сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-92-135

В.Г.Одинцов, Т.Т.Рахмонов*, Эм Рен Зин

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНЫХ И БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ ОКАЙМЛЕННЫХ МАТРИЦ

---

*Институт ядерной физики АН Узбекистана

1992

Введение

В настоящей работе предложены методы обращения невырожденных окаймлённых блочно-диагональных и окаймлённых блочно-трёхдиагональных матриц вида

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{D}=\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & 0 & \\ & & \cdots & \\ & & b_{m-2} & \\ 0 & & & b_{m-1} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_{m-2} \\ u_{m-1} \end{array} \\ u_1^T \; u_2^T \ldots u_{m-1}^T & u_m \end{array}\right], \quad \mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{T}=\begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & 0 \\ a_2^T & b_2 & a_3 & & \\ & & \cdots & & \\ & & a_{m-2}^T & b_{m-2} & a_{m-1} \\ 0 & & & a_{m-1}^T & b_{m-1} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_{m-2} \\ u_{m-1} \end{array} \\ u_1^T \; u_2^T \ldots\ldots u_{m-1}^T & u_m \end{array}\right], \qquad (1)$$

где: $\{u_\xi, u_m\}_{\xi=1}^{m-1}$-квадратные, $\{b_1, b_\xi; a_\xi\}_{\xi=1}^{m-1}$- квадратные невырожденные матрицы, имеющие одинаковые размерности, т-знак транспонирования, $\mathcal{D}$ - блочно-диагональная матрица, $\mathcal{T}$ - невырожденная симметричная блочно-трёхдиагональная матрица со всеми отличными от нуля ведущими блочными угловыми минорами.

Во многих прикладных задачах возникают системы линейных уравнений высокого порядка. При решении этих систем прямым способом могут возникнуть трудности, связанные с неэффективностью применения стандартных способов обращения матриц.

Ленточные и окаймлённые ленточные матрицы вида (1) занимают выделенное место в теории полной алгебраической проблемы систем уравнений

$$\mathcal{B}z=\mathcal{F} \quad \text{и собственных значений} \quad \mathcal{B}z=\lambda\mathcal{F}\,^{[1-5]}. \qquad (2)$$

Системы алгебраических уравнений общего вида (2), где $z,\mathcal{F} \in R_m$ (R_m - евклидово пространство) с помощью преобразований подобия[6]

$$Q^T(Q\mathcal{B}Q^T)Qz=\mathcal{F} \quad \text{сводятся к системам} \quad \mathcal{A}x=\mathcal{Y}, \qquad (3)$$

где: $x,\mathcal{Y} \in R_m$, а матрица $\mathcal{A}$ имеет вид $\mathcal{A}=Q\mathcal{B}Q^T$ и представлена одной из матриц (1), $x=Qz$, $\mathcal{Y}=Q\mathcal{F}$.

При этом указанные преобразования обладают свойствами:

1. $Q^TQ = QQ^T = \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ - единичная матрица),

2. $\det(\mathcal{B}) = \prod\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = \prod\limits_{k=1}^{m} \mu_k = \det(\mathcal{A})$,

$$Sp(\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \sum_{k=1}^{m} \mu_k = Sp(\mathcal{A}), \text{ где:} \qquad (4)$$

$\mathcal{B}z_k = \lambda_k z_k$, $\mathcal{A}x_k = \mu_k x_k$,

3. $\|z\| = \|x\|$, $\|\mathcal{F}\| = \|\mathcal{Y}\|$,

4. $\|\mathcal{B}\|\|\mathcal{B}^{-1}\| \quad \nu = \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{A}^{-1}\|$

и оставляют эквивалентными вычислительные способности матриц $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ и решений систем (2) и (3) относительно возмущений $\mathcal{B} \pm \Delta\mathcal{B}$ и $\mathcal{F} \pm \Delta\mathcal{F}$.

Системы линейных уравнений с матрицами блочно-трехдиагонального вида появляются при численных решениях краевых задач, задач сплайн - аппроксимации /7,8/.

Аппарат работы с матрицами указанных типов используется для решения проблем, связанных с повышением эффективности вычислительных методов при анализе кинематической и другой информации, получаемой на установках физики высоких энергий[9-13].

Потребности практики приводят к необходимости проведения дополнительных исследований свойств ленточных и окаймлённых матриц. Эти свойства связаны со способами прямого решения систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка, основанных на векторной факторизации матриц, обратных к блочным трехдиагональным.

Способы обращения блочно-диагональных и блочно-трёхдиагональных окаймленных матриц

Итак, справедливы следующие теоремы.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ – симметричная невырожденная окаймленная блочно-диагональная матрица вида (1). Тогда для $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}})_{ij}$– элементов-блоков обратной матрицы $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}} = \mathcal{A}^{-1}$ имеет место представление

$$(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}})_{ij} = \begin{cases} \tilde{V}_i\beta\tilde{W}_j, \text{ если } 1\leqslant i<j\leqslant(m-1); \ -\tilde{V}_i\beta, \text{ если } 1\leqslant i<j=m, \\ \tilde{W}_i^T\beta\tilde{V}_j^T, \text{ если } 1\leqslant j<i\leqslant(m-1); \ -\beta\tilde{V}_j^T, \text{ если } 1\leqslant j<i=m, \\ \tilde{V}_i\beta\tilde{W}_i+ b_i^{-1} = \tilde{W}_j^T\beta\tilde{V}_j^T+ b_j^{-1}, \text{ если } 1\leqslant i=j\leqslant(m-1), \\ \beta, \text{ если } i=j=m, \end{cases} \qquad (5)$$

где

$$\begin{cases} \tilde{V}_i= b_i^{-1}u_i, \text{ если } 1\leqslant i\leqslant m-1, \ \tilde{W}_j= u_j^T b_j^{-1}, \text{ если } 1\leqslant j\leqslant m-1, \\ \beta = \left\{u_m-\sum\limits_{k=1}^{m-1}(u_k^T b_k^{-1} u_k)\right\}^{-1}, \ \det(\beta^{-1})\neq 0, \text{ в силу } \det(\mathcal{A}_{\mathcal{D}})\neq 0. \end{cases} \qquad (6)$$

<u>Доказательство.</u> Матрицу $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ представим в виде:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \mathcal{D} & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}^T & u_m \end{bmatrix}, \text{ где: } \mathcal{D} = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & 0 \\ & & --- & \\ & & b_{m-2} & \\ 0 & & & b_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -- \\ u_{m-2} \\ u_{m-1} \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Обратная матрица $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}^{-1}$, согласно методу окаймлений[14], будет иметь вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} \left[\mathcal{D}^{-1}+ \mathcal{D}^{-1}\mathfrak{A}\beta\mathfrak{A}^T\mathcal{D}^{-1}\right] & \left[-\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{A}\beta\right] \\ \left[-\beta\mathfrak{A}^T\mathcal{D}^{-1}\right] & \beta \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где $\beta = \left[u_m- \mathfrak{A}^T\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{A}\right]^{-1}$.

Выполнив матричные умножения, найдем явный вид β, $\left[-\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{A}\beta\right]$, $\left[-\mathfrak{A}^T\mathcal{D}^{-1}\beta\right]$, $\left[\mathcal{D}^{-1}+ \mathcal{D}^{-1}\mathfrak{A}\beta\mathfrak{A}^T\mathcal{D}^{-1}\right]$ и, следовательно, получим представления вида (5),(6).

Справедливость этих представлений устанавливается проверкой основных равенств $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}\mathfrak{B}_{\mathcal{D}} = \mathcal{E} = \mathfrak{B}_{\mathcal{D}}\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$. <u>Теорема доказана.</u>

<u>Замечание 1.</u> Представления, аналогичные (5),(6), были получены ранее в работе[15]. Однако результаты настоящей работы представляются более оптимальными, поскольку снимают ограничение $\{\det(u_k) \neq 0\}_{k=1}^{m-1}$. Кроме того, полученные в [15] представления основаны на трехточечных рекурсивных выражениях (6)[10] для $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$. Последние более чувствительны к ошибкам машинных округлений и могут привести к неустойчивости вычислений.

Ниже, с использованием результатов работ[16,17], получены представления для более широкого класса матриц $\mathfrak{B}_{\mathcal{T}} = \mathcal{A}_{\mathcal{T}}^{-1}$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ - симметричная невырожденная окаймлённая блочно-трехдиагональная матрица вида (1). Тогда для $(\mathfrak{B}_{\mathcal{T}})_{ij}$ - элементов-блоков обратной матрицы $\mathfrak{B}_{\mathcal{T}} = \mathcal{A}_{\mathcal{T}}^{-1}$ имеет место представление

$$(\mathfrak{B}_{\mathcal{T}})_{ij} = \begin{cases} V_i W_j + \omega_i \rho \omega_j^T, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant (m-1); \ -\omega_i \rho, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant j = m, \\ W_i^T V_j^T + \omega_i \rho \omega_j^T, \text{ если } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant (m-1); \ -\rho \omega_j^T, \text{ если } 1 \leqslant j \leqslant i = m, \\ B_{ii} + \omega_i \rho \omega_i^T = B_{jj} + \omega_j \rho \omega_j^T, \text{ если } 1 \leqslant i = j \leqslant (m-1), \\ \rho, \text{ если } i = j = m. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{cases} \rho = \{u_m - \sum_{k=1}^{m-1} (u_k^T \omega_k)\}^{-1}, \ \det(\rho^{-1}) \neq 0, \text{ в силу } \det(\mathcal{A}_{\mathcal{T}}) \neq 0, \\ \omega_i = W_i^T \{\sum_{k=1}^{i} (V_k^T u_k)\} + V_i \{\sum_{k=i+1}^{m-1} (W_k u_k)\}, \ i = 2,3,\dots,m-2, \\ \omega_1 = V_1 \{\sum_{k=1}^{m-1} (W_k u_k)\}, \ \omega_{m-1} = W_{m-1}^T \{\sum_{k=1}^{m-1} (V_k^T u_k)\} \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} V_i = (\prod_{k=2}^{i} c_k)^{-1}, \ i = 2,3,\dots,m-1, \ V_1 = \mathcal{E}_1, \\ W_j = (\prod_{k=2}^{j} c_k B_{jj}), \ j = m-1, m-2, \dots 2, \ W_1 = B_{11}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} B_{kk} = (\Lambda_{k+1} + G_{k-1} b_k)^{-1}, \ B_{11} = G_0^{-1}, \ B_{m-1,m-1} = \Lambda_m^{-1}, \ k = 2,3,\dots,m-2 \\ c_{k+1} = -(\Lambda_{k+1}^{-1} a_{k+1}), \ k = 1,2,\dots,m-2 \\ \Lambda_{k+1} = b_k - a_k^T \Lambda_k^{-1} a_k, \ \Lambda_2 = b_1, \ k = 2,3,\dots,m-1 \\ G_{k-1} = b_k - a_{k+1} G_k^{-1} a_{k+1}^T, \ G_{m-2} = b_{m-1}, \ k = m-2,\dots,1. \end{cases} \tag{12}$$

<u>Доказательство.</u> Здесь для получения представлений (9)-(12) для $\mathfrak{B}_{\mathcal{T}}$, как и в доказательстве <u>Теоремы 1</u>, матрицу $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ запишем в виде:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{T} & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}^T & u_m \end{bmatrix}, \text{ где: } \mathcal{T} = \begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & 0 \\ a_2^T & b_2 & a_3 & & \\ & & \text{---------} & & \\ & & a_{m-2}^T & b_{m-2} & a_{m-1} \\ 0 & & & a_{m-1}^T & b_{m-1} \end{bmatrix}, \ \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \text{--} \\ u_{m-2} \\ u_{m-1} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Далее, применяя технику окаймлений[14], будем иметь:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathcal{T}^{-1} + \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{A}\rho\mathfrak{A}^T\mathcal{T}^{-1}] & [-\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{A}\rho] \\ [-\rho\mathfrak{A}^T\mathcal{T}^{-1}] & \rho \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $\mathcal{T}^{-1}$ - обратная к невырожденной симметричной блочно-трёхдиагональной матрице $\mathcal{T}$ (13), для элементов-блоков которой, в соответствии с[16,17], имеют место представления (11)-(12).

$$(\mathcal{T}^{-1})_{ij} = \begin{cases} V_i W_j, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant (m-1) \\ W_i^T V_j^T, \text{ если } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant (m-1). \end{cases} \tag{15}$$

Далее, выполнив с учётом (15) все матричные операции в $\{\mathcal{T}^{-1} + \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{A}\rho\mathfrak{A}^T\mathcal{T}^{-1}\}$, $\{-\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{A}\rho\}$, $\{-\rho\mathfrak{A}^T\mathcal{T}^{-1}\}$ и ρ, получим представления для $(\mathcal{A}_{\mathcal{T}}^{-1} = \mathfrak{B}_{\mathcal{T}})_{ij}$ вида (9)-(12). Справедливость этих представлений устанавливается проверкой основных равенств $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}\mathfrak{B}_{\mathcal{T}} = \mathcal{E} = \mathfrak{B}_{\mathcal{T}}\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$.

Равенства $\mathcal{A}_\mathcal{T}\mathfrak{B}_\mathcal{T} = \mathcal{E}$ и $\mathfrak{B}_\mathcal{T}\mathcal{A}_\mathcal{T} = \mathcal{E}$, очевидно, эквивалентны следующим системам матричных равенств:

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
a_i^T(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i-1,j} + b_i(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{ij} + a_{i+1}(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i+1,j} + u_i(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{mj} = 0_{ij}, \quad 1\leqslant i<j\leqslant m, \\
a_i^T(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i-1,i} + b_i(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{ii} + a_{i+1}(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i+1,i} + u_i(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{mi} = \mathcal{E}_i, \quad 1\leqslant i=j\leqslant (m-1), \\
\sum\limits_{\xi=1}^{m-1}\{u_\xi^T(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{\xi m}\} + u_m(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{mm}, \quad i=j=m,
\end{cases} \\
\begin{cases}
a_{i+1}(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i+1,j} + b_i(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{ij} + a_i^T(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i-1,j} + u_i(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{mj} = 0_{ij}, \quad 1\leqslant j<i\leqslant (m-1), \\
\sum\limits_{\xi=1}^{j-1}\{u_\xi^T(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{\xi j}\} + u_j^T B_{jj} + \sum\limits_{\xi=j+1}^{m-1}\{u_\xi^T(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{\xi j}\} = 0_{mj}, \quad 1\leqslant j<i=m;
\end{cases}
\end{cases}
\tag{16}
$$

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i,j-1}a_j + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{ij}b_j + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i,j+1}a_{j+1}^T + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{im}u_j^T = 0_{ij}, \quad 1\leqslant i<j\leqslant (m-1), \\
\sum\limits_{\xi=1}^{j-1}\{(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i\xi}u_\xi\} + B_{ii}u_i + \sum\limits_{\xi=i+1}^{m-1}\{(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i\xi}u_\xi\} = 0_{im}, \quad 1\leqslant j<j=m,
\end{cases} \\
\begin{cases}
(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i,i-1}a_i + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{ii}b_i + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i,i+1}a_{i+1}^T + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{im}u_i^T = \mathcal{E}_i, \quad 1\leqslant i=j\leqslant (m-1), \\
\sum\limits_{\xi=1}^{m-1}\{(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{m\xi}u_\xi\} + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{mm}u_m = \mathcal{E}_m, \quad i=j=m,
\end{cases} \\
(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i,j-1}a_j + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{ij}b_j + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{i,j+1}a_{j+1}^T + (\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{im}u_j^T = 0_{ij}, \quad 1\leqslant j<i\leqslant m.
\end{cases}
\tag{17}
$$

Подставим в (16) и (17) соответствующие выражения для $(\mathfrak{B}_\mathcal{T})_{\xi\mu}$, учитывая при этом полученные ранее в[16] равенства:

$$
\begin{cases}
B_{kk}\hat\beta_{k+1} = c_{k+1}B_{k+1,k+1}, \\
\hat c_{k+1}B_{kk} = B_{k+1,k+1}\beta_{k+1}, \quad 1\leqslant k\leqslant (m-2),
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
c_k B_{kk} = B_{k-1,k-1}\hat\beta_k, \\
B_{kk}\beta_k = \hat c_k B_{k-1,k-1}, \quad 2\leqslant k\leqslant (m-1),
\end{cases}
\tag{18}
$$

где $B_{\xi\xi}$ описана в (12),

$$
\begin{cases}
c_{\xi+1} = -(\Lambda_\xi^{-1}a_{\xi+1}), \quad \hat c_{\xi+1} = -(G_\xi^{-1}a_{\xi+1}^T), \\
\beta_{\xi+1} = -(a_{\xi+1}^T\Lambda_\xi^{-1}), \quad \hat\beta_{\xi+1} = -(a_{\xi+1}G_\xi^{-1}), \quad 1\leqslant \xi\leqslant (m-2).
\end{cases}
\tag{19}
$$

В результате получаем, что равенства (16) и (17) сводятся к тождествам и, следовательно, справедливость представлений (9)-(12) установлена. Теорема доказана.

Замечание 2. Здесь мы не останавливаемся на вопросах о множественности представлений $(\mathcal{A}_\mathcal{T}^{-1} = \mathfrak{B}_\mathcal{T})$. Отметим лишь, что с учётом[16] множество представлений для $\mathcal{T}^{-1}$ существует также и для $(\mathcal{A}_\mathcal{T}^{-1} = \mathfrak{B}_\mathcal{T})$ и состоит из 16 представлений, учитывающих B_{kk} в виде (12).

В заключение авторы благодарят Б.С. Юлдашева за интерес, проявленный к работе.

Литература.

1. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., "Наука", 1970.
2. Воеводин В.В. Вычислительные свойства линейной алгебры. М., "Наука", 1977.
3. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трёхдиагональные матрицы и их приложения. М., "Наука", 1985.
4. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М., "Наука", 1984.
5. Беллман С.Р. Введение в теорию матриц. М., "Наука", 1983.
6. Тихонов А.Н. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М., "Наука", 1983.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., МГУ, 1974.
8. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. М., МГУ, 1983.
9. Будагов Ю.А., Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г. ОИЯИ, Р10-9950, Дубна, 1975.
10. Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г. ОИЯИ, Р10-11127, Дубна, 1977.
11. Гасанбеков Р.М. и др. ОИЯИ, Р10-12712, Дубна, 1979.
12. Zhigunov V.P. et.al. Sov.J.Part.Nucl., 1982, V.13, No 5, p. 1024-1069.
13. Paseaud C., Morellet P. L.A.L Rapport, No 1227, Orsay, 1970.
14. Фаддеев Д.Л., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 2-е. М.-Л., Физматгиз, 1963.
15. Одинцов В.Г. ОИЯИ, Р5-82-544, Дубна, 1982.
16. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, Р11-87-623, 1987.
17. Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, Р10-89-682, Дубна, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1992 года.