объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-92-306

П.Е.Жидков, В.Ж.Сакбаев

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ОБЫКНОВЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Направлено в журнал "Математические заметки"

1992

§I. Введение

В работе рассматривается краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на полупрямой:

$$\begin{cases} y'' + \frac{N-1}{x} y' = f(y), \; x > 0, & \text{(I)} \\ y'(0) = y(+\infty) = 0, & \text{(2)} \end{cases}$$

где f – гладкая функция, а $N > 1$. Считая $f(0) = 0$, рассматриваются вопросы существования ее нетривиальных решений.

Задача (I)-(2) изучалась во многих работах (см.,например, /I-I3/). В работах /I-9/ рассматривались вопросы существования решения для функции $f(y) = y - |y|^{k-1} y$, $k > 1$, и подобных ей. В /4/ (см. также /I4/) доказано, что в этом случае задача не имеет нетривиальных решений при любых $k \geqslant \frac{N+2}{N-2}$, $N > 2$. Для $f(y)$ указанного вида окончательный результат о существовании решений приведен в обзоре /9/: для любого $k \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ и любого целого $\ell \geqslant 0$ существует решение задачи (I)-(2), имеющее на полупрямой $[0, +\infty)$ ровно ℓ корней. Теорема существования счетного числа решений при значительно более общих предположениях об f (но без указания на качественное поведение этих решений) имеется в работе /7/.

Другой задачей для (I)-(2) является вопрос о количестве решений с заданным числом корней. Отметим работы /I0-I3/, в которых изучается единственность положительных решений. Для $f(y) = y - y^k$, $k > 1$ окончательный результат получен в работе /I3/: если $k \in (1, \frac{N+2}{N-2})$, то положительное решение существует и единственно. Работ, посвященных исследованию количества решений с заданным числом корней $\ell \geqslant 1$ для задачи (I)-(2), нет. Отметим только работу /I5/, в которой для уравнения

$$y'' + a(x) y' = f(y) \;, \; x > 0$$

с граничными условиями (2) и монотонно возрастающей положительной функцией $a(x)$ при некоторых предположениях на f, допускающих $f(y) = y - |y|^{k-1} y$, $k > 1$, доказано утверждение: для любого целого $\ell \geqslant 0$ существует одно (с точностью до знака) решение этой краевой задачи с ℓ корнями.

В настоящей работе устанавливается теорема существования решений с любым заданным числом корней для нечетной $f(y)$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{f(y)}{y}=\lambda\le 0$, причем $f(y)$ имеет ровно один положительный корень (точная формулировка приведена в §2). Отметим, что допускаются функции $f(y)=y[1-\lambda(1-e^{-y^2})]$, $(\lambda>1)$ и $f(y)=ay-\frac{y^2}{1+y^2}y$, $a\in(0,1)$, которые встречаются в физических работах (см. обзор /I6/). Как было замечено выше, случай $\frac{f(y)}{y}\to-\infty$ $(y\to\infty)$ и случай, когда $f(y)$ имеет два положительных корня /7/, достаточно полно исследованы. Таким образом, работа дополняет проведенные ранее исследования для задачи (I)-(2).

В работе так же, как и в /2,5,6,8,9-I3/, используются методы качественной теории дифференциальных уравнений. Другой распространенный метод исследования задачи (I),(2) - вариационный. В работе /7/ он реализован в сочетании с теорией критических точек Люстерника - Шнирельмана, а еще одна его разновидность используется в работах /3,4/.

О содержании работы. §2 содержит некоторые предварительные сведения. Вместо задачи (I)-(2) рассматривается задача Коши для уравнения (I). Приведены (без доказательства) теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от начального условия и от правой части для решений этой задачи. Далее сформулированы основные результаты работы, которые составляют теоремы 5 и 6. Теорема 5 утверждает, что при некоторых предположениях на f задача Коши имеет решение со сколь угодно большим числом корней, а теоремой 6 устанавливается, что точная нижняя грань множества начальных значений y_0, при которых решение задачи Коши имеет не менее $(\ell+1)$ корней, определяет решение, удовлетворяющее краевой задаче (I)-(2) и имеющее ровно ℓ корней. §3 содержит доказательство теоремы 5, и §4 - теоремы 6. В §5 приведены обобщения полученных результатов. В заключение заметим, что теорема 6 ранее встречалась (в несколько иной форме) в работах /9,I7/. Однако в указанных работах это утверждение доказывалось при помощи значительно более сложных рассуждений.

§2. Предварительные сведения. Основные результаты

Вместо краевой задачи (I)-(2) рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y''+\frac{N-1}{x}y'=y\cdot\varphi(y), \quad x>0, & (3)\\ y(0)=y_0, \quad y'(0)=0, & (4)\end{cases}$$

где $N>1$, $y_0\in R$.

Сформулируем основные предположения на $f(y)=y\cdot\varphi(y)$.

(HI) $f(y)$ является непрерывно дифференцируемой нечетной функцией.

(H2) Пусть $U(y)=-2\int_0^y f(s)\,ds$. Тогда $U(+\infty)>0$ (может быть $U(+\infty)=+\infty$).

(H3) Функция $f(y)$ имеет единственный положительный корень y_1.

(H4) $f'(0)>0$.

(H5) Существует $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi(y)=\varphi_0\le 0$.

При выполнении условий (HI)-(H3) имеют место следующие результаты (теоремы I-3′).

<u>Теорема I.</u> (Существование). Для любого $y_0\in R$ существует решение задачи Коши (РЗК) (3)-(4), определенное для всех $x\ge 0$.

<u>Теорема 2.</u> (Единственность). Для любого $y_0\in R$ задача (3)-(4) не может иметь более одного решения.

<u>Теорема 3.</u> (Непрерывная зависимость). Для любого промежутка $0\le x\le A<+\infty$ и любого $y_0\in R$ имеет место непрерывная зависимость решения и его первой производной от y_0 на этом промежутке, т.е. если $y(x)$ - РЗК (3)-(4) при $y(0)=y_0$, а $\tilde{y}(x)$ - при $y(0)=\tilde{y}_0$, то справедливо следующее утверждение: для любых $y_0\in R$, $\varepsilon>0$ и $A>0$ существует $\delta>0$ такое, что $|y^{(k)}(x)-\tilde{y}^{(k)}(x)|<\varepsilon$ для любого $x\in[0,A]$ и для всех $\tilde{y}_0$ таких, что $|y_0-\tilde{y}_0|<\delta$, $(k=0,1.)$.

<u>Теорема 3′.</u> Если функция $u(x)$ является решением задачи Коши на отрезке $[0,b]$

$$\begin{cases} u''+\frac{N-1}{x}u'-\lambda u=h(x), \quad x\in(0,b]\\ u(0)=\alpha, \quad u'(0)=0,\end{cases}$$

где $\alpha, \lambda, b>0$ - постоянные, $h(x)\in C[0,b]$, то для любых $\varepsilon>0$, функции $h(x)\in C[0,b]$ существует $\delta>0$ такое, что $|u(x)-\tilde{u}(x)|<\varepsilon$ для любых $x\in[0,b]$ и для всех $\tilde{h}(x)$ из $C[0,b]$ таких, что $\max\limits_{x\in[0,b]}|h(x)-\tilde{h}(x)|<\varepsilon$.

Теоремы I-3 доказаны в /2/ для $\varphi(y)=1-|y|^{k-1}$, где $k>1$. Доказательство переносится на общий случай задачи (3)-(4). Теорема 3′ может быть доказана аналогично.

Решение задачи (3)-(4) удовлетворяет тождеству

$$[y'^2(x)+U(y(x))]'=-\frac{2(N-1)}{x}y'^2(x). \qquad (5)$$

Определим $W(x)=(y'(x))^2+U(y(x))$. Тогда из (5) следует, что $W'(x)\leqslant 0$ для любого $x\geqslant 0$ и что $W(x)\leqslant W(0)$ для любого $x>0$. Следовательно, $|y(x)|\leqslant|y(0)|=|y_0|$ для любого $x>0$. В дальнейшем будем предполагать выполненными предположения (H1)-(H5).

Основным результатом работы является следующая

Теорема 4. Для любого целого $\ell\geqslant 0$ существует решение краевой задачи (I)-(2), имеющее ровно ℓ корней.

Теорема 4 вытекает из следующих двух результатов:

Теорема 5. Для любого целого $\ell\geqslant 0$ существует $y_0^{(\ell)}>0$ такое, что РЗК (3)-(4) имеет не менее ℓ корней при $y_0=y_0^{(\ell)}$.

Теорема 6. Пусть Y_ℓ - множество всех значений $y_0>0$, при которых решение $y(x)$ задачи (3)-(4) имеет не менее $\ell+1$ корней. Пусть y_ℓ^* – точная нижняя грань Y_ℓ . Тогда РЗК (3)-(4) $y_\ell^*(x)$, соответствующее $y_0=y_\ell^*$, имеет ровно ℓ корней и $\lim\limits_{x\to\infty}y_\ell^*(x)=0$, т.е. $y_\ell^*(x)$ удовлетворяет задаче (I)-(2).

Замечание. В дальнейшем через $C, C_1, C_2, \alpha, \gamma, \Delta$ будем обозначать положительные постоянные.

§3. Доказательство теоремы 5

Сначала рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi(y)=\lambda<0$. Сделаем замену $U(x)=\frac{y(x)}{y_0}$. Тогда в соответствии с (3)-(4)

$$\begin{cases} U''+\frac{N-1}{x}U'=U\varphi(y_0U), \quad x>0, & (6)\\ U(0)=1, \quad U'(0)=0. & (7)\end{cases}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} \omega''+\frac{N-1}{x}\omega'=\lambda\omega, \quad x>0 & (8)\\ \omega(0)=1, \quad \omega'(0)=0 & (9)\end{cases}$$

Для любого отрезка $\mathcal{L}=[0,C]$ справедлива лемма:

Лемма I. Решение задачи (7)-(6) $U(x)$ равномерно сходится к решению задачи (8)-(9) $\omega(x)$ на отрезке $\mathcal{L}$ при $y_0\to\infty$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u=U-\omega$ на $\mathcal{L}$. $U(x)$ соответствует некоторому y_0 . Функция $u(x)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} u''+\frac{N-1}{x}u'=\lambda u+U(\varphi(y_0U)-\lambda), \quad x>0, & (10)\\ u'(0)=0, \quad u(0)=0. & (11)\end{cases}$$

Фиксируем некоторое $\varepsilon>0$. Обозначим $\Delta(x)=U(x)(\varphi(y_0U)-\lambda)$.

Ясно, что существует $\overline{y}>0$ такое, что для всех $y_0>\overline{y}$ $|\Delta(x)|<\varepsilon$. Далее, по теореме 3 и в силу (10)-(11) получаем, что при $y_0\to\infty$ $u(x)$ равномерно стремится к нулю на $\mathcal{L}$. По теореме 3' лемма I доказана.

Функция $\omega(x)$, очевидно, имеет бесконечную последовательность корней. Таким образом теорема 5 для случая $\varphi_0<0$ доказана.

Пусть теперь $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi(y)=0$, $\varphi(y)<0$ для всех достаточно больших y . По предположению (H2) найдется y_0 такое, что $W(0)=U(y_0)>0$. Рассмотрим два случая:

а) Существует $C>0$ такое, что $W(x)\geqslant C$ для всех $x\geqslant 0$.

б) Такого C не существует.

а) Докажем, что в этом случае $y(x)$ имеет бесконечное число корней. Функция $y(x)$ не может иметь асимптот, допустимых уравнением (3) $y=-y_1, 0, y_1$, так как в этом случае $\lim\limits_{x\to\infty}W(x)\leqslant 0$, что противоречит предположению. Итак, у $y(x)$ нет асимптот. Следовательно, $y(x)$ имеет бесконечную последовательность экстремумов. Но поскольку $W(x)>0$, функция $y(x)$ может достигать максимума только при $y>y_1$, а минимума-лишь при $y<-y_1$. Таким образом, $y(x)$ имеет бесконечную последовательность корней.

б) Пусть $x_1=x_1(y_0)$ таково, что $y(x_1)=\frac{y_0}{2}$ и $y(x)>\frac{y_0}{2}$ при $y>y_1$. Оценим x_1 снизу: $|y(x_1)-y(0)|<x_1\cdot\max\limits_{x\in[0,x_1]}|y'(x)|$, следовательно, $x_1\geqslant\frac{y_0}{2\max\limits_{x\in[0,x_1]}|y'(x)|}\geqslant\frac{y_0}{2\sqrt{U(y_0)-U(\frac{1}{2}y_0)}}$. Но $U(y_0)-U(\frac{1}{2}y_0)\leqslant$ $\leqslant y_0\cdot\max\limits_{y\in[\frac{1}{2}y_0,y_0]}|y\varphi(y)|\leqslant y_0^2\max\limits_{y\in[\frac{1}{2}y_0,y_0]}|\varphi(y)|$. Поэтому $x_1\geqslant$ $\geqslant\left(2\sqrt{\max\limits_{y\in[\frac{1}{2}y_0,y_0]}|\varphi(y)|}\right)^{-1}\longrightarrow\infty$ при $y_0\to\infty$. Фиксируем $C\in(0,U(+\infty))$. По предположению для всех достаточно больших $y_0>0$ найдется точка x_2 , для которой $W(x_2)=C$, причем $x_2>x_1$. Пусть $x_2\leqslant\overline{x}_1<\overline{x}_2<\ldots$ $\ldots<\overline{x}_m$ - последовательность соседних точек экстремума $y(x)$. Тогда на $(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1})$, $i=1,2,\ldots m-1$, $y'(x)$ имеет постоянный знак. Следовательно,

$$W(\overline{x}_1)-W(\overline{x}_m)=2(N-1)\int\limits_{\overline{x}_1}^{\overline{x}_m}\frac{1}{x}y'^2(x)dx\leqslant\frac{2(N-1)}{\overline{x}_1}\int\limits_{\overline{x}_1}^{\overline{x}_m}y'^2(x)dx\leqslant\frac{2(N-1)}{\overline{x}_1}\sum_{i=1}^{m-1}\int\limits_{\overline{x}_i}^{\overline{x}_{i+1}}y'^2(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2(N-1)}{\overline{x}_1}\sum_{i=1}^{m-1}\max_{x\in[\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1}]}|y'(x)|\cdot\max_{x_1,x_2\in[\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1}]}|y(x_1)-y(x_2)|=$$

$$=\frac{\overline{C}(m-1)}{\overline{x}_1}\sqrt{C-U(y_1)}\cdot U^{-1}(C)\leqslant\frac{C_1}{x_1}(m-1),$$

где $C_1=4(N-1)V^{-1}(c)\sqrt{C-V(y_1)}$. Поэтому $W(\bar{x}_i)>0$, $i=\overline{1,m}$, если $m\leq\frac{1}{C_1}W(\bar{x}_1)\cdot x_1\leq\frac{C}{C_1}\cdot x_1=m^*$. Отметим, что x_1 зависит от y_0 и что $m^*\to\infty$ при $y_0\to\infty$. Поскольку решение $y(x)$ при $x\leq\bar{x}_m$ может иметь экстремум лишь в области $|y|>y_1$, доказано, что число корней неограниченно возрастает при $y_0\to\infty$. Теорема 5 доказана.

§4. Доказательство теоремы 6

Обозначим через y_2 такое значение y , что $V(y_2)=0$, $y_2>y_1$. При $y_0\in[0,y_2)$ $y(x)$ корней не имеет. В силу теоремы 5 множество Y_ℓ непусто для любого ℓ .

Пусть $y(x)$ — решение задачи (3)-(4), $\{x_n\}$, $n=1,2,3\ldots$ - последовательность занумерованных в порядке возрастания корней $y(x)$, причем заранее неизвестно, конечна ли эта последовательность. $\{\bar{x}_n\}$, $n=0,1,2,\ldots$ - последовательность занумерованных в порядке возрастания корней $y'(x)$, причем $\bar{x}_0=0$. Пусть $y_{\frac12}=\frac12 y_1$, $y_{3/2}$ - такое, что $y_{3/2}\in(y_1,y_2)$ и $V(y_{3/2})=V(y_{1/2})$. Нетрудно проверить, что между корнями x_n и x_{n+1} функции $y(x)$ лежит единственный корень $y'(x)$. Поэтому $0=\bar{x}_0<x_1<\bar{x}_1<x_2<\ldots$.

Выберем некоторое x_n . Пусть x_n - не последний корень и существует x_{n+1} . Тогда $W(\bar{x}_n)>W(x_{n+1})=y'^2(x_{n+1})>0$. Следовательно, $V(y(\bar{x}_n))>0$, $y(\bar{x}_n)>y_2$.

Оценим расстояние $|\bar{x}_n-x_n|$, $|x_n-\bar{x}_{n-1}|$.

Лемма 2. Пусть I - ограниченное множество из $[0,+\infty)$ и при $y_0\in I$ решения (3)-(4) $y(x)$ имеют не менее ($n+1$) корней. Тогда существуют постоянные a и b , не зависящие от n и от $y_0\in I$, такие, что выполнены следующие неравенства

$$|\bar{x}_{k-1}-x_k|<a+b\ln(\bar{x}_k+1),\quad |\bar{x}_k-x_k|<a+b\ln(\bar{x}_k+1),\quad k=\overline{1,n}. \tag{12}$$

Доказательство

Пусть $n\geq1$, $k=1$. Тогда $W(\bar{x}_1)>0$ и, значит, $W(x_1)-2\int_{x_1}^{\bar{x}_1}y'^2(x)\frac{N-1}{x}dx>0$. Следовательно, $y'^2(x_1)\geq2\int_{x_1}^{\bar{x}_1}\frac{N-1}{x}(y'(x))^2dx\geq$ $\geq\frac{2(N-1)}{\bar{x}_1}\int_{x_1}^{\bar{x}_1}y'(x)^2dx$ Пусть для определенности $y(\bar{x}_1)>0$. Тогда $y(x_1)>y_2$. Следовательно, существуют точки r и s такие, что $y(r)=y_{1/2}$, $y(s)=y_{3/2}$, $r,s\in[x_1,\bar{x}_1]$. Тогда $\int_{x_1}^{\bar{x}_1}y'^2(x)dx\geq\min_{x\in[r,s]}|y'(x)|\cdot|y(r)-y(s)|\geq C_2>0.$ Значит $|y'(x_1)|>C_2(x_1)^{-1}=A(\bar{x}_1).$

Докажем неравенства (12) при $k=1$. Пусть для определенности $y(0)>0$. Обозначим через $p,q\in(0,x_1)$ такие точки, что $y(p)=y_{3/2}$, $y(q)=y_{1/2}$. При $x\in[0,p]$ $y(x)\geq y_{3/2}$, поэтому $\varphi(y(x))\leq-\gamma^2<0$ (поскольку $|y(x)|\leq y_0\in I$). Сделаем замену $u=x^{\frac{N-1}{2}}y$. Тогда уравнение (3) в новых переменных будет иметь вид

$$u''=\varphi(y(x))\cdot u+\frac{(N-3)(N-1)}{4x^2}u. \tag{13}$$

Пусть $a_1=\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac12|(N-1)(N-3)|}$, где $\gamma=const>0$, , тогда $\left|\frac{(N-1)(N-3)}{4x^2}\right|<\frac12\gamma^2$ при $x>a_1$. Докажем оценку $p\leq a_1+\frac{2\pi\sqrt2}{\gamma}$. Предположим, что $p>a_1+\frac{2\pi\sqrt2}{\gamma}$. Тогда на отрезке $[a_1,p]$ функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению $u''=Q(x)u$, где $Q(x)=\frac{(N-1)(N-3)}{4x^2}+\varphi(y(x))$, $Q(x)\leq-\frac12\gamma^2$ на $[a,p_1]$. Следовательно, согласно теореме сравнения, функция $u(x)$ имеет по крайней мере один нуль на отрезке $[a_1,a_1+\frac{2\pi\sqrt2}{\gamma}]$. Полученное противоречие доказывает, что $p\leq a_1+\frac{2\pi\sqrt2}{\gamma}$. Далее, на отрезке $[p,q]$ $W(x)>0$, поэтому $|y'(x)|>\sqrt{-V(\frac12y_1)}$. Поэтому $q-p<(y_{3/2}-y_{1/2})\cdot(-V(\frac12y_1))=\Delta>0$. Таким образом, $q<a_1+\frac{2\pi\sqrt2}{\gamma}+\Delta$. При $x\in[q,x_1]$ $0<y(x)<\frac{y_1}{2}$. Поэтому $\varphi(y(x))\geq\alpha^2>0$ для любого x из $[q,x_1]$. Обозначим $a_2=\max\{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac12|(N-1)(N-3)|};a_1+\frac{2\pi\sqrt2}{\gamma}+\Delta\}$. Пусть $a_2<x_1$. Тогда на отрезке $[a_2,x_1]$ функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению $u''=P(x)u$, где $P(x)\geq\frac12\alpha^2$ для любого $x\in[a_2,x_1]$. Известно, что $y(x_1)=0$; $|y'(x_1)|>A(\bar{x}_1)$, поэтому $u(x_1)=0$; $u'(x_1)>x_1^{\frac{N-1}{2}}\cdot A(\bar{x}_1)$. Учитывая, что $u'(x_1)<0$, $u(x)>0$ при $x<x_1$, получаем, что при $x\in[a_2,x_1]$ $u(x)\geq z(x)$, где $z(x)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} z''=\frac12\alpha^2 z, & x<x_1 \\ z(x_1)=0, & z'(x_1)=-x_1^{\frac{N-1}{2}}\cdot A(\bar{x}_1), \end{cases}$$

откуда

$$y(x)\geq\frac{\sqrt2}{\alpha}sh\left(\frac{\alpha}{\sqrt2}(x_1-x)\right)\left(\frac{x_1}{x}\right)^{\frac{N-1}{2}}\cdot A(\bar{x}_1) \tag{14}$$

при $x\in[a_2,x_1]$. Но $q\leq a_2$, поэтому $y(a_2)\leq\frac12y_1$. Логарифмируя (14), получаем $x_1-a_2<C_1\ln(\bar{x}_1+1)+C_2$, откуда следует оценка (12) для $x_1-\bar{x}_0$. Если же $x_1<a_2$, то это неравенство очевидно. Аналогичными рассуждениями можно получить, что $|x_1-\bar{x}_1|<$ $<a+b\ln(\bar{x}_1+1)$. Рассуждения проводились для $k=1$, но они справедливы для любого $k=2,3,\ldots,n$.

Лемма 2 доказана.

Докажем теорему 6.

Так как y_ℓ^* - точная нижняя грань множества Y_ℓ , то решение

$y_\ell^*(x)$ имеет на $[0,+\infty)$ не более чем ℓ корней (по теореме 3). Докажем, что $y_\ell^*(x)$ имеет ровно ℓ корней. Рассмотрим последовательность $\{y_{0k}\} \in Y_\ell$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_{0k} = y_\ell^*$. Ей соответствует последовательность решений (3)-(4) $\{y_k(x)\}$. Обозначим наименьшие корни $y_k(x)$ через $x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \ldots < x_{\ell+1}^{(k)}$. Согласно лемме 2, $x_i^{(k)} - \bar{x}_{i-1}^{(k)} < a + b\ln(\bar{x}_i^{(k)}+1)$, $\bar{x}_i^{(k)} - x_i^{(k)} < a + b\ln(\bar{x}_i^{(k)}+1)$, $i=\overline{1,\ell}$, где a и b не зависят от k. Учитывая, что $\bar{x}_1^{(k)} < \bar{x}_2^{(k)} < \ldots < \bar{x}_\ell^{(k)}$, сложим эти неравенства и получим

$$\bar{x}_\ell^{(k)} < 2\ell(a + b\ln(\bar{x}_\ell^{(k)}+1)). \tag{I5}$$

Из (I5) следует, что последовательности $x_i^{(k)}$, $i=\overline{1,\ell}$ ограничены. Из соотношения (5) нетрудно показать, что существует такое $C>0$, что $x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} > C$ для любых i, k. Следовательно, $y_\ell^*(x)$ имеет ровно ℓ корней. Обозначим эти корни через $x_1, \ldots, x_\ell$. Пусть для определенности $y_\ell^*(x) > 0$ при $x > x_\ell$. Тогда $y_\ell^*(x) \in [0, y_\ell^*]$ справа от x_ℓ. При $x = x_\ell$ $y_\ell^{*\prime}(x) > 0$. Ограниченная сверху $y_\ell^*(x)$ либо монотонно возрастает, так что $\lim\limits_{x\to\infty} y_\ell^*(x) = \alpha > 0$, либо $y_\ell^*(x)$ имеет максимум. Положим $W_k(x) = (y_k'(x))^2 + V(y_k(x))$, $W^*(x) = (y_\ell^{*\prime}(x))^2 + V(y_\ell^*(x))$. В силу уравнения (3) в первом случае $\alpha = y_1$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} W^*(x) = D < 0$. Поэтому по теореме 3 существует $L > x_\ell$ такое, что $W_k(L) < 0$ для всех достаточно больших k. Поскольку очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\ell+1}^{(k)} = +\infty$ (иначе $y_\ell^*(x)$ имела бы не менее ($\ell+1$) корня), получили противоречие. Итак, существует точка $\bar{x}$ — максимум $y_\ell^*(x)$ на $[x_\ell, +\infty)$. Далее, в правой полуокрестности $\bar{x}$ $y_\ell^{*\prime}(x) < 0$. Ограниченная снизу $y_\ell^*(x)$ может либо убывать к $\alpha \geqslant 0$, либо иметь минимум.

Предположим, что существует минимум $y_\ell^*(x)$ - точка $\tilde{x}$, притом $y_\ell^*(\tilde{x}) > 0$. Тогда, согласно уравнению (3), $y_\ell^*(\tilde{x}) < y_1$. Следовательно, $W^*(\tilde{x}) = V(y_\ell^*(\tilde{x})) < 0$. Но, согласно предыдущим рассуждениям, это приведет к противоречию. Следовательно, $y_\ell^*(x)$ имеет горизонтальную асимптоту. Асимптота $y = y_1$ недопустима, как было показано выше. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} y_\ell^*(x) = 0$.

Теорема 6 доказана.

§5. Обобщение результатов

Заменим предположение (H3) на (H3'). Функция $f(y)$ имеет конечное число положительных корней $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, причем $f'(y_i) \neq 0$, $i=\overline{1,m}$.

Имеет место

<u>Теорема 4'.</u>

Пусть выполнены гипотезы (H1),(H2),(H3'), (H4),(H5). Тогда

для любого целого $\ell \geqslant 0$ существует решение $y_\ell(x)$ задачи (I)-(2), имеющее ровно ℓ корней.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4. Если существует номер $i \in \{1;\ldots;m\}$ такой, что $V(y_i) > 0$, то теорема 5 следует из результатов работы /I7/, в противном случае остается справедливым доказательство из настоящей статьи. Кроме того, теорема 6 остается в силе.

Литература

I. Z.Nehari. On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics. Proc.Royal Irish.Akad. 1963, vol.62, sect. A, p.117-135.

2. Е.П.Жидков, В.П.Шириков. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Ж.выч.матем. и матем.физ. I964, т.4, № 5, стр.804-8I6.

3. G.H.Ryder. Boundary value problems for a class of nonlinear differential equations. Pacif.J.Math. 1967, vol.22, N 3, p.477-503.

4. Е.П.Жидков, В.П.Шириков, И.В.Пузынин. Задача Коши и краевая задача для некоторого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Сообщения ОИЯИ 2005, Дубна, I965.

5. G.Sansone. Su un equazione non linear della fisica nucleare. Symposia Math. 1971, vol.6, p.3-139.

6. J.W.Macky. A singular nonlinear boundary value problem. Pacif.J.Math. 1978, vol.78, N 2, p.375-383.

7. H.Berestycki, P.L.Lions. Existence d'ondes solitaires dens des problems nonlinear du type Klein - Gordon. C.R.Acad.Sci. 1979, vol.AB 288, N 7, p.395-398.

8. Berestycki R., Lions P.L., Peletier L.A. An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in R^N. Indiana Univ.Math.J. 1981, v.30, N 1, p.142-157.

9. И.Т.Кигурадзе, Б.Л.Шехтер. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В сб. "Современные проблемы математики", т.30, М.: ВИНИТИ, I987, стр.I05-20I.

I0. Ch.V.Goffman. Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions. Arch.Rational Mech.Anal. 1972, vol.46, p.81-95.

11. K.McLeod, J.Serrin. Uniqueness of solutions of semilinear Poisson equations. Proc. Nat.Acad.Sci.USA, 1981, vol.78, N 11, p.6592–6595.

12. L.A.Peletier, J.Serrin. Uniqueness of non-negative solutions of semilinear equations in R^N. J.Differ.Equat. 1986, vol.61, N 3, p.380–397.

13. M.K.Kwong. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in R^N. Arch.Rational Mech.Anal. 1989, vol.105, N 3, p.243–266.

14. С.И.Похожаев. О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. ДАН СССР, 1965, т.165, №1, стр.36-39.

15. П.Е.Жидков. О единственности частицеподобных решений с произвольным заданным числом узлов. Вестн.МГУ, сер. 15, Выч.мат. киберн. 1983, №4, стр.12-16.

16. Д.Михалаке, Р.Г.Назмитдинов, В.К.Федянин. Нелинейные оптические волны в слоистых структурах. Физика элемент.частиц и атом.ядра. 1982, т.20, №1, стр.198-253.

17. Е.П.Жидков, П.Е.Жидков. Исследование частицеподобных решений в некоторых моделях нелинейной физики. Сообщ.ОИЯИ, Р5-12609, Р5-12610, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июля 1992 года.

Жидков П.Е., Сакбаев В.Ж. P5-92-306
Об одном нелинейном обыкновенном дифференциальном уравнении

Рассматривается задача $y'' + \frac{N-1}{x} y' = y\,\phi(y),\ x > 0$

$$y'(0) = y(+\infty) = 0,$$

где $N > 1$, $\lim\limits_{y\to\infty} \phi(y) = \lambda \leqq 0$ и $\phi(y)$ - четная. При предположении $\phi(0) > 0$ доказано существование счетного множества решений с любым числом корней. Используется метод качественной теории дифференциальных уравнений. Работа продолжает исследования многих авторов, которые рассматривали функции ϕ при других предположениях.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод авторов

Zhidkov P.E., Sakbaev V.Zh. P5-92-306
On Some Nonlinear Ordinary Differential Equation

The problem considered is $y''+ \frac{N-1}{x}y' = y\phi(y),\ x > 0$

$$y'(0) = y(+\infty) = 0,$$

where $N > 1$, $\lim\limits_{y\to\infty} \phi(y) = \lambda \leqq 0$ and $\phi(y)$ is even. Assuming $\phi(0) > 0$ the existence of the countable set of solutions with any number of roots is proved. We use the method of the qualitative theory of ordinary differential equations. The paper continues the investigations of many authors who considered functions ϕ under other assumptions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992