Такая перегруппировка приводит к тому, что для любых ℓ, q, $\ell < q$ и любых t_{i_ℓ}, t_{i_q} имеет место соотношение

$$a_{i_\ell}(t_{i_\ell})\, a_{i_q}(t_{i_q}) = a_{i_q}(t_{i_q})\, a_{i_\ell}(e^{r'_{\ell q} t_{i_q}} t_{i_\ell}) \qquad /5'''/$$

/мы считаем, что $r'_{\ell q} = 0$ при $A_{i_\ell} \| A_{i_q}$ и $r'_{\ell q} = r_{i_p i_q}$ при A_{i_ℓ} A_{i_q} /.

Теперь мы можем показать, что G является /глобально/ параметрической группой, а, следовательно, и группой Ли относительно параметров t_{i_k} /см. [6] /. Пусть $g = a_{i_1}(t_{i_1}) \dots a_{i_n}(t_{i_n})$ и $g' = a_{i_1}(t'_{i_1}) \dots a_{i_n}(t'_{i_n})$ - произвольные элементы G.

Посмотрим, как зависят параметры произведения от параметров сомножителей. Из соотношений /5''/ и /5'''/ вытекает, что

$$g a_{i_1}(t'_{i_1}) = a_{i_1}(t_{i_1}) \dots a_{i_{n-1}}(t_{i_{n-1}})\, a_{i_1}(e^{-r'_{1n} t_{i_n}} t'_{i_1})\, a_{i_n}(t_{i_n}) =$$

$$= \dots = a_{i_1}(t_{i_1} + e^{-(r'_{12} t_{i} + \dots + r'_{1n} t_{in})} t'_{i_1})\, a_{i_2}(t_{i_2}) \dots a_{i_n}(t_{i_n}).$$

Действуя так далее, получаем

$$gg' = a_{i_1}(t_{i_1} + e^{-(r'_{12} t_{i_2} + \dots + r'_{1n} t_{i_n})} t'_{i_1})\, a_{i_2}(t_{i_2} +$$

$$+ e^{-(r'_{23} t_{i_3} + \dots + r'_{2n} t_{i_n})} t'_{i_2}) \dots a_{i_{n-1}}(t_{i_{n-1}} + e^{-r'_{n-1\,n} t_{i_n}} t'_{i_{n-1}}) \times$$

$$\times a_{i_n}(t_{i_n} + t'_{i_n}) \qquad /14/$$

/строго говоря, такая формула справедлива при $n \ge 4$; при $n = 2,3$ соответственно справедливы равенства:

$$gg' = a_{i_1}(t_{i_1} + e^{-r'_{12} t_{i_2}} t'_{i_1})\, a_{i_2}(t_{i_2} + t'_{i_2}),$$

является PR -группой. Она изоморфна группе векторов, состоящей из элементов $(x_0, \vec{X})(x_0 \in E_1, \vec{X} \in E_3)$, с операцией

$$(x_0, \vec{X})(y_0, \vec{Y}) = (x_0 + y_0, e^{-y_0}\vec{X} + \vec{Y})$$

/см. /1,5/ /.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за интерес к работе и ценные замечания, Д.П.Желобенко, Г.И.Колерову, А.В.Матвеенко, М.Гавличку, Н.Б.Скачкову, В.Ласснеру и Е.А.Иванову за полезные обсуждения.

Литература

1. *В.Г.Кадышевский. Препринт ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.*
2. *А.А.Кириллов. Элементы теории представлений. Изд-во "Наука", Москва, 1972.*
3. *А.Г.Курош. Лекции по общей алгебре. Физматгиз, Москва, 1962.*
4. *А.Г.Курош. Теория групп. Изд-во "Наука", Москва, 1967.*
5. *В.М.Лебеденко. Препринт ОИЯИ, Р2-6033, Дубна, 1971.*
6. *P.Montgomery, L.Zippin. Topological Transformations Groups. Interscience, New York, 1955.*
7. *М.А.Наймарк. Нормированные кольца. Изд-во "Мир", Москва, 1968.*
8. *А.С.Понтрягин. Непрерывные группы. Изд-во "Наука", Москва, 1973.*
9. *К.Шевалле. Теория групп Ли. т. 1, ИЛ, 1948.*

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1975 года.