объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5-93-421

П.Е.Жидков[1], В.Ж.Сакбаев[2]

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Направлено в журнал «Дифференциальные уравнения»

[1]e-mail: ZHIDKOV@THEOR.JINRC.DUBNA.SU
[2]Московский физико-технический институт

1993

1. Введение

При изучении некоторых физических явлений возникает следующая краевая задача:

$$\Delta u = g(z)f(u) + h(z,u); \quad z \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (*)$$

где $u(z)$ - неизвестная вещественнозначная функция, Ω - некоторая область пространства R^N $(N \geq 1)$ с гладкой границей, а функции $f(u), g(z), h(z,u)$ вещественнозначны и достаточно гладкие. При этом предполагается, что $h(z,u)$ является в некотором смысле малой по сравнению с $f(u)$. В настоящей работе в дальнейшем считаем, что функция $f(u)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{|u|\to+\infty} \frac{f(u)}{u} = -\infty$, а функция $g(z)$ положительна в некоторой точке $z_0 \in \Omega$.

Задача (*) описывает стационарное распределение температуры в нелинейной неоднородной среде, в которой плотность источников тепла зависит от температуры. В этом случае функция $h(z,u)$ соответствует главной линейной части плотности источников тепла в среде при малых значениях температуры (например, $h(z,u) = c(z)u$), а функция $f(u)$ определяет поведение источников тепла при высоких температурах. Функция $g(z)$ выражает распределение источников тепла в среде. Подобные задачи возникают также в электростатике нелинейных сред и при исследовании нелинейных оптических волн в слоистых структурах [1]. В последнем случае нелинейная среда может как фокусировать, так и дефокусировать нелинейные оптические волны. Это выражается в том, что функция $g(z)$ может быть в этом случае знакопеременной.

Важные свойства задачи (*) с $g(z) = 1, \quad h(z,u) = 0$ были получены в [2], где в качестве Ω рассматривалась произвольная ограниченная область с гладкой границей. Одним из результатов работы является утверждение, что если область Ω содержит точку $z = 0$ и является звездной относительно нее, то задача (*) не имеет нетривиальных классических решений, если для функции $f(u)$ выполнено некоторое неравенство $(\frac{N-2}{2N}uf(u) - \int\limits_0^u f(s)ds < 0$ при $u \neq 0)$, из которого, в частности, следует, что если $f(u) = -|u|^{m-1}u$, то задача не имеет решений при выполнении условия:

$$m \geq \frac{N+2}{N-2} = m^*, \quad (N \geq 3). \qquad (p)$$

Результаты, утверждающие существование нетривиальных решений задачи (*) в случае, когда $g(z) \equiv 1, \quad h(z,u) \equiv 0$, а функция $f(u)$ нечетна и удовлетворяет определенным условиям, среди которых $f(u)sign(u) \to -\infty$ при $|u| \to \infty$ и $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u^{m^*}} = 0$, получены, например, в [3-7].

В ряде работ было установлено, что если правая часть $g(z)f(u) + h(z,u)$ есть функция только $|z|$ и u, а область Ω есть R^N, шар или сферический слой (т. е. $\Omega = \{r < x < R\}$, где $x = |z|$ и $0 < r < R < +\infty$), то при определенных предположениях о правой части задача (*) имеет решение $u(z)$, зависящее только от $|z|$, то есть $u(z) = y(x)$. Такие решения назовем радиальными. При этом в случае, если Ω есть сферический слой, $y(x)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$y'' + \frac{N-1}{x}y' = g(x)f(y) + h(x,y), \quad x \in (r,R), \qquad (1)$$

$$y(r) = y(R) = 0. \qquad (2)$$

А в случае, если Ω есть R^N (или шар $\{z: \ |z| < R\}$), $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1) на интервале $(0,R)$ (или $(0,+\infty)$) и граничным условиям

$$y(R) = y'(0) = 0 \quad (y(+\infty) = y'(0) = 0). \qquad (2')$$

Существование решения задачи (1), (2') в случае $\Omega = R^N$ было детально исследовано в [3] при предположениях $g \equiv 1$, $h \equiv 0$, $f(y) = y - |y|^{m-1}y$, где $m < m^*$. Для любого $l \geq 0$

доказано существование решения, имеющего на интервале $(0,+\infty)$ ровно l корней. Работы [6,8] дополняют результат работы [2] для функции $f(y)$ с другим качественным поведением. Теорема существования счетного числа решений при значительно более общих предположениях об f (но без указания на качественное поведение этих решений) доказана в [9] вариационным методом.

В настоящее время во многих работах изучаются задачи типа (*) в суперкритическом случае, то есть когда условие $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{g(z)f(u)+h(z,u)}{u^{m^*}}\equiv 0$ не выполнено. Например, этот случай исследовался в [10-14]. В работе С. И. Похожаева [14] для некоторого класса правых частей уравнения типа (1) установлено существование континуума радиальных решений задачи (*) в R^N $(N\geq 3)$. В [10-13] задача рассматривалась в сферическом слое при различных предположениях о поведении функций $g(z), f(y), h(z,y)$. Важной особенностью случая задачи в сферическом слое является тот факт, что если $g(x)f(y)+h(x,y)=-|y|^{m-1}y$, то нетривиальное решение задачи (1)-(2) существует и при $m\geq m^*$ [10-13].

В [11-13] изучаются радиальные решения задачи (*), то есть задача (1)-(2). В [11] проведено исследование существования и несуществования положительного радиального решения задачи, подобной (1)-(2), но с правой частью более общего вида $F(x,y)$. В [11] доказано существование положительного решения задачи (1)-(2) при некоторых предположениях на $F(x,y)$, одним из которых является неотрицательность $F(x,y)$ всюду на $[r,R]\otimes[0,+\infty)$. В [12] и [13] доказано существование положительного радиального решения для уравнения $\Delta y=g(|x|)f(y)$ в сферическом слое с различными краевыми условиями, включая также условие (2), при следующих требованиях на поведение $f(y)$: $f(0)=0$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{f(y)}{y}=$ $=-\infty$. В [12] считается также, что $g(x)>0$ на $[r,R]$, а в [13] - что функция $g(x)\geq 0$ на $[r,R]$ и отлична от тождественного нуля на любом конечном интервале.

Следует отметить, что задача (*) в сферическом слое или шаре при радиально-симметричных функциях $g(z), h(z,u)$,

т. е. при $g(z)=g(x)$ и $h(z,u)=h(x,u)$, может иметь и решения, не являющиеся радиальными, что доказывается в [4,5,10]. Произвольные решения задачи (*), в которой полагается $g(x)=1$ и $h(x,y)=0$, не обладающие радиальной симметрией, рассматривались для кольца в R^2 в [5] и для сферического слоя – в [4,10]. В этих работах было показано, что если Ω - сферический слой в $R^N (N\geq 2)$, то существуют различные положительные решения задачи (*), которые не являются радиально-симметричными. Число таких решений зависит от выбора внутреннего и внешнего радиусов сферического слоя. При этом в [4,5], в отличие от [10], рассматривались только функции $f(y)$, удовлетворяющие условию: $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{f(y)}{y^{m^*}}=0$.

В [15] доказано, что положительное решение задачи (1)-(2′) при $R=+\infty$; $h(x,y)=0$; $g(x)=1$ для $f(u)=u-|u|^{m-1}u$ единственно при всех $m\in(1,m^*)$.

Данная работа посвящена исследованию задачи (1)-(2) и имеет целью обобщить условия, приводимые в [11-13], достаточные для существования решения. В работе нет дополнительного предположения о поведении $f(y)$ при $y\to 0$. Доказывается существование счетного множества решений, среди которых могут быть и знакопеременные функции. В данной работе, как и в [11-13], указанное выше ограничение на скорость роста при $|u|\to\infty$ не налагается. В работе рассматриваются и знакопеременные $g(x)$.

Перейдем к формулировке основных результатов работы. Ниже приводятся основные предположения о $f(y), g(x), h(x,y)$, некоторые сочетания из которых будут использоваться в условиях формулируемых в данной статье теорем:

F1 : $f(y)\in C^1(-\infty,+\infty)$.

F2 : $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{f(y)}{y}=-\infty$.

F3 : *Существуют такие положительные* a, c_0, k, *что для любого* $y:|y|>a$ *выполнено условие* $\frac{1}{y}f(y)\leq -c_0|y|^k$.

G1 : *$g(x)$ имеет на $[r, R]$ конечное число корней $a_1, a_2, ..., a_N$ (быть может, равное нулю), причем $g'(a_i) \neq 0$ для любого $i = 1, ..., N$.*

G2 : $g(x) \in C^1[r, R]$.

G3 : *Существует $x_0 \in [r, R]$ такое, что $g(x_0) > 0$.*

H1 : *$h(x, y)$ непрерывно дифференцируема.*

H2 : $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{h(x,y)}{f(y)} = 0$ *равномерно по $x \in [r, R]$.*

H3 : *Существует положительная непрерывная функция $f_1(y)$ такая, что $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{f_1(y)}{f(y)} = 0$ и $|h'_x(x, y)| \leq f_1(y)$ при всех y и $x \in [r, R]$.*

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1

Пусть $g(x) > 0$ на $[r, R]$ и выполнены условия F1,F2,G2, H1-H3. Тогда существует $K_0 \geq 0$ такое, что для любого $l \geq K_0$ задача (1)-(2) имеет решение $y_l(x)$, имеющее на (r, R) ровно l корней. В случае, если выполнены дополнительные условия 1) $g(x)f(0) + h(x, 0) = 0$ и 2) $g(x)f'(0) + h'_y(x, 0) \geq 0$ при всех $x \in [r, R]$, то $K_0 = 0$, в частности, существует положительное решение.

Теорема 2

Если $h(x, y) \equiv 0$, а функции $f(y)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям F1,F3 и G1-G3, то существует счетное множество решений задачи (1)-(2).

В доказательстве этих теорем используются методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В дальнейшем через $c, C, C', C_1, A, B, ...$ будем обозначать положительные постоянные.

2.Доказательство теоремы 1

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$y(r) = 0, \quad y'(r) = s, \tag{3}$$

где $s \in R$ - параметр. Решение задачи Коши (РЗК), отвечающее значению параметра s, будем обозначать $y(s, x)$, а через $y'(s, x)$ - его производную по переменной x.

Введем функцию: $W(s, x) = (y'(s, x))^2 + g(x)U(y(s, x)) + H(x, y(s, x))$, где $U(y) = -2\int\limits_0^y f(q)dq$, $H(x, y) = -2\int\limits_0^y h(x, q)dq$. Переменную s иногда, для краткости, будем опускать. Из уравнения (1) следует тождество:

$$\frac{dW}{dx} = -2\frac{N-1}{x}y'^2 + g'(x)U(y) + H'_x(x, y). \tag{4}$$

Пусть $g_0 = \min\limits_{x\in[r,R]} g(x)$; $\quad G = \max\limits_{x\in[r,R]} g(x)$.

Лемма 1.

Для РЗК (1),(3) справедливы следующие утверждения:

1) Для любого $M_1 > 0$ существует W_1 такое, что $W(s, x) \geq M_1$ для любого $x \in [r, R]$, для которого решение определено, если $W(s, r) = s^2 \geq W_1$.

2) Для любого $W(s, r) = s^2$ существует M_2 такое, что $W(x) \leq M_2$ при всех $x \in [r, R]$, для которых решение определено.

Доказательство леммы 1:

Согласно условию H3 справедлива оценка: $|H'_x(x, y)| \leq 2|\int\limits_0^y f_1(q)dq|$. Используя свойства функции $f_1(y)$ из условия H3, получим, что для любого $\alpha > 0$ существует $d(\alpha)$ такое, что

$$|H'_x(x, y)| + |H(x, y)| < \alpha U(y) + d(\alpha), \tag{5}$$

при всех y и любых $x \in [r, R]$, при которых решение определено.

Тогда из тождества (4) следует неравенство :

$W'_x \geq -\frac{2(N-1)}{r}(y')^2 + g'(x)U(y) - \alpha U(y) - c(\alpha)$.

Положим $\alpha = 1$, тогда из последнего неравенства, учитывая условие (5), нетрудно показать, что существуют такие $B, b > 0$, что $W'_x \geq -BW - b$ на промежутке существования решения из отрезка $[r, R]$, что и приводит к утверждению 1) леммы 1. Утверждение 2) доказывается аналогично.

Лемма 1 доказана.

Замечание 1:

Воспользуемся условием (5), в котором положим $\alpha = \frac{\varpi}{2}$, тогда найдется d_1 такое, что $|H(x, y)| < \frac{\varpi}{2}U(y) + d_1$ для любых y и $x \in [r, R]$. Легко заметить, что $W \geq (y')^2 + \frac{\varpi}{2}U(y) - C$. Применяя здесь утверждение 2) леммы 1, получим, что при всех значениях s функции $y(s, x)$ и $y'(s, x)$ ограничены на всем интервале своего существования, лежащем на отрезке $[r, R]$. Поэтому, в силу теоремы существования РЗК, $y(s, x)$ продолжима на $[r, R]$ при любом s.

Замечание 2:

Пусть $g(x)$ удовлетворяет условиям G1,G2, $g(x) > 0$ на (a, b) и пусть $h(x, y) \equiv 0$. Рассмотрим РЗК $y(p, y_0, y'_0, x)$ для уравнения (1) с начальными условиями $y(p) = y_0$, $y'(p) = y'_0$ в некоторой точке $x = p$ отрезка $[a, b]$.

Пусть $W(p, y_0, y'_0, x) = (y'(p, y_0, y'_0, x))^2 + g(x)U(y(p, y_0, y'_0, x))$. Тогда для любых значений y_0 и y'_0 и любого $p \in [a, b]$ существует $C > 0$ такое, что $W(p, y_0, y'_0, x) < C$ при всех $x \in [a, b]$ и РЗК $y(p, y_0, y'_0, x)$ продолжимо на $[a, b]$.

Доказательство:

Если $p < b$, то согласно теореме о существовании РЗК при всех y_0 и y'_0 существует $d = d(p, y_0, y'_0) \in (p, b]$ такое, что $y(p, y_0, y'_0, x)$ продолжимо на $[p, d]$ и $g(d) > 0$. Пусть $M(p, y_0, y'_0, d) = \max\limits_{x \in [p,d]} W(p, y_0, y'_0, x)$.

Но на любом отрезке $[d, c] \in [d, b)$ $g(x) > 0$ и поэтому справедливо доказательство леммы 1, в соответствии с которой для любого $W(p, y_0, y'_0, d)$ можно выбрать $C_1(M, c)$ такое, что $W(p, y_0, y'_0, x) \leq C_1(M, c)$ для любого $x \in [p, c]$. Если $g(b) > 0$, то, положив $c = b$, докажем утверждение замечания для отрезка $[p, b]$, поэтому рассмотрим случай $g(b) = 0$.

В силу G1 можно выбрать $c < b$ так, что $g'(x) < 0$ на отрезке $[c, b]$. Тогда на $[c, b]$ верно неравенство: $\frac{dW}{dx} \leq -\frac{2(N-1)}{R}(y'(x))^2 + g'(x)U(y) \leq C_2$. Следовательно, существует такое $C^+(p, y_0, y'_0)$, что для любого $x \in [p, b]$ справедливо неравенство $W(p, y_0, y'_0, x) \leq C^+(p, y_0, y'_0)$. Подобное неравенство для отрезка $[a, p]$ можно доказать с помощью таких же рассуждений, сделав замену $x' = -x$. И, таким образом, в силу замечания 1, $y(p, y_0, y'_0, x)$ продолжима на $[a, b]$ при любых y_0, y'_0 и $p \in [a, b]$. Замечание 2 доказано.

Замечание 3:

Пусть выполнены все предположения замечания 2 и пусть $I \in R^2$ - некоторое ограниченное замкнутое множество. Тогда существует такое $B > 0$, что для любых $\{y_0, y'_0\} \in I$ $W(p, y_0, y'_0, x) \leq B$ для любых $x, p \in [a, b]$.

Предположим противное, т. е. что для любого $N > 0$ существуют $\{y_N, y'_N\} \in I$ и $x_N, p_N \in [a, b]$ такие, что $W(p_N, y_N, y'_N, x_N) > N$. Из последовательностей $\{y_N\}, \{y'_N\}$, $\{p_N\}$ и $\{x_N\}$ можно выделить подпоследовательности, которые сходятся к $y, y' \in I$ и $\bar{x}, \bar{p} \in [a, b]$ соответственно. В соответствии с замечанием 2 существует $C > 0$ такое, что $W(\bar{p}, y, y', x) < C$ для любых $x \in [a, b]$. Но тогда, согласно теореме о непрерывной зависимости, наше предположение не может быть справедливо. Полученное противоречие доказывает замечание 3.

Таким образом, для любых y_0, y'_0 РЗК $y(s, x)$ продолжимо на отрезок $[a, b]$.

Предложение 1

Для любого целого l существует $s > 0$ такое, что РЗК (1),(3) имеет на $[r, R]$ не менее l корней.

Доказательство:

Оценим расстояние между корнями $y(s, x)$. Фиксируем $y_0 > 0$ такое, что: 1) $U(y)$ монотонно возрастает при $|y| > y_0$ и $U(y_0) = \max\limits_{|y| \leq y_0} U(y)$; 2) $(U(y_0))^2 > d_1$, где d_1 - постоянная из замечания 1; 3) $|h(x, y)| < \frac{1}{2}|f(y)|g(x)$ при всех $y > y_0$ и $x \in [r, R]$.

Пусть $y_1 \geq y_0$ и пусть (c, b) - интервал , на котором

$y(s,x) > y_1$, $\quad y(c) = y(b) = y_1$. Положим $P(x) = -\frac{f(y)g(x)+h(x,y)}{y}$. Пусть $L = g_0 \min\limits_{|y|\geq y_1}(-\frac{f(y)}{y_1})$. $\quad L \to +\infty$ при $y_1 \to \infty$ согласно F2. Тогда из определения отрезка $[c,b]$ и выбора y_0 следует, что $P(x) \geq \frac{1}{2}L$ для любого $x \in [c,b]$.

Рассмотрим на отрезке $[c,b]$ функцию $u = y - y_1$, являющуюся решением задачи Коши :

$$u'' + \frac{N-1}{x}u' + P(x)u + y_1 P(x) = 0, \quad x \in [c,b],$$

$$u(c) = 0, u'(c) = j,$$

где $j > 0$ - параметр, и сравним ее с функцией z, являющейся решением задачи Коши :

$$z'' + \frac{N-1}{x}z' + \frac{1}{2}Lz = 0, \quad x \in [c,b],$$

$$z(c) = 0, z'(c) = j.$$

Применяя метод доказательства теоремы сравнения, можно показать, что если $z(b) = 0$, $z(x) > 0$ на (c,b), то $u(x)$ имеет корень на $[c,b]$. Это показывает, что величина интервала (c,b), на котором $y(x) > y_1$, не превосходит $T(y_1)$, причем $T(y_1) \to +0$ при $y_1 \to \infty$.

Аналогично оценивается и длина интервала, на котором $y(s,x) < -y_1$.

Интервалы, на которых $|y(s,x)| > y_1$, разделены отрезками, где справедливо неравенство $|y(s,x)| \leq y_1$, причем $|y(s,x)| = y_1$ в граничных точках.

Оценим теперь сверху величину произвольного отрезка, на котором $|y(s,x)| \leq y_1$. Положим $M_1 = qU(y_1) + U(y_1)^2$, где $q = \max\limits_{x\in[r,R]}|g(x)| + \frac{x_0}{2}$. Выберем s_{M_1} так, чтобы было выполнено неравенство 1 леммы 1 при $s \geq s_{M_1}$, и рассмотрим РЗК (1),(3) при $s \geq s_{M_1}$. Тогда на $[r,R]$ $W(s,x) > M_1$, следовательно, в силу выбора постоянных q, y_1, d_1 и замечания 1, $(y'(s,x))^2 \geq (U(y_1))^2 + U(y_1)q - U(y(s,x))g(x) -$

$-H(x,y(s,x)) > (U(y_1))^2 + q(U(y_1) - U(y(s,x))) - d_1 >$ $> (U(y_1))^2 - d_1$. Так как $|y'(s,x)| \geq ((U(y_1))^2 - d_1)^{\frac{1}{2}} > 0$, если $|y(s,x)| \leq y_1$, то все экстремумы $y(s,x)$ лежат в области $|y| > y_1$ в силу выбора s_{M_1}. Поэтому величина интервала, на котором $|y(x)| \leq y_1$, не превосходит

$$T_1 = \frac{y_1}{min(|y'(s,x)|)} = \frac{y_1}{((U(y_1))^2 - d_1)^{\frac{1}{2}}} \to 0$$

при $y_1 \to \infty$. Так как на этом отрезке РЗК $y(x)$ монотонно (ибо $|y'(s,x)| \geq ((U(y_1))^2 - d_1)^{\frac{1}{2}} > 0$) и $|y(s,x)| = y_1$ в граничных точках, то оно меняет знак и отрезок содержит единственный корень $y(s,x)$.

Пусть опять $s \geq s_{M_1}$. Если взять произвольный отрезок длиной $2(T+T_1)$ из $[r,R]$, то он содержит интервалы, на которых $y(s,x) > y_1$, и отрезки, на которых $y(s,x) \leq y_1$; причем эти промежутки чередуются друг с другом в силу непрерывности $y'(s,x)$. При любом расположении на рассматриваемом отрезке этих промежутков он содержит по крайней мере один такой отрезок, на котором $y(s,x) \leq y_1$. Следовательно, на произвольном отрезке длиной $2(T+T_1)$ лежит хотя бы один корень $y(s,x)$. Следовательно , для любого достаточно большого l существует s_l такое, что $y(s_l,x)$ имеет на $[r,R]$ не менее l корней.

Предложение 1 доказано .

Напомним, что корень x_1 называется кратным корнем функции $y(x)$, если $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, и простым, если это условие не выполнено.

<u>Лемма 2</u>:

Существует такое $s^* \geq 0$, что если $s \geq s^*$, то все корни $y(s,x)$ на $[r,R]$ простые.

<u>Доказательство</u>:

Действительно, в соответствии с неравенством 1) леммы 1 существует $s^* \geq 0$ такое, что $W(s,x) > 1$ на отрезке $[r,R]$ при всех $s \geq s^*$. Тогда, если x_1 - корень функции $y(s,x)$, то $(y'(s,x))^2 > 1$, что и доказывает лемму 2.

Лемма 3:

Пусть при некотором $s_1 \geq s^*$ РЗК $y(s_1, x)$ имеет l корней на $(r, R]$. Тогда существует такая малая окрестность точки s_1, что для всех s из этой окрестности функция $y(s, x)$ имеет либо $l-1$, либо l корней на (r, R), если $y(s_1, R) = 0$; и ровно l корней, если $y(s_1, R) \neq 0$.

Доказательство:

Ввиду того, что при $s > s^*$ все корни РЗК $y(s, x)$ на $[r, R]$ - простые, утверждение леммы легко получить из теоремы о непрерывной зависимости РЗК от начальных данных.

Пусть K_0 - число корней РЗК $y(s^*, x)$, лежащих на интервале $(r, R]$. (Быть может, $K_0 = 0$.) Обозначим через A_l множество значений параметра $s \geq s^*$, при которых функция $y_s(x)$ имеет не меньше $(l+1)$ корней на (r, R). Множество A_l ограничено снизу. Но в силу леммы 3 точка s^* не является предельной точкой множества A_l, если $l \geq K_0$. Поэтому $inf(A_l) = s_l^* > s^*$ при $l \geq K_0$.

Предложение 2

Для любого $l \geq K_0$ РЗК $y(s_l^*, x)$ является решением задачи (1)-(2) и имеет на (r, R) ровно l корней.

Доказательство:

В силу выбора s^* все корни $y(s_l^*, x)$ - простые, следовательно, для s_l^* справедливы утверждения леммы 3. Поэтому если число корней $y(s_l^*, x)$ на (r, R) меньше l, то $y(s, x)$ имеет не больше l корней при s, лежащих в некоторой малой правой полуокрестности s_l^*, т. е. s_l^* не является точной нижней гранью A_l. Если же число корней $y(s_l^*, x)$ на (r, R) больше l, то в силу леммы 3 $y(s, x)$ имеет не меньше $(l+1)$ корней при s из некоторой малой левой полуокрестности s_l^*, что противоречит условию $s_l^* = inf(A_l)$.

Значит, $y(s_l^*, x)$ имеет на (r, R) ровно l корней. Так как в любой правой полуокрестности s_l^* существует s такое, что $y(s, x)$ имеет на (r, R) не менее $(l+1)$ корней, то в силу леммы 3 $y(s_l^*, R) = 0$, иначе получилось бы противоречие.

Предложение 2 доказано.

Таким образом, доказано первое утверждение теоремы 1. Рассмотрим теперь случай, когда выполнены дополнительные условия 1) и 2) теоремы 1. Достаточно показать, что $K_0 = 0$.

Пусть функция $u(x)$ является решением задачи Коши, удовлетворяющим уравнению (1) и начальным данным, заданным в некоторой точке $x_0 \in (r, R)$: $u(x_0) = u'(x_0) = 0$. Тогда $u(x) \equiv 0$ на $[r, R]$ в силу теоремы единственности. Поэтому при любом $s \neq 0$ все корни РЗК $y(s, x)$ - простые.

Таким образом, все приведенные выше рассуждения останутся справедливы, если в качестве s^* взять любое положительное число, а в качестве K_0 - число корней РЗК (1),(3) на $(r, R]$ при $s = s^*$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что РЗК (1),(3) не имеют корней при всех достаточно малых $s > 0$, и выбрать $s^* > 0$ из таких s.

Рассмотрим функцию $v(y) = \min\limits_{x \in [r,R]} \left(\frac{g(x)f(y)+h(x,y)}{y}\right)$. Так как $f(y)$ и $h(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, то существует $\lim\limits_{y \to 0} v(y) = v_0 \geq 0$. В силу предположений теоремы 1 для любого $\epsilon > 0$ существует $t > 0$ такое, что если $|y| < t$, то $\frac{g(x)f(y)+h(x,y)}{y} \geq v_0 - \epsilon \geq -\epsilon$.

Согласно непрерывной зависимости РЗК (1),(3) от начальных данных существует $s_t > 0$ такое, что $|y(s, x)| < t$ на $[r, R]$ при $0 < s < s_t$. Рассмотрим задачу Коши (1),(3): $y'' + \frac{N-1}{x} y' = \left(\frac{g(x)f(y)+h(x,y)}{y}\right) y$; $y(r) = 0$; $y'(r) = s$ при $s \in (0, s_t)$. Сравним ее решение с решением следующей задачи: $y'' + \frac{N-1}{x} y' + \epsilon y = 0$; $y(r) = 0$; $y'(r) = s$. Можно легко показать,что при достаточно малых ϵ решение второй задачи не имеет корня на $[r, R]$ и тогда по теореме сравнения РЗК (1),(3) не имеет на $[r, R]$ корней при любых $s \in (0, s_t)$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Доказательство разобьем на ряд утверждений.

Лемма 4:

Если функция $|y(s,x)|$ ограничена на $[r,b]$, то и $|y'(s,x)|$ ограничена на этом отрезке.

Доказательство:

Сделаем замену аргумента: $t = t(x) = ln(x)$, если $N = 2$, и $t = t(x) = \frac{x^{2-N}}{2-N}$, если $N \neq 2$. Тогда функции $y(s,x)$ и $u(s,t) = y(s,x(t))$, $y'(s,x)$ и $u'(s,t) = x'(t)y'(s,x)$ (где $'$ означает дифференцирование функции по тому из аргументов x или t, от которого данная функция зависит) удовлетворяют следующим условиям:

а) $y'(s,x) = t'(x)u'(s,t)$, где $t'(x) > 0$ при любом N,

б) $u'' = g^*(t)f(u)$, $\quad t \in T([r,b]) = [t_r, t_b]$, где $T([r,b])$ - образ отрезка $[r,b]$ при отображении $t = t(x)$ ($t_r < t_b$, ибо $t'(x) > 0$ на $[r,b]$); $g^*(t) = (\frac{dt}{dx})^{-2}g(x(t))$, где $t \in T([r,b])$.

Заметим, что $y'(s,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $u'(s,t) = 0$. Поскольку $\frac{d}{dt}u'(t) = g^*(t)f(u)$ на $[t_r, t_b]$ и так как функция $u(t) = y(x(t))$ ограничена на $[t_r, t_b]$, то $u'(s,t)$ (а следовательно, и $y'(s,x)$) ограничена на отрезке $[t_r, t_b]$ ($[r,b]$).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5.

Пусть функция $y(s,x)$ непродолжима на $[r,R]$. Тогда существует $c \in [r,R]$ такое, что $y(s,x)$ имеет асимптоту $x = c$, причем либо $\lim_{x\to c-0} y(s,x) = -\infty$ и $\lim_{x\to c-0} y'(s,x) = -\infty$, либо $\lim_{x\to c-0} y(s,x) = +\infty$ и $\lim_{x\to c-0} y'(s,x) = +\infty$.

Доказательство:

Напомним, что $a_1, ..., a_n$ - корни функции $g(x)$.

Если для любого $c \in [r,R]$ функции $y(s,x)$ и $y'(s,x)$ ограничены на $[r,c)$, то $y(s,x)$ продолжима на $[r,R]$. Таким образом, если функция $y(s,x)$ непродолжима на отрезок $[r,R]$, то справедливо утверждение:

(А). Существует $c \in (r,R]$ такое, что $y(s,x)$ продолжима на $[r,c)$, и для любого $M > 0$ существует $x_M \in [r,c)$ такое, что $|y(s,x_M)| > M$ и $|y'(s,x_M)| > M$.

Если функция $y(s,x)$ продолжима до некоторой точки x_1, справа от которой $g(x) > 0$, то в соответствии с замечанием 2 $y(s,x)$ продолжима на $[r,a^*]$, где $a^* = min\{a_i : a_i > x_1\}$.

Поэтому $g(c) \leq 0$. Если $g(x) > 0$ слева от точки c, то условие (А) противоречит замечанию 2, согласно которому $y(s,x)$ продолжима на отрезок $[r,c]$. Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что $g(x) < 0$ на $[c-\delta, c)$.

Рассмотрим график функции $y(s,x)$ на $[c-\delta, c]$. В соответствии с утверждением (А) существуют такие $u_1 \geq |y_m|$ (где y_m есть наибольший по модулю корень функции $f(y)$) и $q \in (c-\delta, c)$, что либо $y(s,q) = u_1$ и $y'(s,q) > 0$, либо $y(s,q) = -u_1$ и $y'(s,q) < 0$. Пусть для определенности $y(s,q) = u_1 > 0$. Тогда в соответствии с принципом максимума $y(s,x)$ не может иметь максимума на промежутке $[q,c)$, следовательно, $y'(s,x) > 0$ на (q,c).

Следовательно, $y(s,x) \geq u_1$ для любого $x \in (q,c)$ и в силу условия (А) и монотонности РЗК на $[q,c)$ $\quad y(s,x) \to +\infty$ при $x \to c-0$. Следовательно, $g(x)f(y) > 0$ для любого $x \in [q,c)$. Сделаем замену, как и в лемме 4, и рассмотрим функцию $u(s,t) = y(s,x(t))$ на промежутке $[T(q), T(c))$. Тогда $u''(s,t) > 0$ на этом промежутке, $u'(s,T(q)) > 0$ и в силу условия (А) $u'(s,t) \to +\infty$ при $t \to T(c) - 0$. Таким образом, прямая $x = c$ есть асимптота РЗК $y(s,x)$.

Лемма 5 доказана.

Определим, при каких условиях $y(s,x)$ имеет асимптоту.

Предложение 3.

Пусть $[a,b] \in [r,R]$; $\quad g(x) < 0$ при $x \in (a,b)$. Пусть $y(a) = y_0$; $\quad y'(a) = y'_0 > 0$. Тогда найдется $Y > 0$ такое, что для любых $y'_0 \geq Y$ и $y_0 \geq 0$ существует $c \in (a,b]$ такое, что РЗК $y(x)$ для уравнения (1) с начальными условиями в точке $x = a$ удовлетворяет условию $\lim_{x\to c-0} y(x) \to +\infty$.

Доказательство :

В соответствии с условием $y'_0 > 0$ решение $y(x)$ либо имеет точку максимума на $[a,b]$, либо монотонно возрастает на всем промежутке, принадлежащем $[a,b]$, на котором решение определено. Последний промежуток может либо совпадать с $[a,b]$ (тогда $y(x)$ продолжимо на $[a,b]$ и достигает в точке $x = b$ максимального значения $y(b)$), либо существует $c \in (a,b]$ такое, что РЗК $y(x)$ продолжимо на $[a,c_1]$ для любого $c_1 < c$, и монотонно возрастающая непрерывная функция $y(x)$, в соответствии с леммой 5, удовлетворяет условию: $\lim\limits_{x \to c-0} y(x) = +\infty$.

Для доказательства предложения остается показать, что при достаточно больших значениях $y'(a)$ РЗК $y(x)$

1) не может иметь максимум на отрезке $[a, b]$;

2) не является продолжимой на $[a, b]$ функцией, достигающей в точке $x = b$ максимального значения.

1) Для этой цели сделаем замену аргумента так же, как и в лемме 4, и покажем, что условия 1) и 2) на отрезке $[t_a, t_b]$ выполнены для функции $u(t)$. Заметим, что $y'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $u'(t) = 0$. Предположим, что для любого $Y > 0$ существуют $y'_0 > Y$ и $y_0 \geq 0$ такие, что $y(x)$ имеет максимум на $[a, b]$. Пусть $q \in [t_a, t_b]$ есть наименьший экстремум функции $u(t)$ на отрезке $[t_a, t_b]$. Тогда $u(t) > 0$ на $[t_a, q]$, поэтому $f(u(t)) \leq \max\limits_{y>0} f(y)$ на этом отрезке. Поэтому в соответствии с уравнением $u'' = g^*(t) f(u(t))$ существует $c_1 > 0$ такое, что $u'' \geq -c_1$ на $[t_a, q]$. Следовательно, если $u'(t_a) \geq c_1(t_b - t_a) = u'_1$, то $u'(q) > 0$. Полученное противоречие доказывает, что существует $Y_1 > 0$ такое, что при всех $y_0 \geq 0$ и $y'_0 \geq Y_1$ $\quad y'(x) > 0$ на $[a, b]$.

2) Предположим противное, т. е. что для любого $N > Y_1$ существуют такие $y'_0(N) > N; y_0(N) > 0$ и M, что $|y(x)| \leq M$ для любого $x \in [a, b]$.

Фиксируем некоторое $\tau \in (t_a, t_b)$. Из рассуждений пункта 1) легко видеть, что найдется такое $y'_1 \geq Y_1$, что для любых $y'_0 > y'_1$ и $y_0 > 0$ $\quad u(t)$, монотонно возрастая, достигает значения $u(\tau) > 0$ в точке $t = \tau$ и, кроме того, $u'(\tau) > \frac{u'(t_a)}{2}$. На отрезке $[\tau, \frac{tau+t_b}{2}]$ $\quad g^*(t) < 0$, пусть $\alpha = \max\limits_{t \in [\tau, \frac{\tau+t_b}{2}]} g^*(t) < 0$. Так как $u'(t_a) > 0$, то из монотонности $u(t)$ на $[t_a, t_b]$ и F3 следует, что если $u(t)$ продолжима на $[t_a, t_b]$, то $\frac{d}{dt}(u'(t))^2 = = g^*(t) f(u) u'(t) \geq (|\alpha| c_1 u^{1+k} - c_2) u'(t)$ на $[\tau, \frac{\tau+t_b}{2}]$, откуда получаем: $u'(t)^2 \geq u'(\tau)^2 + C_1(u^{2+k} - u(\tau)^{2+k}) - C_2$, где C_1, C_2 не зависят от y_0 и y'_0. Так как $u'(t) \geq 0$ при всех $t \in [t_a, t_b]$, то $\frac{du}{dt} \geq [u'(\tau)^2 + C_1(u - u(\tau))^{2+k} - C_2]^{\frac{1}{2}} = Q(u - u(\tau), u'(t_a))$, на

отрезке $[\tau, \frac{\tau+t_b}{2}]$. Следовательно, $dt \leq \frac{du}{Q(u-u(\tau), u'(t_a))}$.

Легко заметить, что существует $U > y'_1 a^{1-N}$ такое, что при всех $u'(t_a) > U$ $\int\limits_{u(\tau)}^{y(b)} [Q(u - u(\tau), u'(t_a))]^{-1} du < \frac{t_b - \tau}{2}$ для любых $y(b) \geq u(\tau) \geq 0$. Следовательно, если монотонная функция $u(t)$ ограниченна на отрезке $[t_a, t_b]$, то при $u'(t_a) > U$ длина этого отрезка не превосходит $\frac{t_b+\tau}{2} - t_a$.

Таким образом, если $y_0 \geq 0$, а $y'_0 > Y = \frac{U}{t'(a)}$, то РЗК $y(x)$ не может быть ограниченной на $[a, b]$ функцией, что противоречит нашему предположению.

Предложение 3 доказано.

Введем следующие определения. Пусть $y(s, x) \in \Omega^{\pm}(c)$, если $\lim\limits_{x \to c-0} y(s, x) = \pm\infty$, $\quad \Omega^{\pm} = \bigcup\limits_{c \in [r, R]} \Omega^{\pm}(c)$.

<u>Лемма 6</u>:

Пусть при $s = s_1$ функция $y(s_1, x) \in \Omega^{\pm}(x_1)$, $x_1 \in [r, R]$. Тогда существует $a > 0$ такое, что для любого s: $\quad |s - s_1| \leq \leq a$ функция $y(s, x)$ либо продолжима на $[r, x_1]$ и монотонно возрастает в некоторой левой полуокрестности x_1, либо существует $c \in (r, x_1]$ такое, что $y(s, x) \in \Omega^{\pm}(c)$.

<u>Доказательство</u>:

Пусть, для определенности, $y(s_1, x) \in \Omega^{+}(x_1)$. В соответствии с леммой 5 $y(s, x)$ либо продолжима на $[r, x_1]$, либо имеет вертикальную асимптоту $x = c$; $c \in (r, x_1]$.

Как было показано в доказательстве леммы 5, существует $x_2 < x_1$ такое, что $g(x) < 0$ при $x \in (x_2, x_1)$. Кроме того, в силу леммы 5, для любого $Y > 0$ существует $x^* \in (x_2, x_1)$ такое, что $y(s_1, x) > 2|y_m|$ и $y'(s_1, x) > 2Y > 0$ при $x \in (x^*, x_1)$. Тогда в соответствии с теоремой о непрерывной зависимости РЗК от начальных данных существует $a > 0$ такое, что для любого s, такого, что $|s - s^*| < a$, функция $y(s, x)$ продолжима на $[r, x^*]$ и $y(s, x^*) > |y_m|$,
$y'(s, x^*) > Y > 0$. Следовательно, в соответствии с принципом максимума, $y(s, x)$ при $s \in (s_1 - a, s_1 + a)$ монотонно не убывает на всем интервале своего существования, лежащем на отрезке $[x^*, x_1]$, что и доказывает лемму 6.

Замечание 4:

Сделаем замену переменных из леммы 4. Как видно из доказательства леммы 6 и уравнения $u'' = g^*(t)f(u)$, для любого $Y > 0$ существуют $\delta > 0$ такое, что если при некотором $s \in (s_1 - \delta, s_1 + \delta)$ $y(s,x)$ продолжимо на $[r, x_1]$, то $y(s, x_1) > |y_m|$ и $y'(s, x_1) > Y$.

Обозначим через $A^{\pm}$ множество значений параметра s, при которых $y(s,x) \in \Omega^{\pm}$.

Предложение 4:

Множества A^- и A^+ не пустые.

Доказательство:

1). Рассмотрим случай, когда $g(x) > 0$ на (r, a_1). (Напомним, что $\{a_1, ..., a_n\} \in (r, R)$ - корни функции $g(x)$).

Исследуем задачу Коши для уравнения(1)с начальными условиями в точке $x = a_1$:

$$y(a_1) = |y_m|, \quad y'(a_1) = M > 0 \tag{6}$$

на промежутке $[r, a_2)$ (или $[r, R]$, если $n = 1$). Согласно предложению 3 существует M^* такое, что для любого $M > M^*$ $y_M(x) \in \Omega^+(c)$, где $c \in (a_1, a_2]$ (или $c \in (a_1, R]$, если $n = 1$), а $y_M(x)$ есть решение задачи Коши (1),(6).

На отрезке $[r, a_1]$ для функции $y_M(x)$ справедливо замечание 2: для любого $M > 0$ РЗК $y_M(x)$ продолжимо на $[r, a_1]$ и существует $C(M)$ такое, что при всех $x \in [r, a_1]$ $W_M(x) < C(M)$, где $W_M(x) = (y'_M(x))^2 + g(x)U(y_M(x))$.

Существует $M_0 > 0$ такое, что для любого $M \geq M_0$ $W_M(x) > 0$ при всех $x \in [r, a_1]$. Действительно, предположим противное, т. е. что существуют такие последовательности $M_k \to +\infty$ и $x_k \in [r, a_1]$, что $W_{M_k}(x_k) \leq 0$. Но если $W_{M_k}(x_k) \leq 0$, то согласно замечанию 3 для всех k существует $C_0 > 0$ такое, что $W_{M_k}(x) < C_0$ при всех $x \in [r, a_1]$, что противоречит предположению.

Таким образом, в соответствии с леммой 2, все корни $y_M(x)$ на $[r, a_1]$ простые, если $M \geq M_0$. Рассмотрим множество значений $M \geq max\{M^*, M_0\} = M_1$. Пусть $y_{M_1}(x)$ имеет l_0 корней на (r, a_1). Тогда, как это было доказано в

теореме 1, для любого $l > l_0$ существует $M_l > M_1$ - точная нижняя грань значений параметра M, при которых $y_M(x)$ имеет на $(r, a_1]$ не менее $l + 1$ корней. Как было доказано, $y_{M_l}(r) = 0$. Таким образом, A^+ не пустое.

Аналогично доказывается, что множество A^- не пустое.

Для случая 1 предложение 4 доказано.

2). В случае $g(x) < 0$ на (r, a_1) утверждение предложения 4 следует из предложения 3.

Предложение 4 доказано.

Итак, пусть $s_1 \in A^-$, $s_2 \in A^+$ и для определенности $s_1 < s_2$. В силу леммы 6 s_1 не является предельной точкой A^+. Тогда множество $B = (s : s \in A^+; s > s_1)$ не пустое и ограниченно снизу, причем $s^* = inf B > s_1$.

Рассмотрим теперь две возможности поведения функции $g(x)$:

а) $g(x) > 0$ в левой полуокрестности точки R,

б) $g(x) < 0$ в левой полуокрестности точки R.

Исследуем сначала случай а).

Лемма 7:

Пусть x_R - последний корень функции $g(x)$ на (r, R). Тогда $y(s^*, x) \in \Omega^+(x_R)$.

Доказательство:

1) Докажем, что $y(s^*, x)$ имеет асимптоту на отрезке $[r, x_R]$. Предположим противное; тогда согласно лемме 5 и замечанию 2 $y(s^*, x)$ продолжима на $[r, x_R]$ и, следовательно, на $[r, R]$. Тогда утверждение о том, что $s^* = inf B$, противоречит теореме о непрерывной зависимости РЗК. (Так как близкие решения также продолжимы на отрезок $[r, R]$.) Следовательно, $y(s^*, x)$ имеет асимптоту $x = c$, причем $g(x) < 0$ слева от c, $g(c) \leq 0$.

2) Согласно определению s^* и лемме 6 $y(s^*, x) \in \Omega^+(c)$. Докажем, что $c = x_R$.

Действительно, пусть $g(c) < 0$. Согласно лемме 6 существует $a > 0$ такое, что если $s \in (s^* - a, s^*)$, то либо $y(s, x) \in \Omega^+(c_1)$, где $c_1 \leq c$, либо $y(s, x)$ продолжима на $[r, c]$. Согласно замечанию 4 найдется такое $b \in (0, a)$, что если

$s \in (s^* - b, s^*)$ и $y(s,x)$ продолжимо на $[r,c]$, то в точке c и ее правой полуокрестности для РЗК $y(s,x)$ выполнены условия предложения 3 и $y(s^*,x) \in \Omega^+$. Таким образом, если $g(c) < 0$, то s^* не является точной нижней гранью множества B. Следовательно, $g(c) = 0$.

3) Если $c < x_R$, то существует $c_1 \in (c, x_R)$ такое, что $g(x) > 0$ на (c, c_1) и $g(x) < 0$ справа от точки c_1. В силу леммы 6 и определения точной нижней грани РЗК $y(s,x)$ продолжимо на отрезок $[r, c_1]$ при s из достаточно малой левой полуокрестности s^*, и, кроме того, при $s \to s^* - 0$ $y(s,c) \to +\infty$ и $y'(s,c) \to +\infty$ в силу замечания 4. Поэтому, повторяя на отрезке $[c, x_R]$ рассуждения из предложения 4, приходим к выводу, что существует $s \in (s_1, s^*)$ такое, что $y(s,x) \in \Omega^+$, а это противоречит утверждению $s^* = inf(B)$.

Таким образом, $c = x_R$ и лемма 7 доказана.

Итак, $y(s^*,x) \in \Omega^+(x_R)$. В силу леммы 6 и определения точной нижней грани существует $a > 0$ такое, что для любого s: $s \in (s^* - a, s^*)$ РЗК $y(s,x)$ продолжимо на $[r,R]$.

<u>Лемма 8</u>.

Пусть $g(x) > 0$ на (a,b). Тогда существует такое W_0, что если $W(s,a) > W_0$, то все корни $y(s,x)$ на $[a,b]$ простые.

<u>Доказательство:</u>

Предположим противное, т. е. что существует последовательность $W(s_k, a) \to \infty$ таких, что при всех k РЗК $y(s_k, x)$ имеет кратный корень $x_k \in [a,b]$. Тогда $W(s_k, x_k) = 0$. Следовательно, в силу замечания 3, существует $C_1 > 0$ такое, что $W(s_k, a) < C_1$, и получили противоречие.

Лемма 8 доказана.

Рассмотрим $s \in (s^* - a, s^*)$. В соответствии с леммой 8 и замечанием 4 существует $s_0 \in (s^* - a, s^*)$ такое, что для любого $s \in [s_0, s^*)$ выполнены условия: 1) $y(s, x_R) > 0$; 2) все корни $y(s,x)$ на $[x_R, R]$ простые.

Обозначим через L_0 число корней $y(s_0, x)$ на интервале $[x_R, R)$. Методом, примененным в предложении 2, воспользовавшись выбором s_0, нетрудно показать, что для любого $l > L_0$ существует $s_l \in (s_0, s^*)$ такое, что $y(s_l, x)$ имеет на (x_R, R) ровно l простых корней и $y(s_l, R) = 0$. (s_l есть точная нижняя грань множества значений $s \in (s_0, s^*)$, при которых РЗК $y(s,x)$ имеет на (x_R, R) не менее $l+1$ корней), причем $y'(s_l, R) \to (-1)^{l-1}\infty$ при $l \to \infty$, иначе получили бы противоречие с замечанием 3. Таким образом, задача (1)-(2) имеет счетное множество решений, различных по числу корней на интервале (x_R, R).

Исследуем теперь случай б). Пусть x'_R и x_R - предпоследний и последний корни функции $g(x)$. Тогда в соответствии с утверждениями пункта а) и предложением 3 существуют такие s^*, $L > 0$, $s_L < s^*$, что при всех $s \in [s_L, s^*)$ РЗК $y(s,x)$ продолжимо на $[r, x_R]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1*) для любого целого $l > L$ существует единственное $s_l \in (s_L, s^*)$ такое, что $y(s_l, x)$ имеет на $[x'_R, x_R)$ ровно l простых корней и $y(s_l, x_R) = 0$,

2*) при всех l $y(s_l, x'_R) > 0$ и $(y'(s_l, x_R))^2 \to +\infty$ при $l \to \infty$;

3*) $y(s_l, x) \in \Omega^{(-1)^{l-1}}$.

Пусть $l \geq L+2$ и пусть T_l есть множество значений параметра $s \in [s_{l-1}, s_l]$, при которых либо существует такое $c \in (x_R, R]$, что $y(s,x) \in \Omega^{(-1)^{l-1}}(c)$,либо $y(s,x)$ продолжима на $[r,R]$ и $sign(y(s,R)) = (-1)^{l-1}$. T_l не пустое в силу 2*) и леммы 6; точка s_{l-1} не является предельной точкой T_l. Поэтому существует $s_l^* = inf(T_l) \in (s_{l-1}, s_l)$. В силу определения s_l^* и леммы 6 $y(s_l^*, x)$ продолжима на отрезок $[r,R]$. Если $sign(y(s_l^*, R)) = (-1)^{l-1}$, то в соответствии с теоремой о непрерывной зависимости существуют $s \in (s_{l-1}, s_l^*)$ такие, что $sign(y(s,R)) = (-1)^{l-1}$. Аналогично, если $sign(y(s_l^*, R)) = (-1)^l$, то существуют $s \in (s_l^*, s_l)$ такие, что $sign(y(s,R)) = (-1)^l$. И в том и в другом случае s_l^* не может быть точной нижней гранью T_l. Следовательно, $y(s_l^*, R) = 0$.

Таким образом, $y(s_l^*, x)$ при любом $l > L+1$ является решением задачи (1)-(2). Очевидно, что все значения s_l при $l = L+2, L+3, \ldots$ попарно различны. Теорема 2 доказана.

Один из авторов (В.С.) выражает благодарность Т.В. Филипповой за участие в обсуждении работы.

Литература

1. Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К.// ЭЧАЯ, 1989, т. 20, вып.1, с. 198-253.
2. Похожаев С.И.// ДАН СССР, 1965, т. 165, N1, с. 36-39.
3. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л.// В сб.: Современные проблемы математики, т. 30, М.: ВИНИТИ, 1987, с. 105-201.
4. Bresis H.// Commun. Pure Appl. Math., 1983, v. 36, p. 437.
5. Goffman C.V.// J. Differ. Equat., 1984, v. 54, N. 3, p. 429-437.
6. Жидков П.Е., Сакбаев В.Ж. Об одном обыкновенном дифференциальном уравнении// Препр. ОИЯИ Р5-92-306, Дубна, 1992.
7. Похожаев С.И.// Труды МИАН, 1990, т. 192, с. 146-163.
8. Жидков Е.П., Жидков П.Е.// Сообщ. ОИЯИ Р5-12609, Р5-12610, Дубна, 1979.
9. Berestycki H., Lions P.L.// C. R. Acad. Sci., 1979, v. AB 288, p. 396-398.
10. Song-Sun Lin.// Trans. Amer. Math. Soc., 1992, v. 332, N. 2, p.775-793.
11. Santanilla J.// Nonlinear Anal.: Theory, Meth. Appl., 1991, v. 16, p. 861-879.
12. Bandle C., Goffman C.V., Marcus M.// J. Differ. Equat., 1987, v. 69, N. 3, p. 322-345.
13. Song-Sun Lin.// J. Differ. Equat., 1989, v. 81, N. 2, p. 221-233.
14. Похожаев С.И.// Математический сборник, 1991, т.182, N. 1, с.467-480.
15. Kwong M.K.// Arch. Rational Mech. Anal., 1989, v. 105, N. 3, p. 243-266.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 ноября 1993 года.

Жидков П.Е., Сакбаев В.Ж. Р5-93-421

О существовании счетного множества решений некоторой нелинейной краевой задачи

Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, к которому сводится задача в сферическом слое для сферически симметричных решений нелинейного эллиптического уравнения. Методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказано существование счетного множества различных решений. В отличие от случая задачи Дирихле для суперлинейного эллиптического уравнения в звездной области, в теореме существования отсутствуют ограничения на скорость роста нелинейности, входящей в уравнение.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1993

Перевод авторов

Zhidkov P.E., Sakbaev V.Zh. P5-93-421

On the Existence of a Countable Set of Solutions of a Nonlinear Boundary Value Problem

The problem under consideration is a nonlinear ordinary differential equation of the second order for radial solutions of a nonlinear elliptic equation of the second order in the spherical layer. By using the methods of the qualitative theory of ordinary differential equations, a countable set of different solutions is proved to exist. In contrast to the case of the Dirichlet problem for the superlinear elliptic equation in the star-shaped domain, there are no limitations on the growth of nonlinearity in the equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.