сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-93-252

Лебеденко В.М.

ГРАДУИРОВАННЫЕ АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ, БЛИЗКИЕ К АЛГЕБРАМ КЛИФФОРДА И ИХ ОБОБЩЕНИЯМ

1993

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассмотрим один класс градуированных ассоциативных алгебр. К нему, при соответствующей групповой параметризации, можно отнести классические алгебры Клиффорда (см. п.3.4.) и многие их обобщения, появившиеся в математической физике (см. [3,4,5]).

Указанный класс — это совокупность всех ассоциативных алгебр, над полем C, определяемых соотношениями типа

$$X(\alpha)\cdot X(\beta) = \lambda(\alpha,\beta)\, X(\alpha+\beta), \tag{1}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{G}$, $\lambda(\alpha,\beta) \in C$ ($\lambda\,(\alpha,\beta) \neq 0$). Здесь для каждой отдельной его алгебры L

$$\{X(t)\}_{t\in\mathbb{G}} \text{— базис } L,$$

$\mathbb{G}$ — конечная абелева группа ($X(0)$ — единица L). Ниже (см. п.3) мы покажем, что тут структурные константы $\lambda(\alpha,\beta)$ (с точностью до нормирования базисных элементов $X(t)$) должны обладать свойством

$$\lambda(s+t,\,u) = \lambda(s,\,u)\,\lambda(t,\,u),$$

$$\lambda(v,\,s+t) = \lambda(v,\,s)\,\lambda(v,\,t), \quad (s,\,t,\,v,\,u \in \mathbb{G}). \tag{2}$$

Далее, уточнив характер функций $\lambda(\alpha,\beta)$, мы дадим полное описание рассматриваемого класса алгебр (см. п.4).

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

2.1. Алгебры рассматриваемого вида будем называть алгебрами типа (1).

Пусть $\mathbb{G}$ — конечная абелева группа (в аддитивной записи). Тогда она является прямой суммой циклических подгрупп (см. [2]). Поэтому группу $\mathbb{G}$ можно отождествить с совокупностью всех целочисленных векторов вида $(n_1, n_2, \ldots, n_q)$ (где $0 \le n_k < r_k$, r_k — порядка соответствующих циклических компонент) с покомпонентным сложением. Мы имеем в виду, что в каждой компоненте с номером k сложение производится по модулю r_k.

2.2. Ассоциативность некоторой алгебры, удовлетворяющей соотношениям типа (1), равносильна тому, что функция $\lambda(\alpha,\beta)$ является решением уравнения

$$(\alpha, \beta)\, \lambda(\alpha + \beta, \nu) = \lambda(\beta, \nu)\, \lambda(\alpha, \beta + \nu) \qquad (3)$$

(в этом можно убедиться непосредственно). Нетрудно убедиться в том, что функции со свойством (2) удовлетворяют соотношениям (3). Поэтому каждая такая функция $\lambda(\alpha, \beta)$ определяет алгебру типа (1). Произведение нескольких таких функций — тоже функция со свойством (2).

2.3. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q$ образующие прямых слагаемых группы $\mathbb{G}$ (см. п.2.1). То есть

$$\alpha_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$\alpha_2 = (0, 1, \ldots, 0),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\alpha_q = (0, 0, ..., 0, 1).$$

Тогда если $\alpha = (n_1, n_2, ..., n_q) \in \mathbb{G}$, то $\alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q$. Пусть $X(\alpha_1) = X_1$, ..., $X(\alpha_q) = X_q$. Так как (в силу соотношений (1)) все элементы $X_k^{r_k}$ $(k = 1, ..., q)$ кратны единице алгебры L (равной $X(0)$), а элементы $X(\alpha)$ и $X_1^{n_1} \cdot X_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot X_q^{n_q}$ кратны друг другу, то в дальнейшем будем считать, что уже проведена соответствующая нормировка. То есть выполняются соотношения

$$X_k^{r_k} = 1 \ \ (\text{единица } L), \qquad k = 1, ..., q,$$
$$X((n_1, ..., n_q)) = X_1^{n_1} \cdot X_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot X_q^{n_q}\,. \qquad (4)$$

В частности, для любых n_k и n_k' $(k \le q)$

$$X((n_k + n_k')\, \alpha_k) = X(n_k\, \alpha_k) \cdot X(n_k'\alpha_k) = X_k^{n_k} \cdot X_k^{n_k'} \qquad (5)$$

не только при $n_k + n_k' \le r_k$, но и при $n_k + n_k' > r_k$, поскольку порядки мультипликативной циклической подгруппы, порожденной элементом X_k, и порядок α_k совпадают.

2.4. Пример. $Z_2 \oplus Z_2 \oplus \ldots \oplus Z_2$ — параметризация алгебр Клиффорда (K_n).

Пусть K_n $(n \ge 2)$ — алгебра Клиффорда с каноническими образующими $l_1, l_2, ..., l_n$:

$$l_j^2 = 1 \quad (j = 1, 2, ..., n),$$
$$l_j\, l_k = -l_k\, l_j \quad (j \ne k).$$

Здесь в качестве $\mathbb{G}$ мы возьмем прямую сумму

$$\underbrace{Z_2 \oplus Z_2 \oplus \ldots \oplus Z_2}_{n},$$

естественным образом сопоставляя базисным элементам K_n элементы $X(\alpha)$, где α — векторы с компонентами $\bar{0}$ или $\bar{1}$ из Z_2: например,

$$l_1 \cdot l_3 \cdot l_5 = X\,(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}) \text{ и т.п.}$$

Очевидно, что для любых α и β из $\mathbb{G}$

$$X(\alpha) \cdot X(\beta) = \lambda(\alpha, \beta)\, X(\alpha + \beta) = \pm X(\alpha + \beta).$$

Выпишем формулу для $\lambda(\alpha, \beta)$ в явном виде:

$$\lambda(\alpha, \beta) = (-1)^{(\sigma(\alpha), \gamma(\beta))}.$$

Здесь $(\sigma(\alpha), \gamma(\beta))$ — билинейная форма вида

$$\sigma_1(\alpha)\, \gamma_1(\beta) + \sigma_2(\alpha)\, \gamma_2(\beta) + \ldots + \sigma_{n-1}(\alpha)\, \sigma_{n-1}(\beta),$$

где $\gamma_k(\beta)$ — компонента вектора β с номером k, $\sigma_1(\alpha)$ равна $\bar{0}$, если за первой компонентой вектора α следует четное количество ненулевых (или все они — нули) и $\bar{1}$ в противном случае, $\sigma_2(\alpha)$, ..., $\sigma_{n-1}(\alpha)$ определяются аналогично. Мы считаем, что $(-1)^{\bar{0}} = 1$, $(-1)^{\bar{1}} = -1$.

Механизм получения этой и подобных формул могут пояснить построения раздела 3.

3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1

Если L — алгебра типа (1), то, с точностью до нормирования элементов ее базиса $(\{X(t)\}_{t \in \mathbb{G}})$, структурные константы $\lambda(\alpha, \beta)$ обладают свойством (2).

Доказательство. Пусть α и β — элементы группы $\mathbb{G}$, $\alpha = (n_1, n_2, ..., n_q)$, $\beta = (m_1, m_2, ..., m_q)$. Тогда

$$X(\alpha) \cdot X(\beta) = \lambda(\alpha, \beta)\, X(\alpha + \beta).$$

В силу соглашений, принятых нами в разделе 2.3, можно считать, что элементы базиса $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{G}}$ удовлетворяют соотношениям (4) и (5).

Далее, если при $k < l$

$$X_l \cdot X_k = \lambda_{k,l} \cdot X_k \cdot X_l\,, \quad (\lambda_{k,l} \in C), \qquad (6)$$

то

$$X_l^{n_l} \cdot X_k^{m_k} = \lambda_{k,l}^{m_k n_k} \cdot X_k^{m_k} \cdot X_l^{n_l}. \qquad (7)$$

Поэтому отображение

$$(X(n_l \alpha_l); X(m_k \alpha_k)) \to \lambda_{k,l}^{m_k n_l}, \qquad (8)$$

рассматриваемое как функция двух переменных из группы $\mathbb{G}$, обладает свойством (2) в силу соотношений (5).

Теперь можно показать, что функция $\lambda(\alpha, \beta)$ является произведением нескольких функций вида $\lambda_{k,l}^{m_k n_l}$. Так как

$$X(\alpha) = X_1^{n_1} \cdot X_2^{n_2} \cdot \ldots, \cdot X_q^{n_q},$$
$$X(\beta) = X_1^{m_1} \cdot X_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot X_q^{m_q},$$

то

$$X(\alpha) \cdot X(\beta) = X_1^{n_1} \cdot \ldots X_{q-1}^{n_{q-1}} (\lambda_{1,q}^{m_1 n_q} \cdot X_1^{m_1} \cdot X_q^{n_q}) (X^{m} \cdot \ldots, \cdot X_q^{m_q}) =$$
$$= \mu_1 X_1^{n_1 + m_1} (X_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot X_q^{n_q}) (X_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot X_q^{m_q}), \qquad (9)$$

где

$$\mu_1 = \lambda_{1,2}^{m_1 n_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{1,q}^{m_1 n_q}.$$

Продолжая такой процесс, начиная с X_2 и т.д., мы получим требуемое разложение для $\lambda(\alpha, \beta)$ (см. ниже (10)). То есть $\lambda(\alpha, \beta)$ — это произведение нескольких функций вида (8), удовлетворяющих соотношениям типа (2). Отсюда вытекает, что и сама функция $\lambda(\alpha,\beta)$ удовлетворяет соотношениям типа (2). Утверждение доказано.

4. ОПИСАНИЕ КЛАССА АЛГЕБР ТИПА (1)

Лемма.

Функция $\lambda(\alpha, \beta)$ (см. построения в доказательстве предложения 1) равна

$$\prod_{1 \le k < l < q} (\lambda_{k,l}^{m_k n_l}), \qquad (10)$$

и порядки мультипликативных групп, порожденных элементами $\lambda_{k,l}$ (если $\lambda_{k,l} \neq 1$), делят порядки обоих элементов α_k и α_l — r_k и r_l (соответственно).

Доказательство

Разложение типа (10) можно получить, если детально завершать процесс (9) так, как указано в доказательстве предложения 1. Второе утверждение леммы получается из того, что такие сужения отображения (8), как

$$(X(n_l \alpha_l), X(\alpha_k)) \to \lambda_{k,l}^{n_l} \text{ и}$$
$$(X(\alpha_l), X(m_k \alpha_l)) \to \lambda_{k,l}^{m_k}$$

являются гомоморфизмами между циклическими группами (см. [2]).

5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2

Всякая алгебра L с базисом $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{G}}$, для элементов которой выполняются соотношения:

$$X_\alpha \cdot X_\beta = \lambda(\alpha, \beta)\, X(\alpha + \beta), \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{G})$$

и функции $\lambda(\alpha, \beta)$ удовлетворяют условиям (10), является ассоциативной и принадлежит классу алгебр типа (1).

Доказательство

Действительно, пусть L — такая алгебра. Так как все сомножители в разложении типа (10) для $\lambda(\alpha, \beta)$ — функции со свойством (2), то и сама функция обладает $\lambda(\alpha, \beta)$ свойством (2). Следовательно, алгебра L ассоциативна (см. п.2.2). Теперь уже легко заключить, что L — алгебра типа (1). Доказательство закончено.

6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3

Пусть L — алгебра с базисом $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{G}}$, элементы которого удовлетворяют соотношениям типа:

$$X(\alpha) \cdot X(\beta) = \lambda(\alpha, \beta)\, X(\alpha + \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{G}).$$

Для того, чтобы L была алгеброй типа (1), необходима и достаточна выполнимость условий (10) (тут необходимость мы понимаем с точностью до нормирования элементов базиса $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{G}}$).

Доказательство

Для обоснования этого утверждения достаточно отметить, что оно является следствием предложений 1 и 2.

Литература

1. Brackx F., Delanghe R., Sommen F. — Clifford Analysis. Pitman Publishing. Marshfield, Massachusetts, 1982, 1986.

2. Курош А.Г. — Теория групп. М.: Наука, 1967.
3. Пирс Р. — Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
4. Семерджиев Х.И., Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ Р5-88-834, Дубна, 1988.
5. Fleury N., Raush de Traubenberg M., Yamaleev R.M. — Preprint CRN/PHTH-92-07, Strasbourg, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 июля 1993 года.