93-284

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-93-284

М.А.Назаренко[1]

О ВОЗМОЖНОСТИ СОВПАДЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ И РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ В ПРОСТРАНСТВЕ $H_2(D)$

[1]Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

1993

Пространство $H_2(\mathcal{D})$ образовано аналитическими в круге $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$ функциями, имеющими почти всюду на границе $\partial\mathcal{D} = \{z : |z| = 1\}$ предельные значения по некасательным путям, с конечной нормой $\|\cdot\|$, порожденной скалярным произведением

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)\overline{g(z)}|dz| = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(z)\overline{g(z)}}{z}dz.$$

Известно, что полиномы z^j при целых неотрицательных j образуют ортонормированный базис в пространстве $H_2(\mathcal{D})$, и для каждого элемента $f \in H_2(\mathcal{D})$ выполнено равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2, \quad \text{где} \quad f_j = (f, z^j) = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$$

— коэффициенты степенного ряда $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$, сходящегося при $z \in \mathcal{D}$.

Наименьшее уклонение исследуемой функции $f \in H_2(\mathcal{D})$ от линейных функций $az + b$ обозначим символом $\mathbf{e}(f)$, причем имеет место равенство

$$\mathbf{e}^2(f) = \sum_{j=2}^{\infty} |f_j|^2.$$

Будем обозначать $\mathbf{r}(f)$ величину наилучшего приближения $f \in H_2(\mathcal{D})$ посредством дробно-линейных функций $(az+b)/(\alpha z+\beta)$, принадлежащих пространству $H_2(\mathcal{D})$.

Теорема. *Пусть функция $f \in H_2(\mathcal{D})$, причем*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j z^j,$$

и при $c \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$ выполнено соотношение

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j \overline{c}^j (1 - j + j|c|^2) \neq 0, \tag{1}$$

тогда $\mathbf{e}(f) = \mathbf{r}(f)$.

Для доказательства теоремы нам потребуется следущая

Лемма. *Если $f \in H_2(\mathcal{D})$, то функцию $(1-|z|)\cdot|f(z)|^2$ можно по непрерывности доопределить нулем в любой точке $\partial\mathcal{D}$.*

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $g = f^2$, принадлежащую пространству Харди $H_1(\mathcal{D})$. Поэтому для любой точки $z \in \mathcal{D}$ справедлива интегральная формула Коши (см. [1])

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{2}$$

Фиксируем точку $e^{i\theta} \in \partial\mathcal{D}$ и число $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует дуга $\gamma \subset \partial\mathcal{D}$ с центром в точке $e^{i\theta}$ такая, что

$$\int_\gamma |g(\zeta)|\cdot|d\zeta| < \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть длина дуги γ равна $4\delta > 0$, $\Delta = \partial\mathcal{D}\backslash\gamma$ и $z = re^{i\varphi}$. При $|\theta - \varphi| < \delta$ и $\zeta = e^{it} \in \Delta$ справедливо неравенство $|\varphi - t| \geq \delta$, поэтому

$$|\zeta - z| = \sqrt{1 - 2r\cos(\varphi - t) + r^2} \geq \sqrt{1 - 2r\cos\delta + r^2} \geq \sin\delta,$$

что не сложно получить, используя теорему косинусов для треугольника со сторонами 1 и r, углом между ними δ и определение синуса; следовательно

$$\left|\int_\Delta \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right| \leq \int_\Delta \frac{|g(\zeta)|}{|\zeta - z|}|d\zeta| \leq \frac{1}{\sin\delta}\int_{\partial\mathcal{D}}|g(\zeta)|\cdot|d\zeta|.$$

Отсюда и из (2) имеем

$$(1 - |z|)\cdot|g(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_\delta |g(\zeta)|\cdot|d\zeta| + \frac{1-r}{\sin\delta}\int_{\partial\mathcal{D}}|g(\zeta)|\cdot|d\zeta|\right).$$

Значит, учитывая (3), при $|\theta - \varphi| < \delta$ и $r = |z|$ достаточно близких к единице, получаем $(1 - |z|)|f(z)|^2 < \varepsilon$, что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы. При каждом $c \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$ рассмотрим приближение элемента $f \in H_2(\mathcal{D})$ подпространством, образованным рациональными функциями первой степени с фиксированным знаменателем $Q(z) = 1 - cz$. Дробно-линейную функцию, осуществляющую наилучшее приближение, для удобства записи будем обозначать то через $r(z)$, то как $(p + qz)/(1 - cz)$. Определим коэффициенты p и q из свойств функции $r(z)$ (см. [2]):

$$f(0) = r(0), \qquad f(\overline{c}) = r(\overline{c}).$$

Так как $f(0) = 0$, то $p = 0$ в силу первого уравнения. Соотношение для другого коэффициента

$$q = (1 - |c|^2)\frac{f(\overline{c})}{\overline{c}} \tag{4}$$

следует из второго равенства. Найдем значение функции $F(c) = (f - r, f - r)$ — квадрата величины уклонения данного элемента f от рассматриваемого подпространства дробно-линейных отображений. Воспользовавшись ортогональностью $f - r$ к этому подпространству, будем иметь соотношение

$$F(c) = (f, f - r) = ||f||^2 - \overline{q}\cdot\left(f, \frac{z}{1 - cz}\right).$$

Поскольку, в силу определения скалярного произведения, можно получить следующую цепочку равенств

$$\left(f, \frac{z}{1 - cz}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)\frac{\overline{z}}{1 - \overline{cz}}\cdot\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}}\frac{f(z)}{z}\cdot\frac{dz}{z - \overline{c}} = \frac{f(\overline{c})}{\overline{c}},$$

то получаем явную зависимость величины $F(c)$ от значения параметра $c \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$:

$$F(c) = ||f||^2 - \frac{1 - |c|^2}{|c|^2}|f(\overline{c})|^2. \tag{5}$$

В силу введенного определения $\mathbf{r}(f) = \inf F(c)$, нас интересуют точки минимума функции F. Они находятся среди стационарных точек этой функции, которые в свою очередь удовлетворяют следующему уравнению

$$dF(c) \equiv \frac{\partial F(c)}{\partial c}dc + \frac{\partial F(c)}{\partial \overline{c}}d\overline{c} = 0.$$

Не сложно видеть, что

$$\overline{\left(\frac{\partial F(c)}{\partial c}\right)} = \frac{\partial F(c)}{\partial \overline{c}} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_j\overline{f}_k\overline{c}^{j-2}c^{k-1}(1 - j + j|c|^2) =$$

$$= \frac{1}{|c|^2\overline{c}}\sum_{k=1}^{\infty}\overline{f}_k c^k\sum_{j=1}^{\infty} f_j\overline{c}^j(1 - j + j|c|^2) =$$

$$= \frac{1}{|c|^2\overline{c}}\overline{f(\overline{c})}\sum_{j=1}^{\infty} f_j\overline{c}^j(1-j+j|c|^2).$$

В тех точках $c \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, где $f(\overline{c}) = 0$, из равенства (5) получаем $F(c) = \|f\|^2 \geq \mathrm{e}^2(f)$. Функция F по непрерывности может быть доопределена при $c = 0$ значением $F(0) = \|f\|^2 - |f'(0)|^2 = \mathrm{e}^2(f)$, а при $c \in \partial\mathcal{D}$ ее предельные значения в силу леммы равны $\|f\|^2 \geq \mathrm{e}^2(f)$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j\overline{c}^j(1-j+j|c|^2) = 0 \qquad (6)$$

является уравнением для определения оставшихся стационарных точек функции уклонения F. Полагая отсутствие значений параметра $c \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, удовлетворяющих (6), получаем доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\partial\mathcal{D})$ и приближение рациональными функциями первой степени с произвольно расположенным в комплексной плоскости полюсом. Для элементов $f \in L_2(\partial\mathcal{D})$, которые являются граничными значениями функций из $H_2(\mathcal{D})$, эта теорема также верна (при соблюдении наложенных на рассматриваемую функцию ограничений). Действительно, если полюс дробно-линейного отображения находится вне единичного круга, то выполнены все условия теоремы, а если внутри (то есть $|c| > 1$), то имеем $F(c) = \|f\|^2$. Действительно, в определяющем соотношении используем голоморфность подынтегральной функции, а именно

$$F(c) = (f, f - r) = \|f\|^2 - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(z)}{z}\cdot\frac{dz}{z-\overline{c}} = \|f\|^2.$$

Рассмотрим примеры функций $f \in H_2(\mathcal{D})$, обладающих свойством совпадения $\mathrm{e}(f) = \mathrm{r}(f)$. Все обоснование будет базироваться на соотношении (1). Сначала заметим несложный вспомогательный факт

$$|c|^{j-3}\left|1-j+j|c|^2\right| < 2, \quad \text{при} \quad c \in \mathcal{D}\backslash\{0\}, \quad j \geq 3,$$

что несложно доказать, используя замену $x = |c|^2$. Для функции $f \in H_2(\mathcal{D})$ вида

$$f(z) = z + \sum_{j=3}^{\infty} f_j z^j.$$

условие (1) можно переписать как

$$\overline{c}|c|^2 + \sum_{j=3}^{\infty} f_j\overline{c}^j\left(1-j+j|c|^2\right) = 0.$$

Используя ограничение $0 < |c| < 1$, получаем

$$1 = \left|\sum_{j=3}^{\infty} f_j\frac{\overline{c}^{j-2}}{c}\left(1-j+j|c|^2\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=3}^{\infty}|f_j|\cdot|c|^{j-3}\cdot\left|1-j+j|c|^2\right| < 2\cdot\sum_{j=3}^{\infty}|f_j|.$$

Если выбрать функцию $f \in H_2(\mathcal{D})$ так, чтобы $\sum_{j=3}^{\infty}|f_j| \leq 1/2$, то все условия теоремы будут выполнены.

Конкретными примерами могут служить следущие функции

$$f(z) = z + \frac{z^3}{2}, \quad f(z) = \sin\ z, \quad f(z) = \frac{1}{e}\left(e^z - 1 - \frac{z^2}{2}\right).$$

С л е д с т в и е.

$$\mathrm{r}(z^n) = \sqrt{1 - \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \left\|z^n - \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}} e^{(1-n)i\theta}\frac{z}{1-\sqrt{\frac{n-1}{n}}e^{i\theta}z}\right\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем соотношение (6) для определения стационарных точек функции уклонения F, учитывая, что $z^n \neq 0$ при $z \neq 0$. Из равенства $1 - n + n|c|^2 = 0$ получаем

$$|c|^2 = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

По формуле (5) находим значение функции уклонения

$$F\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}e^{i\theta}\right) = 1 - \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Здесь мы учитываем равенство $F(0) = F(e^{i\varphi}) = 1$ и определение наименьшего уклонения $\mathrm{r}^2(f) = \inf F(c)$. Для расчета коэффициентов рациональной функции наилучшего приближения используем соотношение (4):

$$q = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}e^{-i\theta}\right)^n \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}e^{i\theta} = \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n+1}{2}}}e^{(1-n)i\theta} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot e^{(1-n)i\theta}$$

Литература

[1] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: ГосТехИздат., 1950г.

[2] Уолш Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961г.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июля 1993 года.