сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-93-170

Н.Ф.Трускова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ ПОЛИСФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1993

1. ВВЕДЕНИЕ

Осцилляторные полисфероидальные функции введены в работе [1]. Они возникают при решении уравнения Шредингера для N-мерного ($N \geq 4$) гармонического осциллятора в евклидовом или псевдоевклидовом пространствах в полисфероидальных системах координат и удовлетворяют уравнениям

$$\left[\frac{d^2}{dv^2} + \frac{2(\mu - \nu + (\nu + \mu + 1)\cos 2v)}{\sin 2v}\frac{d}{dv} - 2q\cos 2v - \right.$$
$$\left. - 4p^2\sin^2 2v + \lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)\right] os_l^{(\nu,\mu)}(v,q,p) = 0, \qquad (1.1а)$$

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \frac{2(\mu - \nu + (\nu + \mu + 1)\,\mathrm{ch}\,2u)}{\mathrm{sh}\,2u}\frac{d}{du} + 2q\,\mathrm{ch}\,2u - \right.$$
$$\left. - 4p^2\mathrm{sh}^2 2u - \tilde{\lambda}_n^{(\nu,\mu)}(q,p)\right] Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p) = 0, \qquad (1.1б)$$

где $0 \leq v \leq \pi,\ 0 \leq u < \infty,\quad \nu > -1, \mu > -1,\ 0 \leq q, p^2 < \infty,\ n, l = 0,1,2...,$ $|os_l^{(\nu,\mu)}(v,q,p,)| < \infty,\ |Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)| < \infty.$

Функции $os_l^{(\nu,\mu)}(v,q,p)$ являются ограниченными при всех действительных v и периодическими с периодом π решениями уравнения (1.1а). Условие периодичности $os_l^{(\nu,\mu)}(v,q,p)$ приводит к ограничению класса собственных значений $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)$, а именно к значениям $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)$, соответствующим целочисленным $l = 0, 1, 2....$ Функция $os_l^{(\nu,\mu)}(v,q,p)$ при этом имеет l нулей на промежутке $0 < v < \pi/2$ и является целой функцией переменной v. На интервале $[0, \pi/2]$ эти функции образуют полную ортогональную систему в классе квадратично-интегрируемых функций с весовым

Объединенный институт
ядерных исследований

множителем $(\cos v)^{2\nu+1} (\sin v)^{2\mu+1}$. В случае замены $q \to -q$, $p \to -p$ справедливы равенства

$$\lambda_l^{(\nu,\mu)}(-q,-p) = \lambda_l^{(\mu,\nu)}(q,p),$$

$$os_l^{(\nu,\mu)}(v,-q,-p) = (-1)^l os_l^{(\mu,\nu)}(-v+\pi/2, q, p).$$

Функции $Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)$ соответствуют ограниченным на луче $[0,\infty)$ решениям уравнения (1.1б) и образуют на этом луче полную ортогональную систему в классе квадратично-интегрируемых функций с весовым множителем $(\operatorname{ch} u)^{2\nu+1}(\operatorname{sh} u)^{2\mu+1}$. Они имеют n нулей на луче $[0,\infty)$, где $n = 0,1,2$.

В случае $\nu = \mu = 0,1,2\dots$ функции $os_l^{(\nu,\mu)}(v,q,p)$, $Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)$ сводятся к кулоновским сфероидальным функциям, используемым, в частности, в задаче двух центров квантовой механики [2], а в случае $p = 0$ — к применяемым в ряде физических задач полисфероидальным периодическим функциям [3]. Другие частные случаи названных функций, а также их основные свойства, разложения и алгоритм вычисления на ЭВМ приведены в [1].

В данной работе получены асимптотические формулы для $os_l^{(\nu,\mu)}(v,q,p)$ и $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)$ при $p \to 0$ с точностью до членов соответственно $O(p^3)$ и $O(p^5)$, а также асимптотические формулы для $Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)$ и $\tilde{\lambda}_n^{(\nu,\mu)}(q,p)$ при $p \to \infty$ с точностью до членов соответственно $O(1/p^3)$ и $O(1/p^4)$. При этом $q = 2p\beta$, где β не зависит от p.

Полученные асимптотики нетривиальным образом обобщают соответствующие асимптотические формулы для кулоновских сфероидальных функций и их собственных значений, а также асимптотические формулы для полисфероидальных периодических функций и их собственных значений и сводятся к названным формулам при частных значениях параметров.

2. АСИМПТОТИКА ПРИ $p \to 0$

Положим $p = \alpha R$, $q = 2\tilde{Z}R$, где α, $\tilde{Z}$ — не зависящие от R величины.

Для получения асимптотики $os_l^{(\nu,\mu)}(v;q,p)$ при $p \to 0$ используем полученное в работе [1] разложение

$$os_l^{(\nu,\mu)}(v,q,p) = e^{-p\cos 2v} N_l \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(\nu,\mu)} P_m^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v). \quad (2.1)$$

Здесь $P_m^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v)$ — полиномы Якоби, N_l — нормировочная постоянная.

Коэффициенты $B_m^{(\nu,\mu)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$R\alpha_m B_{m+1}^{(\nu,\mu)} + \beta_m B_m^{(\nu,\mu)} + R\gamma_m B_{m-1}^{(\nu,\mu)} = 0, \quad (2.2)$$

$$B_{-1}^{(\nu,\mu)} = 0,\ B_0^{(\nu,\mu)} = 1,\ m = 1,2,3,\dots$$

$$\left(\frac{\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)}{4} + \frac{\tilde{Z}R(\mu-\nu)}{(\nu+\mu+2)}\right) B_0^{(\nu,\mu)} +$$

$$+ \frac{2(\nu+1)(\mu+1)(\tilde{Z}+\alpha(\nu+\mu+2)) R B_1^{(\nu,\mu)}}{(\nu+\mu+2)(\nu+\mu+3)} = 0,$$

$$\alpha_m = \frac{2(m+\nu+1)(m+\mu+1)(\tilde{Z}+\alpha(2m+\nu+\mu+2))}{(2m+\nu+\mu+2)(2m+\nu+\mu+3)},$$

$$\beta_m = \frac{\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)}{4} - m(m+\nu+\mu+1) - R(\mu-\nu)\alpha +$$

$$+ \frac{2R\alpha(\nu-\mu)m}{(2m+\nu+\mu)} + \frac{R(\tilde{Z}-\alpha(\nu+\mu+2+2m))(\mu^2-\nu^2)}{(2m+\nu+\mu)(2m+\nu+\mu+2)},$$

$$\gamma_m = \frac{-2(m+\nu+\mu)((\nu+\mu+2m)\alpha-\tilde{Z})m}{(2m+\nu+\mu-1)(2m+\nu+\mu)}.$$

Введем $M_l = -\dfrac{B_l^{(\nu,\mu)} R\alpha_{l-1}}{B_{l-1}^{(\nu,\mu)}}$, $b_l = R^2\gamma_l\alpha_{l-1}$, $a_l = \beta_l$. Используя соотношения (2.2), находим

$$M_{l+1} = b_{l+1}/(a_{l+1} - M_{l+2}), \quad (2.3)$$

$$M_{l+1} = a_l - \begin{cases} 0, & \text{если } l = 0, \\ b_l/M_l, & \text{если } l = 1,2,\dots \end{cases} \quad (2.4)$$

Вычитая (2.4) из (2.3), получаем уравнение, из которого можно найти собственные значения $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)$:

$$-a_l+\cfrac{b_{l+1}}{a_{l+1}-\cfrac{b_{l+2}}{a_{l+2}-\cfrac{b_{l+3}}{a_{l+3}\cdots}}}+\cfrac{b_l}{a_{l-1}-\cfrac{b_{l-1}}{a_{l-2}-\cdots-\cfrac{b_1}{a_0}}}=0. \tag{2.5}$$

Представим $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)$ при $p=\alpha R$, $q=2\tilde{Z}R$, $R\to 0$ в виде

$$\frac{\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)}{4}=d_0^{(l)}+Rd_1^{(l)}+R^2d_2^{(l)}+R^3d_3^{(l)}+R^4d_4^{(l)}+O(R^5), \tag{2.6}$$

где $d_i^{(l)}$ — не зависящие от R числа. Подставляя выражение (2.6) в (2.5) и приравнивая члены с одинаковыми R, получаем

$$d_0^{(l)}=l(l+\nu+\mu+1),\ d_1^{(0)}=\frac{\tilde{Z}(\nu-\mu)}{(\nu+\mu+2)}, \tag{2.7}$$

$$d_1^{(l)}=-C_l,\ C_l=-\alpha(\mu-\nu)-\frac{2l\alpha(\mu-\nu)}{(2l+\nu+\mu)}-$$

$$-\frac{(\nu^2-\mu^2)(\tilde{Z}-\alpha(\nu+\mu+2+2l))}{(2l+\nu+\mu)(2l+\nu+\mu+2)},\ l=1,2\ldots,$$

$$d_2^{(l)}=\frac{D_l}{(2l+\nu+\mu)}-\frac{D_{l+1}}{(2l+\nu+\mu+2)},$$

$$D_l=\frac{-4l(l+\nu+\mu)(l+\nu)(l+\mu)(-\tilde{Z}^2+\alpha^2(\nu+\mu+2l)^2)}{((2l+\nu+\mu)^2-1)(2l+\nu+\mu)^2},$$

$$d_3^{(l)}=\frac{D_l(C_l-C_{l-1})}{(2l+\nu+\mu)^2}+\frac{D_{l+1}(C_l-C_{l+1})}{(2l+\nu+\mu+2)^2},$$

$$d_4^{(l)}=\frac{D_l}{(2l+\nu+\mu)^3}\times$$

$$\times\left((C_{l-1}-C_l)^2-(2l+\nu+\mu)\left(d_2^{(l)}-\frac{D_{l-1}}{2(2l+\nu+\mu-1)}\right)\right)-$$

$$-\frac{D_{l+1}}{(2l+\nu+\mu+2)^3}\times$$

$$\times\left((C_{l+1}-C_l)^2+(2l+\nu+\mu+2)\left(d_2^{(l)}+\frac{D_{l+2}}{2(2l+\nu+\mu+3)}\right)\right).$$

Коэффициенты $B_m^{(\nu,\mu)}$ при $R\to 0$ можно вычислить, полагая

$$B_m^{(\nu,\mu)}/B_l^{(\nu,\mu)}=\sum_{i=1}^{\infty}R^iB_m^{(i)},\quad m\neq l. \tag{2.8}$$

Подставим (2.8) в (2.2) и используем при этом (2.6), (2.7). Находим

$$B_{l-1}^{(1)}=\frac{\alpha_{l-1}}{(d_0^{(l-1)}-d_0^{(l)})},\quad B_{l+1}^{(1)}=\frac{\gamma_{l+1}}{(d_0^{(l+1)}-d_0^{(l)})},$$

$$B_{l+r}^{(1)}=0,\quad B_{l-r}^{(1)}=0,\quad r=2,3\ldots$$

$$B_{l-1}^{(2)}=\frac{(C_{l-1}+d_1^{(l)})B_{l-1}^{(1)}}{(d_0^{(l-1)}-d_0^{(l)})},\quad B_{l+1}^{(2)}=\frac{(d_1^{(l)}+C_{l+1})B_{l+1}^{(1)}}{(d_0^{(l+1)}-d_0^{(l)})}. \tag{2.9}$$

В случае $\alpha=0$ асимптотические выражения (2.6), (2.7) совпадают с полученными в [3] асимптотическими формулами для константы разделения полисфероидальных периодических функций $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q)$ при $q=2\tilde{Z}R\to 0$, а выражения (2.8), (2.9) — с найденными там же асимптотическими формулами для коэффициентов разложения этих функций по полиномам Якоби. В случае $\nu=\mu=0,1,2\ldots$ выражения (2.6), (2.7) совпадают с асимптотикой для величины $\lambda-2\mu(2\mu+1)$ при $R\to 0$, где λ — константа разделения кулоновских сфероидальных функций [2,4].

3. АСИМПТОТИКА ПРИ $p\to\infty$

Перейдем в уравнении (1.1б) к переменной $z=2p(\operatorname{ch}2u-1)$ и к функции Φ с помощью замены

$$Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)=e^{-p\operatorname{ch}2u}\Phi.$$

Получаем

$$\Big[4z(z+4p)\frac{d^2}{dz^2}+(8p(\mu-\nu)+4(\nu+\mu+2)\times$$
$$\times(z+2p)-4z(z+4p))\frac{d}{dz}+\left(\frac{q}{2p}-1\right)(2z+4p)-$$
$$-\widetilde{\lambda}-4p(\mu-\nu)-2(\nu+\mu+1)(z+2p)\Big]\,\Phi=0. \quad (3.1)$$

В случае $\frac{q}{2p}=\beta=\mathrm{Const}$, $p\to\infty$ уравнение (3.1) переходит в уравнение

$$\left(z\frac{d^2}{dz^2}+(-z+\mu+1)\frac{d}{dz}-\frac{\widetilde{\lambda}}{16p}+\frac{\beta}{4}-\frac{(\mu+1)}{2}\right)\Phi=0, \quad (3.2)$$

решениями которого при $\frac{\widetilde{\lambda}}{4p}=\beta-2(2n+\mu+1)$, где $n=0,1,2\ldots$, являются полиномы Лагтера $L_n^{(\mu)}(z)$. Таким образом, ограниченные на луче $[0,\infty)$ решения уравнения (1.1б) при $p\to\infty$ можно выразить в виде ряда по полиномам $L_r^{(\mu)}(2p(\operatorname{ch}2u-1))$:

$$Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)=\mathrm{e}^{-p\operatorname{ch}2u}\Phi=\mathrm{e}^{-p\operatorname{ch}2u}\sum_{r=0}^{\infty}D_rL_r^{(\mu)}(2p(\operatorname{ch}2u-1)). \quad (3.3)$$

Подставим разложение (3.3) для функций Φ в уравнение (3.1) и используем рекуррентные соотношения для полиномов Лаггера. Получаем

$$\widetilde{\alpha}_rD_{r+1}+\widetilde{\beta}_rD_r+\widetilde{\gamma}_rD_{r-1}=0,\ \ D_{-1}=0,\ \ r=0,1,2,\ldots,$$
$$\widetilde{\alpha}_r=2(r+\mu+1)(-\beta-\nu+\mu+2r+2),$$
$$\widetilde{\beta}_r=-\widetilde{\lambda}+4p\beta-2(\nu+1)(\mu+1)-$$
$$-2(2r+\mu+1)^2+2(2r+\mu+1)(\beta-4p),$$
$$\widetilde{\gamma}_r=2r(-\beta+\nu+\mu+2r). \quad (3.4)$$

Представим $\frac{\widetilde{\lambda}_n^{(\nu,\mu)}(q,p)}{4p}$ при $\beta=q/2p=\mathrm{Const}$, $p\to\infty$ в виде

$$\frac{\widetilde{\lambda}_n^{(\nu,\mu)}(q,p)}{4p}=-2(2n+\mu+1)+\beta+$$

$$+\frac{A_1^{(n)}}{p}+\frac{A_2^{(n)}}{p^2}+\frac{A_3^{(n)}}{p^3}+\frac{A_4^{(n)}}{p^4}+O(1/p^5),\ \ n=0,1,2\ldots, \quad (3.5)$$

а коэффициенты D_r в виде

$$D_r/D_n=\sum_{i=1}^{\infty}D_r^{(i)}/p^i,\ \ r\neq n, \quad (3.6)$$

где $A_i^{(n)}$, $D_r^{(i)}$ — не зависящие от p числа.

Подставим разложения (3.5) и (3.6) в (3.4) и приравняем члены с одинаковыми степенями p. Находим

$$A_1^{(n)}=\frac{1}{2}\left(-(\nu+1)(\mu+1)-(2n+\mu+1)^2+\beta(2n+\mu+1)\right),$$
$$-A_2^{(n)}=\frac{1}{64}(\widetilde{\gamma}_n\widetilde{\alpha}_{n-1}-\widetilde{\alpha}_n\widetilde{\gamma}_{n+1}),$$
$$A_3^{(n)}=\frac{1}{256}(\widetilde{\gamma}_n\widetilde{\alpha}_{n-1}(A_1^{(n-1)}-A_1^{(n)})-\widetilde{\gamma}_{n+1}\widetilde{\alpha}_n(A_1^{(n)}-A_1^{(n+1)})),$$
$$-A_4^{(n)}=\frac{\widetilde{\gamma}_n\widetilde{\alpha}_{n-1}}{1024}\left(-4A_2^{(n)}+\frac{\widetilde{\gamma}_{n-1}\widetilde{\alpha}_{n-2}}{32}+(A_1^{(n)}-A_1^{(n-1)})^2\right)-$$
$$-\frac{\widetilde{\alpha}_n\widetilde{\gamma}_{n+1}}{1024}\left(4A_2^{(n)}+\frac{\widetilde{\gamma}_{n+2}\widetilde{\alpha}_{n+1}}{32}+(A_1^{(n)}-A_1^{(n+1)})^2\right). \quad (3.7)$$

При этом

$$D_{n+1}^{(1)}=\frac{\widetilde{\gamma}_{n+1}}{16},\ \ D_{n-1}^{(1)}=-\frac{\widetilde{\alpha}_{n-1}}{16},\ \ D_{n-r}^{(1)}=0,\ \ D_{n+r}^{(1)}=0,\ \ r=2,3,\ldots,$$
$$D_{n+1}^{(2)}=\frac{(A_1^{(n)}-A_1^{(n+1)})}{4}D_{n+1}^{(1)},\ \ D_{n-1}^{(2)}=\frac{(A_1^{(n-1)}-A_1^{(n)})}{4}D_{n-1}^{(1)}.$$

Другие $D_r^{(i)}$ можно вычислить подобным образом, но ввиду громоздкости выражений они здесь не приводятся.

Полученные асимптотики (3.5), (3.7) при $\nu=\mu=0,1,2\ldots$ совпадают с асимптотическими формулами для величины $\lambda-2\mu(2\mu+1)$ при $p\to\infty$, где λ — константа разделения кулоновских сфероидальных функций p-типа [2,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Трускова Н.Ф. — Препринт ОИЯИ Р5-93-169, Дубна, 1993.
2. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. — Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
3. Трускова Н.Ф. — ЯФ, 1982, т.36, с.790.
4. Power J.D. — Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1973, A274, p.663.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1993 года.