сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-92-22

П.Е.Жидков

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

1992

Жидков П.Е. Р5-92-22

Об одной нелинейной эллиптической задаче

Рассматривается задача

$$\Delta u + k(x)|u|^{p-2}u = h(x),\ x \in R^N,\ p > 2,$$

$$u|_{|x|\to\infty} = 0,$$

которая ранее изучалась в работах С.И.Похожаева. Задача имеет различные физические приложения. В работе усилен результат Похожаева о существовании решений. Используется метод верхних и нижних решений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод автора

Zhidkov P.E. P5-92-22

On a Nonlinear Elliptic Problem

The problem

$$\Delta u + k(x)|u|^{p-2}u = h(x),\ x\in R^N,\ p > 2,$$

$$u|_{|x|\to\infty} = 0,$$

earlier investigated by S.I.Pokhozhaev is considered. This problem has various physical applications. In this paper the result of Pokhozhaev on the existence of solutions is amplified. The method of upper and lower solutions is used.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992

I . В работах С.И. Похожаева [I-3] рассматривалось следующее нелинейное эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\Delta u + K(x)|u|^{p-2}u = h(x), \quad x \in R^N, \tag{I}$$

$$u|_{|x| \to \infty} = 0, \tag{2}$$

где $K(x)$, $h(x)$ - функции, локально непрерывные по Гёльдеру, $N \geqslant 3$, считалось что $K(x)=1$. В указанных работах изучались вопросы существования (классических) решений задачи (I) - (2). В работе [I] для функции $h(x)$ общего вида доказано существование хотя бы одного решения, а в работах [2,3] - существование континуума решений для $h=h(|x|)$, зависящего лишь от $r=|x|$ и удовлетворяющего некоторым ограничениям и $p>p^*$, где $p^* = \frac{2N}{N-2}$. В первой из указанных работ использовался метод верхних и нижних решений, а в остальных - метод априорных оценок. Отметим здесь еще результат [4], касающийся задачи

$$y'' + \frac{2}{r}y' = f(y), \quad r \geqslant 0, \tag{3}$$

$$y'(0)=0; \quad y(0)=y_0, \tag{4}$$

где y_0 - параметр и $f(y)\begin{cases} < 0 & \text{при} \quad y>0 \\ > 0 & \text{при} \quad y<0 \end{cases}$.

Доказано, что для любого y_0 из некоторой окрестности нуля выполнено: $\lim\limits_{r\to\infty} y(r)=0$.

В настоящей работе усилен результат Похожаева [I] : для $h(x)$ общего вида (не являющейся функцией только $r=|x|$), удовлетворяющей некоторым ограничениям, установлена теорема существования для задачи (1)-(2).

Отметим важность задачи (I)-(2) для физики: такого типа уравнения возникают в ряде физических проблем, например, в теории оптических волн в нелинейной среде [5], а также в теории тепловых явлений и физической и химической кинетике [6,7].

2. Проведем сначала некоторое исследование задачи (I)-(2). Пусть гладкая функция φ зависит лишь от $r=|x|$: $\varphi=\varphi(r)$. Тогда $\Delta\varphi=\varphi''+\frac{N-1}{r}\varphi'$, где штрихи означают производные по r. Подберем функцию $\varphi(r)>0$ так, чтобы было выполнено

$$\Delta\varphi(r)<0$$

для всех $x\in R^N$.

Возьмем $\varphi_m(x)=C(1+x^2)^{-m}$, где $C>0$, $m>0$ — постоянные. Тогда

$$\Delta\varphi_m(r)=\frac{2Cm(2m-N+2)}{(1+r^2)^{m+1}}-\frac{4Cm(m+1)}{(1+r^2)^{m+2}},$$

следовательно, $\Delta\varphi_m<0$ для всех $r\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда

$$m<\frac{N-2}{2}. \qquad (5)$$

Пусть $K_0=\sup\limits_x|K(x)|>0$. Положим $Au=\Delta u+K(x)|u|^{p-2}u-h(x)$, $A_1u=\Delta u+K(x)|u|^{p-2}u$. Подберем $C>0$ и $m\in(0,\frac{N-2}{2})$ так, чтобы выполнялось неравенство $A_1\varphi_m<0$.

В силу (5) достаточно взять m, $C>0$ так, чтобы выполнялось

$$\Delta\varphi_m+K_0|\varphi_m|^{p-2}\varphi_m<0$$

для всех $x\in R^N$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось

$$(p-1)m<m+1, \qquad (6)$$

$$\left(-\frac{2m(2m-N+2)}{K_0}\right)^{\frac{1}{p-2}}>C. \qquad (7)$$

Основной результат работы составляет

<u>Теорема</u>

Пусть $K(x)\geqslant 0$, $h(x)$ — непрерывные по Гельдеру функции, найдутся $C>0$, $m>0$, удовлетворяющие неравенствам (5) - (7). Тогда функции $\underline{u}=-\varphi_m$, $\bar{u}=\varphi_m$ удовлетворяют неравенствам

$$A_1\underline{u}<0,\quad A_1\bar{u}>0.$$

Как следствие для любой функции $h(x)$, такой, что

$$|h(x)|\leq -A_1\varphi_m(x)$$

для всех $x\in R^N$, задача (I) - (2) имеет (классическое) решение.

<u>Замечание I</u>

Из неравенств (5),(6) вытекает

$$p>\frac{2N-2}{N-2}. \qquad (8)$$

Наоборот, если выполнено (8), то найдутся $C>0$, $m\in\left(0,\frac{N-2}{2}\right)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы.

Замечание 2

С.И. Похожаев в работе [2] доказал похожую теорему для $K(x)\equiv 1$ и $p>p^*=\frac{2N}{N-2}$; в указанной работе, однако, были найдены лишь некоторые частные значения параметра m.

3. Докажем теорему. По построению имеем: $\underline{u}<0$, $A\underline{u}\geqslant 0$, $\bar{u}>0$, $A\bar{u}\leqslant 0$, следовательно, $\underline{u}$, $\bar{u}$ – нижнее и верхнее решения задачи соответственно. Положим $u_1(x)=\underline{u}(x)$ и определим по индукции последовательность $\{u_n(x)\}$ по правилу

$$\Delta u_{n+1}-u_{n+1}+u_n+K(x)|u_n|^{p-2}u_n=h(x),\ x\in R^N, \tag{9}$$

$$u_{n+1}\big|_{|x|\to\infty}=0. \tag{10}$$

Ясно, что из (9)-(10) u_{n+1} однозначно определяется.

Лемма I

Для любых n и x имеет место неравенство

$$u_n(x)\leqslant u_{n+1}(x)\leqslant\bar{u}(x).$$

Доказательство проведем по индукции. При $n=1$ в силу (9), (10) имеем:

$$\Delta(u_2-u_1)-(u_2-u_1)\leqslant 0,\quad (u_2-u_1)\big|_{|x|\to\infty}=0,$$

откуда $u_2(x)\geqslant u_1(x)$ для всех x. Аналогично

$$\Delta(\bar{u}-u_2)-(\bar{u}-u_2)\leqslant 0,\quad (\bar{u}-u_2)\big|_{|x|\to\infty}=0,$$

откуда $\bar{u}(x)\geqslant u_2(x)$ для всех x.

Пусть утверждение леммы выполнено для номеров I,2, ..., n. Докажем его для $(n+1)$. Имеем в силу (9), (10) и индуктивного предположения

$$\Delta(u_{n+1}-u_n)-(u_{n+1}-u_n)=$$

$$=-(u_n-u_{n-1})-K(x)\left[|u_n|^{p-2}u_n-|u_{n-1}|^{p-2}u_{n-1}\right]\leqslant 0,$$

$$(u_n-u_{n-1})\big|_{|x|\to\infty}=0,$$

откуда $u_{n+1}(x)\geqslant u_n(x)$ для всех $x\in R^N$. Далее,

$$\Delta(\bar{u}-u_{n+1})-(\bar{u}-u_{n+1})\leqslant-(\bar{u}-u_n)-K(x)\left[|\bar{u}|^{p-2}\bar{u}-|u_n|^{p-2}u_n\right]\leqslant 0,$$

$$(\bar{u}-u_{n+1})\big|_{|x|\to\infty}=0,$$

следовательно, $u_{n+1}(x)\leqslant\bar{u}(x)$ для всех $x\in R^N$.

Лемма I доказана.

В силу леммы I последовательность $\{u_n(x)\}$ монотонно сходится к $u(x)\in(\underline{u}(x),\ \bar{u}(x))$.

Используя функцию Грина $G(|x-y|)=\dfrac{e^{-|x-y|}}{(N-2)\sigma_N\,|x-y|^{N-2}}$ оператора $(-\Delta+1)$ (здесь σ_N – площадь поверхности единичной сферы), можно записать

$$u_{n+1}(x)=\int_{R^N}G(|x-y|)\left\{u_n(y)+K(y)|u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-h(y)\right\}dy. \tag{II}$$

Из (II) следует

Лемма 2

Существует $C>0$ такое, что для всех $x\in R^N$, $n\geqslant 2$ $|Du_n|\leqslant C$

В силу лемм I,2 последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится к $u(x)$ равномерно по $x\in R^N$, причем функция $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Делая теперь предельный переход при $n\to\infty$ в равенстве (II), получим

$$u(x)=\int_{R^N}G(|x-y|)\left\{u(y)+K(y)|u(y)|^{p-2}u(y)-h(y)\right\}dy \tag{I2}$$

для всех $x \in R^N$. Из (12) сразу следует, что $u(x)$ – классическое решение задачи (1)-(2).

Теорема доказана.

Эта работа была написана под влиянием бесед с С.И. Похожаевым, которому автор приносит искреннюю благодарность.

Литература

1. Похожаев С.И. О разрешимости эллиптической задачи в R^n с суперкритическим показателем нелинейности. ДАН СССР, 1990, т. 313, № 6, с. 1356-1360.
2. Похожаев С.И. О классах положительности эллиптических операторов в R^N с суперкритическим показателем нелинейности. ДАН СССР, 1990, т. 314, № 3, с. 558-561.
3. Похожаев С.И. Об эллиптических задачах в R^N с суперкритическим показателем нелинейности. Матем. сборник., 1991, т. 182, № 4, с. 467-480.
4. Жидков Е.П., Жидков П.Е. Исследование частицеподобных решений в некоторых моделях нелинейной физики. Часть I. Безузловые частицеподобные решения. Сообщение ОИЯИ, Р5-11599, Дубна, 1978.
5. Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К. Нелинейные оптические волны в слоистых структурах. Элементарные частицы и атомное ядро. 1989, т. 20, № 1, с. 198-253.
6. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., Наука, 1987.
7. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М., Наука, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 января 1992 года.