объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-93-169

Н.Ф.Трускова

ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ПОЛИСФЕРОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

1993

Памяти Я.А.Смородинского

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе получены решения уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dv^2}+\frac{2(\mu-\nu+(\nu+\mu+1)\cos 2v)}{\sin 2v}\frac{d}{dv}-\right.$$

$$\left.-2q\cos 2v-4p^2\sin^2 2v+\lambda\right]V=0, \qquad (1.1а)$$

где $\nu>-1$, $\mu>-1$, $0\le q, p^2<\infty$, $0\le v\le\pi$, $|V|<\infty$, и уравнения

$$\left[\frac{d^2}{du^2}+\frac{2(\mu-\nu+(\nu+\mu+1)\,\mathrm{ch}\,2u)}{\mathrm{sh}\,2u}\frac{d}{du}+\right.$$

$$\left.+2q\,\mathrm{ch}\,2u-4p^2\,\mathrm{sh}^2 2u-\tilde{\lambda}\right]U=0, \qquad (1.1б)$$

где $\nu>-1$, $\mu>-1$, $0\le q<\infty$, $0\le p^2<\infty$, $0\le u<\infty$, $|U|<\infty$.

Эти уравнения возникают при разделении переменных в уравнении Шредингера для N-мерного ($N\ge 4$) гармонического осциллятора в евклидовом или псевдоевклидовом пространствах в полисфероидальных системах координат. В случае евклидового пространства соответствующие решения названного уравнения выражаются через полиномы. При псевдоевклидовой метрике искомые решения не так просты и не всегда выражаются через известные специальные функции.

Необходимость изучения решений уравнений (1.1) возникла в связи с их возможным применением при решении задачи трех тел с кулоновским взаимодействием [1,2], а также в связи с их важными частными случаями. В частности, в случае $\nu=\mu=0, 1, 2...$ эти уравнения сводятся к уравнениям для кулоновских сфероидальных функций, применяемых в задаче двух центров квантовой механики и в задаче трех тел с кулоновским взаимодействием [3]. В случае $\nu = 1, p = 0$ уравнение (1.1б) с помощью замены $x = \operatorname{sh} u, f = x^{\mu}(x^2 + 1)\, U$ переходит в уравнение, предложенное А.Т.Филипповым в модели составных мезонов [4]. В случае $p = 0$ уравнения (1.1) сводятся к уравнениям для полисфероидальных периодических функций [5], которые применяются во многих физических задачах и, в частности, при $\nu = 0, 1, 2...$ соответствуют решениям задачи на собственные колебания используемых в лазерах открытых резонаторов [6—8].

Уравнение вида (1.1а) при $p^2 = -\gamma^2 < 0$ (что соответствует случаю уравнения Шредингера для репульсивного осциллятора) было получено также в работе [9] с помощью квантового метода обратной задачи. Периодические с периодом π решения (1.1а) в этом случае названы там обобщенными полисфероидальными функциями.

Отметим также, что в случае $\mu = \nu, q = 0$ уравнения (1.1) переходят в уравнения для сфероидальных функций [3,10,11], в случае $\nu = 1$, $\lambda = -4(\mu + 1) - 2q$ или $\mu = 1, \lambda = -4(\nu + 1) + 2q$ — в уравнение для вырожденной гипергеометрической функции. Если в (1.1) перейти к переменным $x = 2\sqrt{q}\cos v$, $y = 2\sqrt{q}\operatorname{ch} u$, $p = q\beta$, то полученные уравнения при $q = 0$, $\beta \neq 0$ также сводятся к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции, а при $q = 0, \beta = 0$ — к уравнению для функций Бесселя.

При $q \neq 0$, $p^2 > 0$ и произвольных значениях ν, μ решения уравнений (1.1) в литературе не рассматривались (насколько известно автору).

Для случая действительных $0 \le q < \infty, 0 \le p^2 < \infty, \nu > -1, \mu > -1$ в работе найдены ограниченные при всех действительных ν и периодические с периодом π решения уравнения (1.1а), а также ограниченные на луче $[0, \infty)$ решения уравнения (1.1б), которые названы соответственно осцилляторными полисфероидальными периодическими функциями (ОППФ) и осцилляторными полисфероидальными модифицированными функциями (ОПМФ). Для ОППФ получены разложения в виде рядов по полиномам Якоби, а для ОПМФ — разложение, аналогичное разложению Яффе для кулоновских сфероидальных функций [12], и доказана сходимость этих разложений.

Собственные значения $\lambda, \tilde{\lambda}$, соответствующие ОППФ и ОПМФ, находятся посредством минимизации l и n раз обернутых цепных дробей, вычисление которых производится с высокой наперед заданной относительной точностью ε. При этом l равно числу нулей ОППФ на интервале $[0, \pi/2]$, а n — числу нулей ОПМФ на луче $[0, \infty)$.

В работе рассмотрены также основные свойства, частные случаи ОППФ, ОПМФ и приведен алгоритм их вычисления на ЭВМ.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ (1.1)

Уравнение (1.1а) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с коэффициентами, являющимися мероморфными периодическими функциями с общим периодом π. Теория такого типа уравнений была развита в работе Флоке [13] и использована в [5] при решении уравнений для полисфероидальных периодических функций. Применяя, как и в [5], анализ работы [13] к уравнению (1.1а), получаем, что решение V этого уравнения можно представить в виде

$$V = e^{\sigma v} S(v),$$

где $S(v)$ — периодическая функция с периодом π, σ — комплексное число, называемое характеристическим показателем. Величины $\sigma, \nu, \mu, q, p, \lambda$ связаны между собой функциональной зависимостью. В случае, когда σ — чисто мнимое четное число ($\sigma = 2il$, $l = 0, 1, 2...$), решения V ограничены при всех действительных v и периодичны с периодом π. Обозначим такие решения через $os_l^{(\nu,\mu)}(v, q, p)$ и назовем осцилляторными полисфероидальными периодическими функциями.

Если $q = 0, p = 0, \nu > -1, \mu > -1$, ограниченные при всех действительных v и периодические с периодом π решения (1.1а) существуют лишь при определенных значениях константы λ:

$$\lambda = \lambda_l^{(\nu,\mu)}(0,0) = 4l(l + \nu + \mu + 1), \quad l = 0,1,2...$$

Такие решения выражаются через полиномы Якоби

$$os_l^{(\nu,\mu)}(v, 0,0) = \mathrm{const} \cdot P_l^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v). \tag{2.1}$$

Функция (2.1) имеет l нулей на интервале $[0, \pi/2]$. При $q \neq 0$, $p \neq 0$ число нулей $os_l^{(\nu,\mu)}(v, q, p)$ на этом интервале не меняется. Если бы такое число менялось с изменением q, p, то можно было бы найти такие $q \neq 0$, $p \neq 0$, при которых $os_l^{(\nu,\mu)}(v, q, p)$ имела бы двойной нуль в некоторой точке $v = v_0 \in [0, \pi/2]$. Но в этом случае производная $\left(\frac{d}{dv} os_l^{(\nu,\mu)}(v, q, p)\right)_{v=v_0}$ также была бы равна нулю и, следовательно, с учетом (1.1а), $os_l^{(\nu,\mu)}(v, q, p)$ была бы тождественно равна нулю.

Если $q \neq 0$, $p \neq 0$, $\nu > -1$, $\mu > -1$, величины λ, при которых (1.1а) имеет ограниченные и периодические с периодом π решения, также не являются произвольными, а зависят от ν, μ, l, q, p. Обозначим эти значения через $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)$.

Представим функцию $os_l^{(\nu,\mu)}(\mathrm{v},q,p)$ при $q \neq 0$, $p \neq 0$ в виде

$$os_l^{(\nu,\mu)}(\mathrm{v},q,p) = N_l e^{-p\cos 2\mathrm{v}} \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(\nu,\mu)} P_m^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\mathrm{v}), \tag{2.2}$$

где $P_m^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\mathrm{v})$ — полиномы Якоби, N_l — нормировочный множитель. Подставим разложение (2.2) в уравнение (1.1а). С учетом рекуррентных соотношений для полиномов Якоби получаем

$$\alpha_m B_{m+1}^{(\nu,\mu)} + \beta_m B_m^{(\nu,\mu)} + \gamma_m B_{m-1}^{(\nu,\mu)} = 0, \tag{2.3}$$

$$B_{-1}^{(\nu,\mu)} = 0,\ B_0^{(\nu,\mu)} = 1,\ m = 1,2,3\ldots$$

$$\left(\frac{\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)}{4} + \frac{q(\mu-\nu)}{2(\nu+\mu+2)}\right) B_0^{(\nu,\mu)} +$$

$$+ \frac{2(\nu+1)(\mu+1)\left(\frac{q}{2} + p(\nu+\mu+2)\right)}{(\nu+\mu+2)(\nu+\mu+3)} B_1^{(\nu,\mu)} = 0,$$

$$\alpha_m = \frac{2(m+\nu+1)(m+\mu+1)\left(\frac{q}{2} + p(2m+\nu+\mu+2)\right)}{(2m+\nu+\mu+2)(2m+\nu+\mu+3)},$$

$$\beta_m = \frac{\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)}{4} - m(m+\nu+\mu+1) - p(\mu-\nu) + \frac{2pm(\nu-\mu)}{(2m+\nu+\mu)} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{q}{2} - p(\nu+\mu+2+2m)\right)(\mu^2-\nu^2)}{(2m+\nu+\mu)(2m+\nu+\mu+2)},$$

$$\gamma_m = \frac{2m(m+\nu+\mu)\left(\frac{q}{2} - p(\nu+\mu+2m)\right)}{(2m+\nu+\mu-1)(2m+\nu+\mu)}.$$

Если $q/2 = p(\nu+\mu+2m)$, где $m = 1,2,\ldots$, ряд (2.2) обрывается. В более общем случае, когда $q/2 \neq p(\nu+\mu+2m)$, введем

$$\omega_m = B_m^{(\nu,\mu)} / B_{m-1}^{(\nu,\mu)}.$$

Используя (2.3), находим

$$\gamma_m/\omega_m + \alpha_m \omega_{m+1} = -\beta_m,\ m = 1,2,\ldots \tag{2.4}$$

Если $m \to \infty$, то $\gamma_m/\omega_m + \alpha_m\omega_{m+1} \to \infty$ и, следовательно, одно из решений уравнения (2.4) при $m \to \infty$ стремится к нулю, а другое — к бесконечности. Если выбрать первое решение, то из (2.4) и асимптотических значений для полиномов $P_m^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\mathrm{v})$ при $m \to \infty$ [14] следует, что

$$\left|\frac{B_m^{(\nu,\mu)}}{B_{m-1}^{(\nu,\mu)}} \frac{P_m^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\mathrm{v})}{P_{m-1}^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\mathrm{v})}\right| \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{\left|\frac{q}{2} - p(\nu+\mu+2m)\right|}{2m^2} \to 0.$$

Таким образом, ряд (2.2) абсолютно сходится при всех $0 \le \mathrm{v} \le \pi$, $0 \le q^2, p^2 < \infty$, $\nu > -1$, $\mu > -1$. При этом ν, μ необязательно целые числа.

Для нахождения $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)$, при которых ряд (2.2) сходится, введем

$$M_l = -\left(B_l^{(\nu,\mu)} / B_{l-1}^{(\nu,\mu)}\right) \alpha_{l-1},\ l = 1,2\ldots \tag{2.5}$$

С учетом (2.3) имеем

$$M_{l+1} = \alpha_l \gamma_{l+1} / (\beta_{l+1} - M_{l+2}),\ \ l = 0,1,\ldots \tag{2.6а}$$

$$M_{l+1} = \beta_l - \begin{cases} 0, & \text{если } l = 0, \\ \gamma_l \alpha_{l-1}/M_l, & \text{если } l = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{2.6б}$$

Вычитая (2.6б) из (2.6а), получаем трансцендентное уравнение для собственных значений $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)$:

$$U = -\beta_l + \cfrac{\alpha_l\gamma_{l+1}}{\beta_{l+1} - \cfrac{\alpha_{l+1}\gamma_{l+2}}{\beta_{l+2} - \cfrac{\alpha_{l+2}\gamma_{l+3}}{\dots}}} + \cfrac{\gamma_l\alpha_{l-1}}{\beta_{l-1} - \cfrac{\gamma_{l-1}\alpha_{l-2}}{\beta_{l-2} - \cfrac{\gamma_{l-2}\alpha_{l-3}}{\dots - \cfrac{\gamma_1\alpha_0}{\beta_0}}}} = 0. \tag{2.7}$$

Выражение (2.7) представляет собой l раз обернутую цепную дробь. Так как коэффициенты $B_m^{(\nu,\mu)}$ соответствуют минимальному, сходящемуся при $m \to \infty$ решению конечно-разностного уравнения (2.3), то согласно [15] дробь (2.7) сходится. Минимизируя на ЭВМ абсолютное значение этой дроби, находим искомые величины $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q, p)$. При этом в качестве начальных приближений в области малых $q = 2\widetilde{Z}R$, $p = \alpha R$, $R \to 0$ используем полученные в [16] асимптотические значения $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(2\widetilde{Z}R, \alpha R)$ при $R \to 0$.

Чтобы избежать больших промежуточных чисел при вычислении цепной дроби (2.7), преобразуем ее к виду

$$U = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots}}} = 0, \tag{2.8}$$

где

$$b_0 = -\beta_l + \cfrac{\gamma_l\alpha_{l-1}}{\beta_{l-1} - \cfrac{\gamma_{l-1}\alpha_{l-2}}{\beta_{l-2} - \cfrac{\gamma_{l-2}\alpha_{l-3}}{\dots - \cfrac{\gamma_1\alpha_0}{\beta_0}}}},$$

$$a_1 = \frac{\alpha_l\gamma_{l+1}}{\delta_{l+1}}, \quad b_1 = \frac{\beta_{l+1}}{\delta_{l+1}},$$

$$a_r = \frac{-\alpha_{r+l-1}\gamma_{l+r}}{\delta_{l+r}\delta_{l+r-1}}, \quad b_r = \frac{\beta_{l+r}}{\delta_{l+r}};$$

$$\delta_{l+r} = 4(l+r+2)\,(l+r+\nu+\mu+3), \quad r = 2, 3 \dots$$

Введение множителя δ_{l+r} в (2.8) не меняет величины U и соответствует основному тождественному преобразованию этой цепной дроби [17]. При ее практическом вычислении используем формулы [17,18]:

$$U = \lim_{k\to\infty} U_k, \tag{2.9}$$

где U_k — подходящая дробь цепной дроби (2.8),

$$U_k = U_{k-1} - (\widetilde{B}_{k-1}\widetilde{B}_k)^{-1}(-1)^k \prod_{i=1}^{k} a_i, \quad U_0 = b_0, \quad k = 1,2\dots \tag{2.10}$$

Здесь $\widetilde{B}_k$ — k-й знаменатель дроби U_k. Напомним, что [17,18]

$$U_k = \widetilde{A}_k/\widetilde{B}_k, \quad k = 1,2\dots,$$

где

$$\widetilde{A}_{-1} = 1; \quad \widetilde{A}_0 = b_0, \quad \widetilde{A}_k = b_k\widetilde{A}_{k-1} + a_k\widetilde{A}_{k-2}, \tag{2.11а}$$

$$\widetilde{B}_{-1} = 0, \quad \widetilde{B}_0 = 1, \quad \widetilde{B}_k = b_k\widetilde{B}_{k-1} + a_k\widetilde{B}_{k-2}, \quad k = 1,2\dots \tag{2.11б}$$

Вычисляем последовательно в прямом направлении все $\widetilde{B}_k$ с помощью (2.11б) и все U_k с помощью (2.10), начиная с $k = 1$ и до такого $k = k'$, при котором $|U_{k'} - U_{k'-1}| \le \varepsilon |U_{k'}|$. Здесь ε — требуемая относительная точность вычисления цепной дроби U.

Такой способ вычисления U аналогичен алгоритму 2, изложенному в [15] и примененному в [19] при вычислении соответствующих цепных дробей в теории полисфероидальных периодических функций. Формула (2.10) позволяет вычислять U практически с любой наперед заданной относительной точностью (ограниченной только возможностями ЭВМ) без больших промежуточных чисел и больших ошибок округления.

После нахождения собственных значений $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q, p)$ вычисляем коэффициенты $B_m^{(\nu,\mu)}$ способом, изложенным в [19]. Суммируя затем (2.2) с необходимой точностью, получаем $os_l^{(\nu,\mu)}(\text{v}, q, p)$.

Обозначим ограниченные при $\nu > -1, \mu > -1, 0 \le q, p < \infty, 0 \le u < \infty$ решения уравнения (1.1б) через $Os_n^{(\nu,\mu)}(u, q, p)$. Для вычисления этих функций используем разложение

$$Os_n^{(\nu,\mu)}(u, q, p) = \widetilde{N}_n (\operatorname{ch} u)^{2\sigma} e^{-p\operatorname{ch}2u} \sum_{r=0}^{\infty} A_r (\operatorname{th} u)^{2r}, \tag{2.12}$$

где $\sigma = \frac{q}{4p} - 1 - \frac{(\mu+\nu)}{2}$, $\widetilde{N}_n$ — нормировочный множитель.

Подставляя (2.12) в (1.1б), получаем

$$\widetilde{\alpha}_r A_{r+1} + \widetilde{\beta}_r A_r + \widetilde{\gamma}_r A_{r-1} = 0, \ r = 1,2\ldots \tag{2.13}$$

$$A_{-1} = 0, \ A_0 = 1,$$

$$\widetilde{\alpha}_r = (r+1)(r+\mu+1),$$

$$\widetilde{\beta}_r = -\frac{\widetilde{\lambda}}{4} + (\mu+1)\sigma - 2r(r+2p-\sigma) + r(\nu-\mu) + 2p\sigma + p(\nu-\mu),$$

$$\widetilde{\gamma}_r = (\sigma+1-r)(\sigma+1-r+\nu).$$

В случае, когда $\sigma = r$ или $\sigma + \nu = r$, где $r = 0, 1, 2\ldots.$, ряд (2.12) обрывается. Рассмотрим более общий случай, когда этот ряд не усечен.

Разложение (2.12) при $\nu = \mu = m = 0,1,2\ldots$ совпадает с точностью до множителя с разложением Яффе [12] для функции $\Pi(\xi) = (\operatorname{sh}^m 2u) \times \times Os_n^{(m,m)}(u,q,p)$, где $\xi = \operatorname{ch} 2u$, $\Pi(\xi) = \Pi_{mn}(p, q/2, \xi)$ — радиальная кулоновская сфероидальная функция p-типа [3]. Поскольку главные члены в (2.13) ведут себя при $\mu \ne \nu$, $r \to \infty$ так же, как и при $\mu = \nu$, $r \to \infty$, то доказательство сходимости разложения (2.12) полностью совпадает с доказательством сходимости разложения Яффе. Как и в [12],

$$\left|\frac{A_{r+1}}{A_r}\right| \underset{r\to\infty}{=} 1 - 2\sqrt{\frac{p}{r}} + O\left(\frac{p}{r}\right),$$

что приводит к сходимости ряда (2.12) в области $0 \le u < \infty, \mu > -1, \nu > -1$. В случае, когда $-\infty < p < 0$, в формулах (2.12), (2.13) следует сделать замену $p \to -p$.

Вычисление собственных значений $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}_n^{(\nu,\mu)}(q, p)$, соответствующих разложению (2.12), аналогично вычислению $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q, p)$, соответствующих разложению (2.2). Минимизируем на ЭВМ n раз обернутую цепную дробь,

полученную с помощью рекуррентных соотношений (2.13) и вычисленную изложенным выше способом, и получаем необходимые величины $\widetilde{\lambda}_n^{(\nu,\mu)}(q, p)$. Вычисляя затем коэффициеты A_r предложенным в [19] методом и суммируя ряд (2.12) с требуемой точностью, находим $Os_n^{(\nu,\mu)}(u, q, p)$.

3. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $os_l^{(\nu,\mu)}(\text{v}, q, p)$, $Os_n^{(\nu,\mu)}(u, q, p)$

1. Функция $os_l^{(\nu,\mu)}(\text{v}, q, p)$ ограничена в особых точках $\text{v} = r\pi/2$, где $r = 0,1,2\ldots$, и имеет в этих точках ограниченные производные. Так как в силу уравнения (1.1а) других особых точек, кроме $\text{v} = \pm i\infty$, эта функция не имеет, она является целой функцией переменной v.

2. Функция $os_l^{(\nu,\mu)}(\text{v}, q, p)$ ограничена при всех действительных v, реальна и периодична с периодом π.

3. Функция $os_l^{(\nu,\mu)}(\text{v}, q, p)$ имеет l нулей на интервале $0 < \text{v} < \pi/2$ и не равна нулю в точках $\text{v} = r\pi/2$, где $r = 0,1,2\ldots$ Если бы она равнялась нулю в какой-либо из названных точек, то в силу уравнения (1.1а) ее первая производная по v и все последующие также были бы равны нулю в этих точках и, следовательно, сама $os_l^{(\nu,\mu)}(\text{v}, q, p)$ тождественно была бы равна нулю.

4. Функция $os_l^{(\nu,\mu)}(\text{v}, q, p)$ является четной функцией переменной v.

5. Функции $V_l = os_l^{(\nu,\mu)}(\text{v}, q, p)$ являются решениями задачи Штурма — Лиувилля

$$\left[\frac{d}{d\text{v}}\rho\frac{d}{d\text{v}} + \widetilde{\sigma} + \rho\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q, p)\right] V_l = 0,$$

$$\left(\rho V_l \frac{d}{d\text{v}} V_l\right)_{\text{v}=0} = \left(\rho V_l \frac{d}{d\text{v}} V_l\right)_{\text{v}=\pi/2} = 0,$$

где $\rho = (\cos \text{v})^{2\nu+1}(\sin \text{v})^{2\mu+1}$; $\widetilde{\sigma} = -2q\rho\cos 2\text{v} - 4p^2\rho\sin^2 2\text{v}$.

Следовательно [10], функции $os_l^{(\nu,\mu)}(\text{v}, q, p)$ образуют полную ортогональную систему в классе квадратично-интегрируемых функций с весовым множителем ρ на интервале $[0, \pi/2]$. Собственные значения $\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q, p)$ при этом образуют возрастающую последовательность

$$\lambda_0^{(\nu,\mu)}(q,p)<\lambda_1^{(\nu,\mu)}(q,p)<\ldots;\quad \lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)\underset{l\to\infty}{\to}\infty.$$

6. Из (2.2), (2.3), (2.7) следует, что

$$\lambda_l^{(\nu,\mu)}(-q,-p)=\lambda_l^{(\mu,\nu)}(q,p),\quad B_m^{(\nu,\mu)}(-q,-p)=(-1)^m B_m^{(\mu,\nu)}(q,p).$$

Так как $P_m^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\mathrm{v})=(-1)^m P_m^{(\mu,\nu)}(\cos 2\mathrm{v})$, то с учетом этих равенств и разложения (2.2) получаем

$$os_l^{(\nu,\mu)}(\mathrm{v},-q,-p)=(-1)^l os_l^{(\mu,\nu)}(-\mathrm{v}+\pi/2,q,p).$$

7. Функция $Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)$ является четной функцией переменной u.

8. Функция $Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)$ ограничена и имеет ограниченные производные при всех действительных u.

9. Если перейти в уравнении (1.1б) к переменной $z=2p\,(\operatorname{ch}2u+1)$ и к функции Ψ с помощью замены

$$Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)=e^{-p\operatorname{ch}2u}\,\Psi,$$

то получаем уравнение, которое при $q/(2p)=\mathrm{const}$, $p\to\infty$ совпадает с уравнением для полиномов Лаггера $L_n^{(\nu)}(z)$. Эти полиномы имеют n нулей на луче $[0,\infty)$. При изменении p число нулей у функции Ψ и у функции $Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)$ не меняется, и, следовательно, каждая из этих функций также имеет n нулей на луче $[0,\infty)$.

10. Функции $\widetilde{U}_n=Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)$ являются решениями задачи Штурма — Лиувилля

$$\left[\frac{d}{du}\,\tilde\rho\,\frac{d}{du}+\tilde{\tilde\sigma}-\tilde\rho\,\widetilde{\lambda}_n^{(\nu,\mu)}(q,p)\right]\widetilde{U}_n=0,$$

$$\left(\tilde\rho\widetilde{U}_n\frac{d}{du}\widetilde{U}_n\right)_{u=0}=\left(\tilde\rho\widetilde{U}_n\frac{d}{du}\widetilde{U}_n\right)_{u=\infty}=0,$$

где $\tilde\rho=(\operatorname{ch}u)^{2\nu+1}(\operatorname{sh}u)^{2\mu+1}$, $\tilde{\tilde\sigma}=2q\,\tilde\rho\operatorname{ch}2u-4p^2\tilde\rho\operatorname{sh}^2 2u$, и, следовательно, образуют полную ортогональную систему в классе квадратично-интегрируемых функций с весовым множителем $\tilde\rho$ на луче $[0,\infty)$. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^{(\nu,\mu)}(q,p)$ образуют при этом возрастающую последовательность

$$\widetilde{\lambda}_0^{(\nu,\mu)}(q,p)<\widetilde{\lambda}_1^{(\nu,\mu)}(q,p)<\ldots;\quad \widetilde{\lambda}_n^{(\nu,\mu)}(q,p)\underset{n\to\infty}{\to}\infty.$$

11. В ряде приложений наряду с функциями $os_l^{(\nu,\mu)}(\mathrm{v},q,p)$, $Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p)$ удобно рассматривать функции φ, Φ, определяемые следующим образом

$$\varphi=(\cos\mathrm{v})^\nu(\sin\mathrm{v})^\mu\,os_l^{(\nu,\mu)}(\mathrm{v},q,p),$$

$$\Phi=(\operatorname{ch}u)^\nu(\operatorname{sh}u)^\mu\,Os_n^{(\nu,\mu)}(u,q,p).$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\left[(1-\eta^2)\frac{d^2}{d\eta^2}-2\eta\frac{d}{d\eta}-\frac{\nu^2}{2(1+\eta)}-\frac{\mu^2}{2(1-\eta)}-\right.$$
$$\left.-\frac{q}{2}\eta-p^2(1-\eta^2)+\bar\lambda\right]\varphi=0, \tag{3.1а}$$

$$\left[(\xi^2-1)\frac{d^2}{d\xi^2}+2\xi\frac{d}{d\xi}+\frac{\nu^2}{2(\xi+1)}-\frac{\mu^2}{2(\xi-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{q}{2}\xi-p^2(\xi^2-1)-\bar{\bar\lambda}\right]\Phi=0, \tag{3.1б}$$

где $\eta=\cos 2\mathrm{v}$, $\xi=\operatorname{ch}2u$, $\bar\lambda=\dfrac{\lambda_l^{(\nu,\mu)}(q,p)}{4}+(\mu+\nu)(\mu+\nu+1)$, $\bar{\bar\lambda}=\dfrac{\widetilde{\lambda}^{(\nu,\mu)}(q,p)}{4}+(\mu+\nu)(\mu+\nu+1)$.

Каждое из уравнений (3.1) имеет две регулярные особые точки (± 1) и одну нерегулярную (∞). В случае $\nu=\mu=m=0,1,2\ldots$ уравнения (3.1) переходят в уравнения для кулоновских сфероидальных функций, а функции φ, Φ переходят соответственно в угловую кулоновскую сфероидальную функцию p-типа и радиальную кулоновскую сфероидальную функцию p-типа [3]. Величины $\bar\lambda,\bar{\bar\lambda}$ соответствуют при этом собственным значениям этих функций.

12. Если $\mu=1$, $\lambda_l^{(\nu,1)}(q,p)=-4(\nu+1)+2q$, $q=4pb$, то функция $os_l^{(\nu,\mu)}(\mathrm{v},q,p)$ выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию

$$os_l^{(\nu,1)}(\mathrm{v},4pb,p)=\mathrm{const}\,\frac{M_{b,\frac{\nu}{2}}(4p\cos^2\mathrm{v})}{(\cos\mathrm{v})^{\nu+1}\sin^2\mathrm{v}}. \tag{3.2}$$

Так как функция (3.2) должна быть конечна при $v = 0, \pi/2$ и должна иметь l нулей на интервале $0 < v < \pi/2$, то величина $4p$, очевидно, должна равняться $(l+1)$-му корню уравнения

$$M_{b, \frac{\nu}{2}}(\alpha_i) = 0,$$

где $i = 1, 2 \dots l+1$; $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_{l+1}$. Следовательно, имеем

$$os_l^{(\nu,1)}\left(v, \alpha_{l+1} b, \frac{\alpha_{l+1}}{4}\right) = \text{const}\,\frac{M_{b,\frac{\nu}{2}}(\alpha_{l+1}\cos^2 v)}{(\cos v)^{\nu+1}\sin^2 v}.$$

Аналогично для случая $\nu = 1$, $\lambda_l^{(1,\mu)}(q,p) = -4(\mu+1) - 2q, q = 4pb$, получаем

$$os_l^{(1,\mu)}\left(v, \beta_{l+1} b, \frac{\beta_{l+1}}{4}\right) = \text{const}\,\frac{M_{b,\frac{\mu}{2}}(\beta_{l+1}\sin^2 v)}{(\sin v)^{\mu+1}\cos^2 v},$$

где β_{l+1} равно $(l+1)$-му корню уравнения

$$M_{b,\frac{\mu}{2}}(\beta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots l+1.$$

Если $\mu = 1$, $\tilde{\lambda}_n^{(\nu,1)}(q,p) = -4(\nu+1) + 2q$, $q = 4pb$, то

$$Os_n^{(\nu,1)}(u, b\,\tilde{\alpha}_{n+1}, \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}}{4}) = \text{const}\,\frac{W_{b,\frac{\nu}{2}}(\tilde{\alpha}_{n+1}\operatorname{ch}^2 u)}{(\operatorname{ch} u)^{\nu+1}\operatorname{sh}^2 u},$$

где $\tilde{\alpha}_{n+1}$ — $(n+1)$-й корень уравнения

$$W_{b,\frac{\nu}{2}}(\tilde{\alpha}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Функция $W_{b,\frac{\nu}{2}}(z)$ соответствует второму решению уравнения Уиттекера [10].

Если $\nu = 1$, $\tilde{\lambda}_n^{(1,\mu)}(q,p) = -4(\mu+1) - 2q$, то ограниченные на луче $[0, \infty)$ и имеющие на нем n нулей решения уравнения (1.1б) существуют лишь в случае, когда $q = 2p(2n + \mu + 1)$, где $n = 0,1,2\dots$ Такие решения выражаются через полиномы Лаггера

$$Os_n^{(1,\mu)}(u, 2p(2n+\mu+1), p) = \text{const}\,\frac{e^{-p\operatorname{ch}2u}L_n^{(\mu)}(4p\operatorname{sh}^2 u)}{\operatorname{ch}^2 u}.$$

Асимптотические свойства функций $os_l^{(\nu,\mu)}(v, q, p)$, $Os_n^{(\nu,\mu)}(u, q, p)$ при $p \to 0$ и $p \to \infty$ изложены в [16].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в работе осцилляторные полисфероидальные функции объединяют и нетривиальным образом обобщают известные функции «сфероидального типа»: сфероидальные [3,11], гиперсфероидальные [6], обобщенные гиперсфероидальные [7,8], кулоновские сфероидальные [3], волновые полисфероидальные [5,19] и сводятся к ним при частных значениях параметров. Наряду с этим функции $os_l^{(\nu,\mu)}(v, q, p)$, $Os_n^{(\nu,\mu)}(u, q, p)$ обладают новыми, только им присущими свойствами симметрии, что приводит к важным следствиям для всех функций этого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nyiri J., Smorodinsky Ya.A. — JINR, E2-4809, Dubna, 1969. In: Symposium on the Nuclear Three Body Problem and Related Topics. Budapest, 1971, p.A27.
2. Динейхан М., Ефимов Г.В. — Препринт ОИЯИ Р4-93-43, Дубна, 1993.
3. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. — Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
4. Филиппов А.Т. — ЯФ, 1979, т.29, с.1035; В кн.: Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории поля. Дубна: ОИЯИ, 1976, с.319. Filippov A.T. — Phys.Lett., 1974, v.51, p.379; JINR, E2-7563, Dubna, 1973; JINR, E2-7929, Dubna, 1974.
5. Трускова Н.Ф. — ЯФ, 1982, т.36, с.790.
6. Вайнштейн Л.А. — В кн.: Электроника больших мощностей. М.: Наука, 1965, 4, с.93, 106, 130. Heurtley J.C. — In: Proc. Symp. on Quasioptics. N.Y.: Polytechnic Press, 1964.
7. Лось В.Ф. — Вопросы радиотехники, серия общетехнич., 1969, т.10, с.57.
8. Космодамианская Н.С., Лось В.Ф. — В сб.: Антенны. М.: Связь, 1969, 5, с.121.
9. Kuznetsov V.B. — J.Math.Phys., 1990, v.31(5), p.1167.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. — Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967, т.1—3.
11. Фламмер К. — Таблицы волновых сфероидальных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1962, БМТ, вып.17.

12. Jaffe G. — Z.Physik, 1934, v.87, p.535.
13. Floquet G. — Ann. Ecole Norm., ser.2, 1883, v.12, p.47.
14. Cere Д. — Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
15. Gautschi W. — SIAM Rev., 1967, v.9, p.24.
16. Трускова Н.Ф. — Сообщение ОИЯИ Р5-93-170, Дубна, 1993.
17. Wall H.C. — Continued fractions. N.Y.: Pergamon Press, 1948.
18. Хованский А.Н. — Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Гостехтеориздат, 1956.
19. Трускова Н.Ф. — ЖВМ и МФ, 1983, т.23, № 4, с.785.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1993 года.