93-106

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5-93-106

К.В.Рерих

ОБЩИЙ ПОДХОД К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ОБРАТИМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЯМИ ИЗ ГРУППЫ КРЕМОНЫ БИРАЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ $Cr(P^n_k)$

Направлено в журнал “Математические заметки”

1993

1. Введение

Обратимые динамические системы (ОДС) занимают важное место в физике, что связано с инвариантностью многих физических законов относительно обращения времени. Обратимые динамические системы, как известно (см. [1]-[7]), качественно подобны гамильтоновым системам. В частности, доказано существование тора Колмогорова-Арнольда-Мозера в обратимых негамильтоновых потоках [1], [2] и отображениях с неподвижной эллиптической точкой [4], [5], [7]. Напомним определение обратимого отображения.

Определение.

Отображение Φ называется обратимым, если имеется симметрия G такая, что $\Phi^{-1} = G \circ \Phi \circ G$ и G есть инволюция: $G^2 = \mathrm{id}$ [8]. Из этого определения следует, что $\Phi \circ G$ есть также инволюция, а Φ–композиция двух инволюций.

В известных примерах интегрируемых обратимых отображений (см. [9]) последние являются частными случаями плоских отображений (преобразований) Кремоны ([10], [11],т.3, стр. 94) - бирациональных преобразований в проективном пространстве P^n_k (где k — поле комплексных (C) или действительных (R) чисел). Известно (теорема М. Нетера [10], [11]), что при $n = 2$ группа $Cr(P^n_k)$ разрешима посредством стандартных (квадратичных) преобразований Кремоны. Хотя при $n \geq 3$ ситуация сложнее, по-видимому, основой для интегрирования произвольных кремоновых ОДС может служить исследование интегрируемости ОДС, определяемых композицией стандартного отображения Кремоны $I \in Cr(P^n_k)$, являющегося инволюцией ($I^2 = id$), и линейного отображения, задаваемого инволютивной матрицей A.

Динамические системы такого вида возникли в статической модели дисперсионного подхода ([12],§29). Недавно в [13] был получен неалгебраический первый интеграл для одной системы этого типа. Укажем также, что проблема интегрирования д.с., определяемых кремоновыми отображениями, исследована для афинной подгруппы Кремона GA_2 (полиномиальных отображений) в [14] и [15].

Итак, после этого введения и сделанных замечаний мы остановимся в разделе 2 на формулировке проблемы и истории вопроса. В разделе 3 будет получено функциональное уравнение на инвариантные однородные полиномы, решения которого мы будем называть парциальными автоморфными формами. В разделе 4 на этой основе будут установлены достаточные условия алгебраической интегрируемости таких динамических систем, обсуждается вопрос об интегрировании таких систем с позиций локальной теории диффеоморфизмов, дается формулировка и доказательство теоремы, дополнительной к теореме Зигеля (см. [17], §§25,28; [16], гл. 6, §2) и следующей из оценок Н.И. Фельдмана [18, 19] для линейных форм от логарифмов алгебраических чисел.

2. Формулировка проблемы

Рассматриваются обратимые динамические системы вида:

$$S(-w) = AS(w) \tag{1}$$

$$S(w+1) = I \circ AS(w) \,, \tag{2}$$

где A — линейная, а I — нелинейная инволюции, т.е. $A^2 = id$, $I^2 = id$:
а) $S(w) = (S_1(w), S_2(w), \dots, S_n(w))$, $S(w) \in M^n(\mathrm{C})$, $M(\mathrm{C})$ — функциональное пространство мероморфных функций, $S^*(w) = S(w^*)$;
б) числовая матрица кроссинг-симметрии A, определяемая группой симметрии статического гамильтониана и квантовыми числами (орбитальным моментом L, спиновым — J, изоспиновым — T) сталкивающихся частиц, обладает некоторыми общими свойствами:

$$A^2 = id, A_{ij} \in Q \text{ или } R, \;\; i,j \in (1,2,\cdots,n).$$

Так как $\det|A| \neq 0$, то A — матрица простой структуры.

$$A = B\Lambda^a B^{-1} \quad \Lambda^a = \mathrm{diag}(\lambda_1^a, \lambda_2^a, \dots, \lambda_n^a) \quad \lambda_j^a = \pm 1, \;\; i,j \in (1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

$$B_{ij} = \mu_i^{(j)}, \quad A\mu^{(j)} = \lambda_j^a \mu^{(j)}, \tag{4}$$

где B — фундаментальная матрица в базисе собственных векторов $\mu^{(j)}$ матрицы A [20]. (Конкретные реализации и другие свойства см.[21], [22].);
в) $A\mu^{(n)} = \mu^{(n)}$, $\mu^{(n)} = (1,1,\dots,1)$;
г) $I^2 = id$, $(IS)_i = 1/S_i$, $I \in Cr(P^n_k)$,
где $Cr(P^n_k)$ - группа бирациональных преобразований Кремоны в проективном пространстве P^n_k, где $k \equiv R$ или C, а I — стандартное преобразование Кремоны (его обобщение на n-мерный случай).

Замечание 1. В статической модели наиболее часто обсуждаются случаи:
$n = 2$: $A(1, \frac{1}{2})$, см.[23],[24]; $A(l, \frac{1}{2})$, $l \in N$, см. [25];
$n = 3$: $A(l, 1)$, см. [22]; $A_J(1, \frac{1}{2}) \times A_T(1, \frac{1}{2})$ при дополнительном условии $S_2 \equiv S_3$ (см. [21], [26]).
$n = 4$: $A_J(1, \frac{1}{2}) \times A_T(1, \frac{1}{2})$ [21].

Замечание 2. Д.с. (1),(2) обладает следующей группой автоморфизмов:

$$S(w) \to S(w + \beta(w)) \exp(\alpha(w - \frac{1}{2})),$$

где $\beta(w) \in M(\mathrm{C})$ — для рациональных $S(w)$ или $\beta(w) \in E(\mathrm{C})$ — для трансцендентных мероморфных функций $S(w)$ и $\exp(\alpha(w)) \in M(\mathrm{C})$:

$$\beta(w+1) = \beta(w), \qquad \beta(-w) = -\beta(w) \tag{5}$$

$$\alpha(w+1) = -\alpha(w), \qquad \alpha(-w) = -\alpha(w) \,. \tag{6}$$

Очевидно, что группа автоморфизмов пространства решений д.с. (1),(2) не исчерпывается (5)-(6), более того, она должна включать в себя автоморфизмы, зависящие еще от $(n-2)$ произвольных функций w периода 1.

Замечание 3. Пусть Φ — отображение ($\Phi \in Cr(P^n_k)$) и $Y(w) = \Phi S(w)$. Тогда $Y(w)$ есть решение уравнений

$$Y(-w) = \left(\Phi \circ U^{-1} \circ \Lambda^a \circ \left(\Phi \circ U^{-1}\right)^{-1}\right) Y(w) \tag{7}$$

$$Y(w+1) = \left(\Phi \circ I \circ U^{-1} \circ \Lambda^a \circ U \circ \Phi^{-1}\right) Y(w) \,, \tag{8}$$

где $A = U^{-1} \circ \Lambda^a \circ U$, $\mathrm{Det} U \neq 0$, $U_{ij} \in R$, $(i,j = 1,2,\dots,n)$.

Резюме. Д.С. (1)-(2) является базовой д.с. для весьма широкого класса д.с. .

Проблема нахождения явного вида всех $(n-2)$ первых интегралов д.с. (1)-(2) стоит уже почти 30 лет, начиная с [23], [24], где она была решена для $n = 2$ и $A = A(1, \frac{1}{2})$, $A(l, \frac{1}{2})$ [25] и частично в [26], [21] для $n = 3$ и в [21] для случая $n = 4$, где были найдены частные решения д.с. (1)-(2) в классе рациональных функций (без учета (5)-(6)), или в классе мероморфных трансцендентных функций [27]. В [28] был предложен метод локального построения инвариантных многообразий в фазовом пространстве. Необходимость выполнения некоторых локальных условий (при $w = 0$) была мотивом поиска решения этой общей проблемы при $n = 3$ и $n = 4$ см. [29], [30], [31], [32].

В работе [31] эта проблема рассматривалась с позиций качественной теории дифференциальных уравнений: исследовалось дифференциальное уравнение абелевой группы итераций д.с. (1)-(2) [29] в окрестности параболической неподвижной точки, что дало возможность получить [31] формальные расходящиеся, как доказано в [33], общие решения. В [34], [32],[35] был предложен другой подход к решению этой проблемы на основе использования общей теории преобразований Кремоны [10]. В рамках этого подхода в [36], [37], [38] были получены новые решения уравнений Чу-Лоу для матриц $A(1,1)$ и $A^{Chew-Low}$. Необычайная трудность этой проблемы установлена в [39]. И, наконец, в недавней работе автора [13] общая проблема решена для $n = 3$ и $A(1,1)$, что соответствует процессу рассеяния двух частиц со спином 1.

3. Функциональное уравнение для инвариантных однородных полиномов

Введем в дополнение к (3),(4) $z(w)$, $j(z)$ и $\pi(z)$: $z(w) \in C^n$, $j(z) \in C^n$, $\pi(z) \in C$

$$\begin{aligned} z(w) &= B^{-1}S(w), && (9)\\ j(z) &= ABz, && (10)\\ \pi(z) &= \prod_{i=1}^{n} j_i(z) \,. && (11) \end{aligned}$$

Тогда д.с. (1), (2) примет вид:

$$\begin{aligned} z(-w) &= \Lambda^a z(w) && (12)\\ z(w+1) &= \phi(z(w))/\pi(z(w)) \,, && (13) \end{aligned}$$

где

$$\phi(z) = \pi(z)B^{-1}(Ij(z)), \quad \Lambda^a = B^{-1}AB, \quad S(w) = j(\Lambda^a z(w)) \qquad (14)$$

Пусть $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — мультииндекс, $m_i \in N_0$, $|m| = \sum_{i=1}^{n} m_i$ и пусть $P_k(z)$ — однородный полином степени k. Тогда имеет место следующая теорема (мы не выписываем зависимость от w).

Теорема 1. Инвариантные неприводимые однородные полиномы $P_k(z)$ есть решения следующих функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} P_k(\phi(z)) &= \epsilon P_k(z)\, j^m(z), && (15)\\ P_k(\Lambda^a z) &= \nu P_k(z), && (16) \end{aligned}$$

где $j^m(z) \equiv j_1^{m_1} j_2^{m_2} \ldots j_n^{m_n}$, $|m| = k(n-2)$ и $\epsilon, \nu = \pm 1$.

Доказательство. Пусть $P_k(z) = 0$ определяет некоторую инвариантную гиперповерхность в C^n и $P_k(\mu z) = \mu^k P_k(z)$, где $\mu \in C$. Тогда условие инвариантности этой гиперповерхности есть ($\tilde{z} = z(w+1)$):

$$P_k(\tilde{z}) = \frac{P_k(\phi(z))}{\pi^k(z)} = P_k(z)\frac{\mathcal{M}_N(z)}{\pi^k(z)} \,, \qquad (17)$$

где $N \equiv k(n-2)$, $\mathcal{M}_N(z)$ – однородный полином степени N. Совершая в (12) замену $w \to (-w-1)$, получим

$$P_k(\Lambda^a z) = P_k(\Lambda^a \tilde{z})\frac{\mathcal{M}_N(\Lambda^a \tilde{z})}{\pi^k(\Lambda^a \tilde{z})} \,, \qquad (18)$$

Из инвариантности относительно замены $w \to -w$ следует:

$$P_k(z) = 0 \Rightarrow P_k(\Lambda^a \tilde{z}) = 0 \Rightarrow P_k(\Lambda^a z) = \nu P_k(z),\ \nu = \pm 1 \,. \qquad (19)$$

Функции $j(z)$ преобразуются,как это следует из (10), (13) и (14):

$$j'(\tilde{z}) = j(\Lambda^a \tilde{z}) = Ij(z) \qquad j'(z) \stackrel{\text{def}}{=} j(\Lambda^a z) \,. \qquad (20)$$

Тогда из (18) следует:

$$P_k(z) = P_k(\tilde{z})\mathcal{M}_N(\Lambda^a \tilde{z})\pi^k(z) \,, \qquad (21)$$

Подставляя в (21) (17), получим

$$\mathcal{M}_N(z)\mathcal{M}_N(\Lambda^a \tilde{z}) = 1 \,.$$

Определим

$$\mathcal{M}_N(z) = \mathcal{M}_N\left(B^{-1}A^{-1}j(z)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{M}}_N(j(z)) \,.$$

Итак,

$$\overline{\mathcal{M}}_N(j(z))\,\overline{\mathcal{M}}_N(j'(\tilde{z})) = 1 \,.$$

Так как $\overline{\mathcal{M}}_N(\mu j) = \mu^N \overline{\mathcal{M}}_N(j)$, $N = k(n-2)$, то

$$\overline{\mathcal{M}}_N(j) = \sum_{|m|=N} C_N^{m_1 m_2 \cdots m_n} j^m,$$

где $m \stackrel{\text{def}}{=} (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $m_i \in N_0$ и $j^m \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} j_i^{m_i}$.

Тогда имеем ($C_N^m \stackrel{\text{def}}{=} C_N^{m_1 m_2 \cdots m_n}$):

$$\sum_{|m|=N} C_N^m j^m \sum_{|m'|=N} C_N^{m'} j'^{m'}(\tilde{z}) = 1. \tag{22}$$

Из (22) с учетом (20) следует ($m - m' \stackrel{\text{def}}{=} m'' \in Z^n$)

$$\sum_{|m''|=0} j^{m''} \sum_{\substack{|m'|=N \\ |m'+m''|=N}} C_N^{m'+m''} C_N^{m'} = 1\,. \tag{23}$$

Из (23) имеем:

1) $m'' = 0$; $m_i'' = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{|m'|=N} \left(C_N^{m'}\right)^2 = 1\,; \tag{24}$$

2) $m'' \neq 0$; $|m''| = 0$; $m'' \in Z^n$, $|m_i''| \leq N$:

$$\sum_{\substack{|m'|=N \\ |m'+m''|=N}} C_N^{m'+m''} C_N^{m'} = 0\,. \tag{25}$$

Допустим, что при каком-то одном $m^{(1)} = (m_1^{(1)}, \ldots, m_n^{(1)})$, $|C_N^{m^{(1)}}| = 1$. Тогда все остальные коэффициенты в силу (24) равны 0. Пусть теперь два коэффициента отличны от нуля $C_N^{m^{(1)}} = \alpha$ и $C_N^{m^{(2)}} = \beta$. Тогда из (24) и (25) имеем

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1,\ \alpha\beta = 0\,.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha = 0,\ |\beta| = 1 \text{ или } |\alpha| = 1,\ \beta = 0\,.$$

Повторяя аналогично рассуждения для трех и более коэффициентов, отличных от нуля, мы неизменно приходим к тому, что лишь один коэффициент отличен от нуля и равен $\epsilon = \pm 1$.

Итак,

$$\overline{\mathcal{M}}_N(j) = \epsilon j^m, \text{ где } \epsilon = \pm 1,\quad |m| = k(n-2), \tag{26}$$

что и требовалось доказать.

4. Классификация алгебраической и неалгебраической интегрируемости динамических систем вида (1)-(2)

Определение 1. Назовем минимальные однородные полиномы — решения системы уравнений (15) и (16) парциальными автоморфными формами для д.с. (1),(2) веса $m = (m_1, \ldots, m_n)$.

Определение 2. Назовем д.с. (1)-(2) алгебраически интегрируемой, если она имеет $(n-2)$ независимых первых алгебраических интегралов, линии уровня которых задаются $(n-2)$ произвольными периодическими функциями w в дополнение к $\alpha(w)$ и $\beta(w)$ из (5), (6).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для того, чтобы д.с. (1)-(2) была алгебраически интегрируема (в обычной терминологии — интегрируема) достаточно, чтобы она имела $2n-2$ алгебраически независимые парциальные автоморфные формы P_k^i, $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$.

Доказательство. Пусть мы имеем $(2n-2)$ алгебраически независимые парциальные автоморфные формы $P_{k_i}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$. Тогда образуем $n-2$ произведения ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$

$$\psi_i(z) = \prod_{j=1}^{n} \left[P_{k_j}^{(j)}(z)\right]^{l_j} \left[P_{k_{n+i}}^{(n+i)}(z)\right]^{l_{n+i}}, \tag{27}$$

где $l_j \in Z$, $j \in (1, 2, \ldots, 2n-2)$. При сдвиге $w \to w+1$, $z \to \tilde{z}$ $\psi_i(\tilde{z})$ примет вид согласно (15), (11):

$$\psi_i(\tilde{z}) = \epsilon \psi_i(z) \prod_{r=1}^{n} j_r^{\,q_r^{(i)}}, \tag{28}$$

где

$$q_r^{(i)} = \sum_{s=1}^{n} (m_r^{(s)} - k_s) l_s + (m_r^{(n+i)} - k_{n+i}) l_{n+i}. \tag{29}$$

Решая линейную систему из n уравнений $q_r^{(i)} = 0$, $r = 1, 2, \ldots, n$ относительно неизвестных $y_j = l_j / l_{n+i}$, $y_j \in Q$, $j = 1, 2, \ldots, n$, мы получим $(n-2)$ набора решений для рациональных величин $y^{(i)} = (y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})$. Приведя каждый из наборов $y^{(i)}$ к общему знаменателю, мы получим $n-2$ набора целочисленных векторов $\{l_j^{(i)}, l_{n+i}^{(i)}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ и, тем самым, $n-2$ первых интеграла (27).

Имеет место следующее утверждение, доказываемое аналогично.

Теорема 3. Если д.с. (1)-(2) имеет $2n-2-l$ $(1 \leq l \leq n-2)$ алгебраически независимых автоморфных форм веса m, то она имеет $(n-2-l)$ первых алгебраических интегралов. Если при этом д.с. (1)-(2) имеет l первых голоморфных неалгебраических интегралов, то она неалгебраически интегрируема.

Если д.с. (1)-(2) не является алгебраически интегрируемой, то вопрос существования голоморфных интегралов решается на основе локальной теории диффеоморфизмов.

Введем $x = (x_1(w), \ldots, x_{n-1}(w))$, $x \in C^{n-1}$: $z(w) = (x(w) z_n(w), z_n(w))$. Тогда (см. (12)—(14))

$$x(-w) = \bar{\Lambda}^a x(w), \tag{30}$$

$$x(w+1) = \frac{\bar{\phi}(x z_n, z_n)}{\phi_n(x z_n, z_n)} \stackrel{\text{def}}{=} f(x), \tag{31}$$

$$z_n(w+1) z_n(w) = \frac{\phi_n(x, 1)}{\pi(x, 1)}, \tag{32}$$

где $\bar{\Lambda}_{ij}^a = \Lambda_{ij}^a$, $\bar{\phi}_k = \phi_k$, $f_k = \frac{\phi_k(x,1)}{\phi_n(x,1)}$, $i, j, k = 1, \ldots, n-1$.

Рассмотрим отображение (31) в окрестности неподвижной точки, которую без ограничения общности будем считать нулевой.

Определение. Набор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in C^n$ собственных чисел линейной части отображения называется мультипликативно резонансным, если существует целочисленный вектор $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n), m_i \geq 0, |m| = \sum m_i \geq 2$, такой, что для некоторого $j \in (1, 2, \ldots, n)$ выполняется равенство

$$\lambda_j = \lambda^m,$$

где $\lambda^m = \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n}$.

В резонансном случае отображение приводится к нормальной форме на основе теоремы Пуанкаре-Дюлака. В [13] дан пример неалгебраически интегрируемой д.с. (1)-(2), сохраняющей площадь и имеющей резонанс. В нерезонансном случае имеет место следующая теорема Зигеля.

Определение. Набор $\lambda \in C^n$ называется набором мультипликативного типа (C, ν), если для всех $j \in (1, 2, \ldots, n), m_i \in Z_+, |m| = \sum m_i \geq 2$ выполняются неравенства

$$|\lambda_j - \lambda^m| \geq C|m|^{-\nu}. \tag{33}$$

Теорема Зигеля. Если набор собственных чисел линейной части голоморфного отображения в окрестности неподвижной точки имеет мультипликативный тип (C, ν) при некоторых $C > 0, \nu > 0$, то отображение биголоморфно эквивалентно в некоторой окрестности неподвижной точки своей линейной части (см. [17], с. 194).

Таким образом, интегрирование отображения (31) зависит от принадлежности набора λ мультипликативному (C, ν) типу. Оказывается, что имеет место следующая теорема, дополняющая теорему Зигеля.

Теорема 4. Набор $\lambda \in C^n$ имеет мультипликативный тип (C, ν), если набор λ мультипликативно нерезонансен и числа $\lambda_i \in A$–алгебраическому числовому полю.

Доказательство. Эта теорема есть прямое следствие теоремы из [18] (см. с. 192) об оценках линейных форм логарифмов алгебраических чисел. Пусть $min|\lambda_j| = c_1 > 0$ и так как $|e^z - 1| \geq \frac{1}{2}|z|$ для $|z| \leq \frac{1}{2}$, то

$$|\lambda_j - \lambda^m| \geq c_1 |1 - \exp(\sum_i (m_i - \delta_{ij}) \ln \lambda_i)| \geq \frac{c_1}{2} |\sum_i (m_i - \delta_{ij}) \ln \lambda_i|.$$

Поскольку λ_i мультипликативно нерезонансны, то $\ln \lambda_i$ линейно независимы, условия теоремы из [18] выполнены и мы получаем неравенство (33).

В следующей работе на основе этой теоремы и теоремы Зигеля будет проинтегрирована д.с. (1)-(2) с матрицей кроссинг-симметрии $A^{Chew-Low}$.

Автор глубоко благодарен В.В. Козлову за неоднократные полезные обсуждения и поддержку. Автор также благодарен за полезные обсуждения С.В. Болотину, А.Д. Брюно, И.М. Кричеверу, В.Б. Приезжеву и Н.И. Фельдману.

Литература

[1] J. Moser, SIAM Rev., 1966, v. 8, p. 145.

[2] J.K. Moser, Math. Ann., 1967, v. 169, p. 136.

[3] J.K. Moser, Stable and random motion in dynamical systems Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.

[4] V.I. Arnol'd, in: Nonlinear and turbulent processes in physics, ed. R.Z. Sagdeev (Harwood, Chur), 1984, p. 1161.

[5] V.I. Arnol'd and M.B. Sevryuk, in: Nonlinear phenomena in plasma physics and hydrodynamics, ed. R.Z. Sagdeev (Mir, Moscow, 1986) p. 31.

[6] K.M. Khanin and Ya.G. Sinai, in: Nonlinear phenomena in plasma physics and hydrodynamics, ed. R.Z. Sagdeev (Mir, Moscow, 1986) p. 93.

[7] M.B. Sevryuk, Reversible systems., Lect. Notes in Math., v. 1211, Springer, Berlin, 1986.

[8] R.L. Devaney, Trans. Am. Math. Soc., 1976, v. 218, p. 89.

[9] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, Physica D, 1989, v. 34, p. 183.

[10] H. Hudson, Cremona transformations in plane and space, University Press, Cambridge, 1927.

[11] Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1982, т. 3, с. 94–95.

[12] Д.В. Ширков, В.В. Серебряков, В.А. Мещеряков. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., Наука, 1967.

[13] K.V. Rerikh, Physica D, 1992, v. 57, p. 337.

[14] J. Moser, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1960, p.176

[15] А.П. Веселов. Мат. заметки, 1989, т. 45, с. 118.

[16] В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фунд. напр., 1985, т. 1, с. 7.

[17] В.И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.

[18] Н.И. Фельдман. Седьмая проблема Гильберта, М., издательство МГУ, 1982.

[19] Н.И. Фельдман. Матем. сб., 1968, т. 77 (119), 3, с. 256.

[20] Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. М., Наука, 1966.

[21] В.А. Мещеряков. Препринт ОИЯИ Р-2369, Дубна, 1965.

[22] P.B. Fairlie, J.Math.Phys., 1966, v. 7, p. 811.

[23] G. Wanders, Nuovo Cimento, 1962, v. 23, p. 817.

[24] В.А. Мещеряков. ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 648.

[25] В.А. Мещеряков. Препринт ОИЯИ Р-1965, Дубна, 1965.

[26] T. Rothelutner, Z. Phys., 1964, v. 177, p. 287.

[27] В.И. Журавлев, В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. ЯФ, 1969, т. 10, с. 168.

[28] V.A. Meshcheryakov and K.V. Rerikh, Ann. Phys., 1970, v. 59, p. 408.

[29] В.А. Мещеряков. Сообщения ОИЯИ Р2-5906, Дубна, 1971.

[30] В.А. Мещеряков. Сообщения ОИЯИ Р2-7047, Дубна, 1973.

[31] В.П. Гердт, В.А. Мещеряков. ТМФ, 1975, т. 24, с. 155.

[32] К.В. Рерих. ТМФ, 1982, т. 50, с. 251.

[33] К.В. Рерих. Препринт ОИЯИ Р2-83-459, Дубна, 1983.

[34] К.В. Рерих. Препринт ОИЯИ Р2-82-813, Дубна, 1982.

[35] K.V. Rerikh, *Proc. of the XIII Int. Conf. on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, Shumen, Bulgaria, 1984, World Scientific, Singapore, 1986, p. 170.

[36] K.V. Rerikh, *Proc. of the XIX Int. Symp. on Special Topics in Gauge Field Theories.* Ahrenshoop, GDR, 1985, p. 236.

[37] К.В. Рерих. Сообщения ОИЯИ Р2-86-798, Дубна, 1986.

[38] К.В. Рерих. Сообщения ОИЯИ Р2-87-514, Дубна, 1987.

[39] H. Kaiser, Ann. Physik 1971, v. 27, 7F, p. 149.