сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-93-48

В.Г.Одинцов

# ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ПРИ АППРОКСИМИРОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ПОЛИНОМАМИ

1993

В настоящей работе рассматриваются способы применения прямых методов при решении вариационных задач, связанных с аппроксимированием интегральных кривых полиномами.

В частности, приведен пример решения обратной задачи движения заряженной частицы в магнитном поле: по заданной траектории движения частицы определить ее импульс.

Движение заряженной частицы в магнитном поле описывается дифференциальными уравнениями второго порядка вида[1]:

$$
\begin{aligned}
x'' &= aq/p(1+x'^2+y'^2)^{1/2}(B_x x' y' - B_y(1+x'^2)+B_z y') = c\phi(x,y,z,x',y') \\
y'' &= aq/p(1+x'^2+y'^2)^{1/2}(B_x(1+y'^2)-B_y x' y' - B_z x') = cf(x,y,z,x',y')
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $a=0,2998$, $q=\pm1,\pm2,\ldots,$ - заряд частицы, $p$- ее импульс, $B_x,B_y,B_z$- компоненты вектора напряженности магнитного поля $\vec{B}$ в точке $(x,y,z)$, $x'=dx/dz$, $x''=d^2x/dz^2$, $C=aq/p$.

Решение прямой задачи - нахождение траектории движения частицы в магнитном поле с известным импульсом $p$- можно получить численным интегрированием методом Рунге-Кутта[2] при начальных условиях: $z_1$, $x_1=x(z_1)$, $y_1=y(z_1)$, $x'_1=x'(z_1)$, $y'_1=y'(z_1)$. (2)

На $(n+1)$-м шаге

$$
\begin{aligned}
z_{n+1} &= z_n+h=z_1+hn,\\
x_{n+1} &= x_n+x'h+1/6(m_1+m_2+m_3)h^2,\\
y_{n+1} &= y_n+y'_nh+1/6(k_1+k_2+k_3)h^2,\\
x'_{n+1} &= x'_n+1/6(m_1+2m_2+2m_3+m_4)h,\\
y'_{n+1} &= y'_n+1/6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)h,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $h=\Delta z$- шаг интегрирования,

$$
\begin{aligned}
m_1 &= C\phi_1(x_i,y_i,z_i,x'_i,y'_i), \quad k_1=cf_1(x_i,y_i,z_i,x'_i,y'_i),\\
m_2 &= c\phi_2(\chi_i,æ_i,\zeta_i,\chi'_i,æ'_i), \quad k_2=cf_2(\chi_i,æ_i,\zeta_i,\chi'_i,æ'_i),\\
m_3 &= c\phi_3(o_i,\omega_i,\zeta_i,o'_i,\omega'_i), \quad k_3=cf_3(o_i,\omega_i,\zeta_i,o'_i,\omega'_i),\\
m_4 &= c\phi_4(\gamma_i,\upsilon_i,\xi_i,\gamma'_i,\upsilon'_i), \quad k_4=cf_4(\gamma_i,\upsilon_i,\xi_i,\gamma'_i,\upsilon'_i),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\chi_i=\chi_i(x_i,\zeta_i,x'_i)=x_i+x'_i\tfrac{h}{2},\ \chi'_i=\chi'_i(x'_i,\zeta_i,m_1)=x'_i+m_1\tfrac{h}{2},\ \zeta_i=z_i+\tfrac{h}{2},\\
&æ_i=æ_i(y_i,\zeta_i,y'_i)=y_i+y'_i\tfrac{h}{2},\ æ'_i=æ'_i(y'_i,\zeta_i,k_1)=y'_i+k_1\tfrac{h}{2},\ \zeta_i=z_i+\tfrac{h}{2},\\
&o_i=o_i(x_i,\zeta_i,x'_i,m_1)=x_i+x'_i\tfrac{h}{2}+m_1\tfrac{h^2}{4},\ o'_i=o'_i(x'_i,\zeta_i,m_2)=x'_i+m_2\tfrac{h}{2},\ \zeta_i=z_i+\tfrac{h}{2},\\
&\omega_i=\omega_i(y_i,\zeta_i,y'_i,k_1)=y_i+y'_i\tfrac{h}{2}+k_1\tfrac{h^2}{4},\ \omega'_i=\omega'_i(y'_i,\zeta_i,k_2)=y'_i+k_2\tfrac{h}{2},\ \zeta_i=z_i+\tfrac{h}{2},\\
&\gamma_i=\gamma_i(x_i,\xi_i,x'_i,m_2)=x_i+x'_ih+m_2\tfrac{h^2}{2},\ \gamma'_i=\gamma'_i(x'_i,\xi_i,m_3)=x'_i+m_3h,\ \xi_i=z_i+h,\\
&\upsilon_i=\upsilon_i(y_i,\xi_i,y'_i,k_2)=y_i+y'_ih+k_2\tfrac{h^2}{2},\ \upsilon'_i=\upsilon'_i(y',\xi_i,k_3)=y'_i+k_3h,\ \xi_i=z_i+h.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Таким образом, при известных импульсе и карте магнитного поля траектория движения заряженной частицы представится набором $(x,y,z)$- координат $N$ точек.

Теперь решим обратную задачу: по известным $N$ точкам траектории движения и напряженности магнитного поля в этих точках восстановим импульс частицы. Попытаемся сделать это прямым способом: получить значения импульса частицы непосредственно из уравнения (1)

$$\begin{aligned} p_x &= aq/x''\phi(x,y,z,x',y') \text{ или} \\ p_y &= aq/y''f(x,y,z,x',y'), \\ p &= (p_x+p_y)/2. \end{aligned} \tag{6}$$

Для этого аппроксимируем кривую, описывающую траекторию движения частицы и состоящую из набора $\{X_i,Y_i,Z_i\}_{i=1}^{N}$- координат $N$ заданных точек, полиномами $n$-ой степени для XOZ- и YOZ- проекций, соответственно:

$$\begin{aligned} x(z) &= \sum_{k=0}^{n} a_{xk}z^k \\ y(z) &= \sum_{k=0}^{n} a_{yk}z^k, \text{ где } n\leqslant N. \end{aligned} \tag{7}$$

Далее все рассуждения будем проводить для одной из проекций, например, XOZ.

Итак, необходимо выбрать степень полинома такой, чтобы функция $x= x(z)$, описывающая X- проекцию таектории движения частицы, имела к ней близость не менее второго порядка в точках $Z_i$. Напомним, что кривые $x= x(z)$ и $\chi= \chi(z)$ близки в смысле близости к-го порядка в произвольной точке $z_i$, если модули $|x(z_i)- \chi(z_i)|, |x'(z_i)- \chi'(z_i)|,\ldots, |x^k(z_i)- \chi^k(z_i)|$- малы.

Из имеющихся в наличии данных (набор из $N$ $(X,Y,Z)$-координат точек) можно достичь лишь близости нулевого порядка при описании их полиномами порядка $n\leqslant N$, т.е. $|X_i- x(z_i)|< \varepsilon$, где $i= 1,\ldots,N$, $\varepsilon$- любое малое наперед заданное число. Близость первых $x'(z)$ и вторых $x''(z)$ производных в точках $Z_i$ к их истинным значениям непредсказуема. Как правило, наблюдаются сильные "биения" производных, т.е. отличие производных, вычисленных по апроксимирующей кривой, от их истинных значений.

Поэтому поступим следующим образом.

Выберем некоторый допустимый*) класс полиномов $\left\{\sum_{k=n_0}^{j} a_k z^k\right\}_{j=1}^{n}$, каждый из которых неким удовлетворительным образом описывает траекторию движения заряженной частицы в магнитном поле и применим к этому классу полиномов вариационный метод Ритца/3,4/.

*) Допустимый в смысле выбранных ограничений, таких как: удовлетворение граничным условиям, непрерывность, гладкость, близость заданного порядка и др.



Метод Ритца представляет собой один из методов минимизирующих последовательностей. Кратко суть его состоит в следующем*).

Идея метода заключается в том, что значения некоторого функционала $v[x(z)]$ рассматриваются не на произвольных допустимых кривых вариационной задачи, а лишь на всевозможных линейных комбинациях $x_n= \sum_{j=1}^{n} c_j W_j(z)$ с постоянными коэффициентами, составляемых из $n$ первых функций некоторой выбранной последовательности $W_1(z),W_2(z),\ldots,W_n(z),\ldots$. Функции $\{W_j(z)\}_{j=1}^{n}$ называются координатными, и от их выбора в значительной мере зависит успех применения метода. На указанных выше линейных комбинациях функционал $v[x(z)]$ превращается в функцию $\varphi(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ коэффициентов $c_j$. Коэффициенты $c_j$ выбираются так, чтобы функция $\varphi(c_j)$ достигала экстремума; следовательно, $c_j$ должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial c_j} = 0, \quad j= 1,2,\ldots,n . \tag{8}$$

Совершая предельный переход при $n\to\infty$ получим в случае существования предела функцию $x=\sum_{j=1}^{\infty} c_i W_j(z)$, являющуюся точным решением вариационной задачи. Ограничиваясь $n$ первыми членами $x_n=\sum_{j=1}^{n} c_j W_j(z)$, получим приближенное решение.

Приближенное значение минимума функционала $v[x(z)]$ будет найдено с избытком, так как минимум функционала на любых допустимых кривых не больше, чем минимум того же функционала на части этого класса допустимых кривых.

Решение системы уравнений (8) в общем случае является весьма сложной задачей, которая значительно упрощается, если на экстремум исследуется квадратичный относительно неизвестной функции и ее производных функционал $v$.

Перейдем к решению поставленной задачи. Итак, имеем набор $\{X_i\}_{i=1}^{N}$ из $N$ точек, являющихся X- проекцией траектории движения частицы, и начальные условия: $z_1$, $X_1= X(z_1)$, $X_1'= X'(z_1)$. (2′)

Выберем следующую последовательность координатных функций: $\left\{W_j(z_i)=\sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k\right\}_{j=n_0,\, i=1}^{n,\, N}$, $n_0\geqslant 2$, $n\leqslant N$. Такая величина $n_0$ выбрана потому, чтобы вторая производная $W_j''$ была бы отлична от нуля.

*) Излагается по Л.Э. Эльсгольцу/3/.

Составим из указанной последовательности функций линейные комбинации с постоянными коэффициентами вида:

$$x_i=\sum_{j=n_0}^{n} c_j W_j(z_i)=\sum_{j=n_0}^{n} c_j \sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k,\quad i=1,\dots,N,\quad n\leqslant N. \qquad (9)$$

При этом

$$\begin{aligned} x'_i&=\sum_{j=n_0}^{n} c_j W'_j(z_i)=\sum_{j=n_0}^{n} c_j \sum_{k=n_0}^{j} k a_{jk} z_i^{k-1},\\ x''_i&=\sum_{j=n_0}^{n} c_j W''_j(z_i)=\sum_{j=n_0}^{n} c_j \sum_{k=n_0}^{j} k(k-1) a_{jk} z^{k-2}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Постоянные коэффициенты $\{a_{jk}\}_{k=n_0}^{j}$ определяются из систем линейных уравнений:

$$\sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k = X_i,\quad j=n_0,\dots,n,\quad i=1,\dots,N,\quad n\leqslant N, \qquad (11)$$

образуемых в результате дифференцирования функционалов

$$\varkappa_j^2=\sum_{i=1}^{N}\Big(X_i-\sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k\Big)^2. \qquad (12)$$

Далее определим функционал

$$v[x(z)]=\sum_{i=1}^{N}\Big(X_i-\sum_{j=n_0}^{n} c_j \sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k\Big)^2 \qquad (13)$$

и дополнительно, в связи с наличием начальных условий (2′)

$$v[x'(z_1)]=\Big(X'_1-\sum_{j=n_0}^{n} c_j \sum_{k=n_0}^{j} k a_{jk} z_1^{k-1}\Big)^2. \qquad (14)$$

Выполнив дифференцирование выражений (13) и (14) по $\{c_j\}_{j=n_0}^{n}$ и приравняв результаты дифференцирования к нулю, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=n_0}^{n} c_j \sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k = X_i, \quad i=1,\dots,N\\ \sum_{j=n_0}^{n} c_j \sum_{k=n_0}^{j} k a_{jk} z_1^{k-1} = X'_1 \end{cases} \qquad (15)$$

Система переопределена, т.к. $n\leqslant N$ и, следовательно, $n-n_0<N+1$. Разрешая систему (15) относительно постоянных коэффициентов $\{c_j\}_{j=n_0}^{n}$ и подставляя полученные значения в (10), определим величины производных $x'_i$ и $x''_i$ в точках $z_i$. В свою очередь, подставляя $x'_i$ и $x''_i$ в (6), получим значения импульсов $p_{xi}$ и $p_{yi}$ в точках $z_i$. Усредняя полученные значения по точкам, в которых для величин $p_{xi}$ и $p_{yi}$ выполнены некоторые заданные условия (правила отбора), и определим решение уравнений (6) – величину импульса $p$.

Необходимо сделать следующее замечание. Точность определения величины импульса $p$ описанным выше способом может не удовлетворять требованиям эксперимента. Это связано с тем обстоятельством, что число определяемых постоянных коэффициентов $\{c_j\}_{j=n_0}^{n}$ ограничено количеством имеющихся экспериментальных данных- числом $N$, $n\leqslant N$ и их может недоставать для получения приближенного решения вариационной задачи, выраженной уравнениями (9)-(15), с заданной точностью.



В отдельных случаях удается повысить точность решения предложенной задачи использованием дополнительно других последовательностей координатных функций $\{W_l\}_{l=1}^{n}$.

Предлагаемый ниже метод решения вариационной задачи- аппроксимирование полиномами кривой, описываемой ограниченным числом даннных- назовем условно методом последовательных суперпозиций. Кратко суть его в следующем.

Выполним описанную выше процедуру по нахождению коэффициентов $\{c_j\}_{j=n_0}^{n}$. Теперь в качестве последовательности координатных функций выберем последовательность суть линейных комбинаций $\Big\{\mathfrak{W}_l(z_i)=\sum_{j=n_0}^{l} c_j W_j(z_i)=\sum_{j=n_0}^{l} c_j \sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k\Big\}_{l=n_0,\,i=1}^{n,\,N}$. Составим из них новые линейные комбинации с постоянными коэффициентами $\{c_l\}_{l=1}^{n}$ вида:

$$x_i=\sum_{l=n_0}^{n} c_l \mathfrak{W}_l(z_i)=\sum_{l=n_0}^{n} c_l \sum_{j=n_0}^{l} c_j \sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k,\quad i=1,\dots,N,\quad n\leqslant N, \qquad (16)$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} x'_i&=\sum_{l=n_0}^{n} c_l \mathfrak{W}'_l(z_i)=\sum_{l=n_0}^{n} c_l \sum_{j=n_0}^{l} c_j \sum_{k=n_0}^{j} k a_{jk} z_i^{k-1},\\ x''_i&=\sum_{l=n_0}^{n} c_l \mathfrak{W}''_l(z_i)=\sum_{l=n_0}^{n} c_l \sum_{j=n_0}^{l} c_j \sum_{k=n_0}^{j} k(k-1) z_i^{k-2}. \end{aligned} \qquad (17)$$

Тогда функционалы, подобные определенным в (13) и (14), будут представлены выражениями:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}[x(z)]&=\sum_{i=1}^{N}\Big(X_i-\sum_{l=n_0}^{n} c_l \sum_{j=n_0}^{l} c_j \sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k\Big)^2,\\ v[x'(z_1)]&=\Big(X'_1-\sum_{l=n_0}^{n} c_l \sum_{j=n_0}^{l} c_j \sum_{k=n_0}^{j} k a_{jk} z_1^{k-1}\Big)^2, \end{aligned} \qquad (18)$$

а соответствующая им система линейных уравнений-

$$\begin{cases} \sum_{l=n_0}^{n} c_l \sum_{j=n_0}^{l} c_j \sum_{k=n_0}^{j} a_{jk} z_i^k = X_i\\ \sum_{l=n_0}^{n} c_l \sum_{j=n_0}^{l} c_j \sum_{k=n_0}^{j} k a_{jk} z_1^{k-1} = X'_1. \end{cases} \qquad (19)$$

Далее способ определения импульса заряженной частицы аналогичен вышеописанному. Указанную процедуру можно производить $n\leqslant N$ число раз. Смысл этой процедуры состоит в том, что она как бы перераспределяет вклады ограниченного набора координатных функций в описание определенных точек интегральной кривой. Результат существенно зависит от вида интегральной кривой, количества заданных на ней точек, начальных условий.

Описанные выше методы были применены при восстановлении импульсов вторичных мюонов в интервале от 20 до 300 ГэВ/с в событиях $\mu^{\pm}p\to\mu^{\pm}+X$, смоделированных в условиях установки СТОРС[5]. Смоделированные треки заряженных мюонов имели длину 12-36 м и, соответственно, представлялись наборами от 7 до 19 "измеренных" точек, т.к. предполагается, что регистрирующие плоскости трековых детекторов в одном из вариантов будут установлены в объеме спектрометра с шагом 2 м.

Импульсы частиц восстанавливались с помощью формулы (6). Использовались следующие способы аппроксимирования интегральной кривой, описывающей траекторию движения частицы.

1. Аппроксимирование полиномом степени n, где величина n подобрана эмпирически и равна следующему значению:

$$n=\begin{cases} N-2, & N<10 \\ \frac{N}{2}+2, & N\geqslant 10 \end{cases}$$

2. Аппроксимирование траектории линейной комбинацией $x_i=\sum_{j=3}^{N} c_j W_{ji}$ с постоянными коэффициентами $c_j$, где $\left\{W_{ji}=\sum_{k=3}^{j} a_{jk} z_i^k\right\}_{j=3,\,i=1}^{N,\,N}$ последовательность полиномов с коэффициентами $\left\{a_{jk}\right\}_{k=3}^{j}$, определяемыми из систем линейных уравнений (11) (метод Ритца).
3. Повторное аппроксимирование интегральной кривой последовательностями (суперпозиция) линейных комбинаций (метод последовательных суперпозиций).

Для каждого смоделированного события вычислялись ошибки, обусловленные методом, применяемым для определения импульса частицы. Эти ошибки вычислялись в виде $\Delta p/p=(p_{mod.}-p_{rec.})/p_{mod.}$, где $p_{mod.}$ и $p_{rec.}$ - смоделированное и восстановленное значения импульса мюона, соответственно. Затем вычисленные значения погрешностей усреднялись на статистике нескольких сот событий и полученные распределения $\Delta p/p$ фитировались методом Гаусса. Для перечисленных выше способов восстановления импульса определены следующие значения относительных погрешностей, привносимых применяемым методом

| Метод | 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|---|
| $\Delta p/p$ % | 7.5 | 4.8 | 4.7 |



Как видно из таблицы метод 3. незначительно улучшает точность восстановления импульса. Однако более тщательный анализ распределений $\Delta p/p$ показывает, что применение метода линейных суперпозиций на 3-10% увеличивает точность восстановления импульсов в области больших погрешностей. При этом плохо реконструируемые события составляют менее 10% статистики и поэтому указанное повышение точности не столь заметно отражается на общем фоне распределения вычисляемых погрешностей.

Литература.

1. Виноградов В.Б. и др. ОИЯИ, Р1-83-390, Дубна, 1983.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике, Изд-во "Наука", М.,1977, с.708.
3. Эльсгольц А.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Изд-во "Наука", М., 1969.
4. Канторович Л.В. и Крылов И.И. Приближенные методы высшего анализа. Государственное изд-во физико-математической литературы, М., 1962.
5. Бонюшкина А.Ю. и др. ОИЯИ, Р10-92-370, Дубна, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 февраля 1993 года.