сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-92-111

Т.Жанлав

О МЕТОДЕ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1992

§ I. Сплайн-схема обычной точности. Сходимость метода

Рассмотрим краевую задачу

$$L(x) \equiv u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=r(x) \quad , \quad x \in [a,b] \ , \qquad (I.I)$$

$$\ell_1 u = \bar{\alpha}_1 \; u(x) \; + \; \bar{\beta}_1 \; u'(x) \; = \gamma_1 \quad , \quad x=a \quad ,$$

$$\ell_2 u = \bar{\alpha}_2 \; u(x) \; + \; \bar{\beta}_2 \; u'(x) \; = \gamma_2 \quad , \quad x=b \quad , \qquad (I.2)$$

где $\bar{\alpha}_i \geqslant 0$ $i=1,2,$ $\bar{\beta}_2 \geqslant 0,$ $\bar{\beta}_1 \leqslant 0,$ $q(\alpha) \leqslant q < 0$.
Как известно, задача (I.I),(I.2) имеет единственное решение. Более того, $u \in C^{k+2}[a,b]$, если $p,q,r \in C^k[a,b]$, $k \geqslant 0$.
В дальнейшем считаем, что $k \geqslant 2$. Для численного решения данной задачи введем на $[a,b]$ сетку Δ_N : $a=x_0 < x_1 < \ldots < x_N=b$, $h_i= x_{i+1}-x_i$, $i=0,\ldots,N-1$. Будем искать приближенное решение задачи (I.I),(I.2) в виде кубического сплайна $S(x)$ класса $C^2[a,b]$ с узлами на сетке Δ_N . Представим сплайн $S(x)$ в виде разложения по базису из нормализованных кубических B-сплайнов /I/:

$$S(x) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j B_j(x) \ . \qquad (I.3)$$

Чтобы все базисные функции $B_j(x)$ в (I.3) были определены, сетка Δ_N должна быть дополнена узлами $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0$, $x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}$. В дальнейшем их удобно выбирать в виде $x_{-i} = x_0-ih_0$, $x_{N+i} = x_N + ih_{N-1}$, $i=1,2,3$. Потребуем, чтобы сплайн $S(x)$ удовлетворял уравнению (I.I) в узлах сетки (условиям коллокации) и краевым условиям (I.2), т.е.

$$L\,S(x) = r(x) \quad , \quad x \in \Delta_N \quad , \qquad (I.4)$$

$$\ell_1 S = \gamma_1 \ , \qquad x=a \ ,$$

$$\ell_2 S = \gamma_2 \ , \qquad x=b \ . \qquad (I.5)$$

Соотношения (I.4), (I.5) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно параметров α_j сплайна. После исключения коэффициентов $\alpha_{-1}, \alpha_{N+1}$ она приобретает вид

$$-C_o\alpha_o + B_o\alpha_1 = F_o \quad ,$$

$$A_i\alpha_{i-1} - C_i\alpha_i + B_i\alpha_{i+1} = F_i \ , \quad i=1,\dots,N-1 \quad , \qquad (I.6)$$

$$A_N\ \alpha_{N-1} - C_N\alpha_N = F_N \quad .$$

Известно/I/, что система (I.6) имеет диагональное преобладание для достаточно малых шагов, обеспечивающих неравенства

$$1 - \frac{h_i}{2}p_i + \frac{h_i^2}{6}q_i \geqslant 0 \ , \quad 1+ \frac{h_{i-1}}{2}p_i + \frac{h_{i-1}^2}{6}q_i \geqslant 0 \quad , \qquad (I.7)$$

$$i = 1,\dots,N-1$$

и при этом справедливо соотношение

$$\| S(x) - u(x) \|_C = O(\bar{h}^2) \quad , \qquad (I.8)$$

где $\bar{h}=\max h_i$.

В дальнейшем считаем, что сетка Δ_N равномерна. Нам понадобится известный результат/2,3/:

<u>Лемма I</u>. Для коллокационного сплайна, удовлетворяющего соотношениям (I.4),(I.5), справедливы

$$S_i^{(r)} - u_i^{(r)} = O(h^2) \ , \quad r=0,1,2, \quad i=0,1,\dots,N \ . \qquad (I.9)$$

Оказывается, что с помощью производных сплайна S можно аппроксимировать третью и четвертую производные решения задачи (I.I),(I.2) в узлах сетки Δ_N .

<u>Лемма 2</u>. Пусть p, q и r в уравнении (I.I) - достаточно гладкие функции. Тогда для коллокационного сплайна, удовлетворяющего уравнению (I.4) и граничным условиям (I.5), справедливы соотношения

$$S'''_{i+o} = u'''_i + O(h) \ , \quad S'''_{i-o} = u'''_i + O(h) \quad , \qquad (I.10а)$$

$$(S'''_{i+o} + S'''_{i-o})/2 = u'''_i + O(h^2) \quad , \qquad (I.10б)$$

$$\frac{S'''_{i+o} - S'''_{i-o}}{h} = u_i^{IV} + O(h^2) \quad , \quad i=1,\dots,N-1 \quad , \qquad (I.10в)$$

$$\frac{2S''_o - 5S''_1 + 4S''_2 - S''_3}{h^2} = u_o^{IV} + O(h^2) \quad ,$$

$$\frac{2S''_N - 5S''_{N-1} + 4S''_{N-2} - S''_{N-3}}{h^2} = u_N^{IV} + O(h^2) \quad . \qquad (I.10г)$$

Доказательство. По условию леммы решение задачи (I.I),(I.2) является достаточно гладкой функцией. Согласно определению кубического сплайна класса $C^2[a,b]$ и уравнению (I.4) имеем

$$S'''_{i+o} = \frac{S''_{i+1} - S''_i}{h} = \frac{r_{i+1} - p_{i+1}S'_{i+1} - q_{i+1}S_{i+1} - (r_i - p_iS'_i - q_iS_I)}{h} \quad ,$$

$$S'''_{i-o} = \frac{S''_i - S''_{i-1}}{h} = \frac{r_i - p_iS'_i - q_iS_i - (r_{i-1} - p_{i-1}S'_{i-1} - q_{i-1}S_{i-1})}{h} \quad ,$$

$$i=1,\dots,N-1 \quad .$$

Отсюда, с учетом достаточной гладкости функций p,q,r и решения задачи (I.I), (I.2), получаем

$$S'''_{i-o} = u'''_i + \frac{a_{1i}(u_i - S_i) + b_{1i}(u'_i - S'_i) + c_{1i}(u''_i - S''_i) + d_{1i}u_i^{(IV)} + \ell_{1i}u_i^{(V)}}{1 - \frac{h}{2}p_{i-1} + \frac{h}{6}q_{i-1}} + O(h^3) \ ,$$

$$(I.II)$$

$$S'''_{i+o} = u'''_i + \frac{a_{2i}(u_i - S_i) + b_{2i}(u'_i - S'_i) + c_{2i}(u''_i - S''_i) + d_{2i}u_i^{IV} + \ell_{2i}u_i^{(V)}}{1 + \frac{h}{2}p_{i+1} + \frac{h^2}{6}q_{i+1}} + O(h^3) \quad ;$$

$$i=1,\dots,N-1 \quad ,$$

где

$$a_{1i} = (q_i - q_{i-1})/h \ , \quad a_{2i} = a_{1,i+1} \ , \quad b_{1i} = (p_i - p_{i-1} + hq_{i-1})/h \quad ,$$

$$b_{2i} = (p_{i+1} - p_i + hq_{i+1})/h \ , \quad c_{1i} = p_{i-1} - hq_{i-1}/2 \ , \quad c_{2i} = p_{i+1} + hq_{i+1}/2 \quad ,$$

$$d_{1i}=-h\left(1-\frac{h}{3}p_{i-1}+\frac{h^2}{12}q_{i-1}\right)/2\ ,\quad d_{2i}=\frac{h}{2}\left(1+\frac{h}{3}p_{i+1}+\frac{h^2}{12}q_{i+1}\right)\ ,$$

$$\ell_{1i}=\frac{h^2}{6}\left(1-\frac{h}{4}p_{i-1}+\frac{h^2}{20}q_{i-1}\right)\ ,\quad \ell_{2i}=\frac{h^2}{6}\left(1+\frac{h}{4}p_{i+1}+\frac{h^2}{20}q_{i+1}\right)\ . \tag{I.I2}$$

Если учесть лемму I и достаточную гладкость функций p,q и r, то из (I.II), (I.I2) немедленно вытекают требуемые соотношения (I.I0а)-(I.I0в). А соотношения (I.I0г) следуют из (I.I0в) с учетом гладкости решения $u(x)$. Лемма доказана полностью.

§ 2. Экстраполяция по Ричардсону для сплайн-схемы

Как известно, одним из эффективных методов уточнения приближенного решения является экстраполяция по Ричардсону. В [4] показано, что эта процедура осуществима для коэффициентов кубического сплайна, интерполирующего решение задачи (I.I), (I.2) на равномерной сетке Δ_N. Там же отмечено, что при достаточно гладких функциях p,q и $r(x)$ в (I.I) выполнены все условия (А, В и Д) теоремы о разложении [5] по четным степеням h. Однако более конструктивным, с точки зрения приложения, оказывается получение самого разложения коэффициентов коллокационного сплайна.

На равномерной сетке формулы для коэффициентов и правой части системы (I.6) несколько упрощаются и выглядят следующим образом:

$$C_0=-6\bar\beta_1+6h\bar\alpha_1+(2\bar\beta_1q_0-2\bar\alpha_1p_0)h^2\ ,$$

$$B_0=-6\beta_1+(\bar\alpha_1p_0-\bar\beta_1q_0)h^2\ , \tag{2.Iа}$$

$$F_0=h^2(\bar\alpha_1h-3\bar\beta_1)r_0-6h\gamma_1\left(1-\frac{h}{2}p_0+\frac{h^2}{6}q_0\right)\ ,$$

$$A_i=\frac{1}{h^2}\left(1-\frac{h}{2}p_i+\frac{h^2}{6}q_i\right)\ ,\quad B_i=\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{h}{2}p_i+\frac{h^2}{6}q_i\right)\ ,$$

$$C_i=\frac{1}{h^2}\left(2-\frac{2}{3}h^2q_i\right)\ ,\quad F_i=r_i\ ,\quad i=1,\dots,N-1\ , \tag{2.Iб}$$

$$A_N=6\bar\beta_2+(\bar\beta_2q_N-\bar\alpha_2p_N)h^2\ ,$$

$$C_N=6\bar\beta_2+6\bar\alpha_2h+2(\bar\alpha_2p_N-\bar\beta_2q_N)^2h^2\ , \tag{2.Iв}$$

$$F_N=h^2r_n(\bar\alpha_2h+3\bar\beta_2)-6h\gamma_2\left(1+\frac{h}{2}p_N+\frac{h^2}{6}q_N\right)\ .$$

При этом систему (I.6), аппроксимирующую дифференциальную задачу, можно рассматривать как разностные уравнения относительно α_i. Поэтому величины α_i, как это делается в разностных уравнениях, можно разложить по степеням шага h. Поскольку во "внутренних" ($i=1,\dots,N-1$) уравнениях в (I.6) используются центральные разности, то разложение не будет содержать нечетных степеней по h.

Согласно (I.8) имеем [6]

$$\alpha_i=s_i-\frac{h^2}{6}s_i''=u_i+O(h^2)\ ,\quad i=0,\dots,N\ ,\quad u_i=u(x_i)\ .$$

Следовательно, для коэффициентов α_i коллокационного сплайна мы можем трансформировать гипотезу Ричардсона о разложении [5]:

$$\alpha_i=u_i+h^2v_1(x_i)+h^4v_2(x_i)+h^6\eta_i\ ,\quad i=0,\dots,N\ . \tag{2.2}$$

Предположим, что $v_j(x)\in C^{8-2j}$, $j=0,1,2;$ $v_0(x)\equiv u(x)$.

Тогда справедливы разложения

$$v_j(x_{i\pm1})=\sum_{m=0}^{7-2j}\frac{(\pm h)^m}{m!}\frac{d^mv_j(x_i)}{dx^m}+O(h^{8-2j})\ , \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2) в уравнение (I.6) при $i=1,\dots,N-1$ и учитывая разложения (2.3) и (2.Iб) получаем соотношение

$$Lu_i+h^2(Lv_1(x_i)-r_1(x_i))+h^4(Lv_2(x_i)-r_2(x_i))+ \tag{2.4}$$

$$+h^6\left[A_i\eta_{i-1}-C_i\eta_i+B_i\eta_{i+1}\right]+O(h^6)=r_i\ ,$$

$$i=1,\dots,N-1\ ,$$

где

$$r_1(x)=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}u^{IV}(x)+pu'''+qu''\right)\ , \tag{2.5}$$

$$r_2(x) = -\sum_{m=0}^{1}\left[\frac{2}{(6-2m)!}\frac{d^{6-2m}v_m(x)}{dx^{6-2m}} + \frac{p}{(5-2m)!}\frac{d^{5-2m}v_m(x)}{dx^{5-2m}} + \right.$$

$$\left. + \frac{q}{3(4-2m)!}\frac{d^{4-2m}v_m(x)}{dx^{4-2m}}\right] . \qquad (2.6)$$

Так как мы хотим выполнения тождества при всех степенях h, то потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$Lv_1(x_i) = r_1(x_i), \quad i=1,\ldots,N-1, \qquad (2.7а)$$

$$Lv_2(x_i) = r_2(x_i), \quad i=1,\ldots,N-1, \qquad (2.8а)$$

$$A_i\eta_{i-1} - C_i\eta_i + B_i\eta_{i+1} = (1), \quad i=1,\ldots,N-1 . \qquad (2.9а)$$

Подстановка (2.2) в первое и последнее уравнения в (I.6) дает

$$\ell_1 v_1 = -\frac{1}{6}(\bar\alpha_1 u_0'' + \bar\beta_1 u_0''') = \gamma_{11}, \quad x=a, \qquad (2.7б)$$

$$\ell_2 v_1 = -\frac{1}{6}(\bar\alpha_2 u_N'' + \bar\beta_2 u_N''') = \gamma_{21}, \quad x=b,$$

$$Lv_1(x_i) = r_1(x_i), \quad i=0,N, \qquad (2.7в)$$

$$\ell_1 v_2 = -\bar\beta_1\left(\frac{1}{5!}u_0^{(v)} + \frac{1}{3!}v_1'''(x_0)\right) + \frac{\bar\alpha_1 p_0 - \bar\beta_1 q_0}{6}\left(\frac{1}{6}u_0''' + v_1'(x_0)\right) = \gamma_{12}, \quad x=a,$$

$$(2.8б)$$

$$\ell_2 v_2 = -\bar\beta_2\left(\frac{1}{5!}u_N^{(v)} + \frac{1}{3!}v_1'''(x_0)\right) + \frac{\bar\alpha_2 p_N - \beta_2 q_N}{6}\left(\frac{1}{6}u_N''' + v_1'(x_N)\right) = \gamma_{22}, \quad x=b,$$

$$\eta_0 = \frac{p_0}{6}(v_2'(x_0) + \frac{1}{6}v_1'''(x_0) + \frac{1}{120}u_0^{(v)}) \qquad \bar\beta_1 = 0,$$

$$\eta_0 - \eta_1 = \frac{1}{6!}u_0^{(vi)} + \frac{1}{4!}v_1^{(iv)}(x_0) + \frac{1}{2}v_2''(x_0) - \frac{\bar\alpha_1 p_0 - \bar\beta_1 q_0}{2\beta_1} \times$$

$$\times\ (v_2(x_0) + \frac{1}{6}v_1''(x_0) + \frac{1}{72}u_0^{(iv)}), \qquad \beta_1 \neq 0, \qquad (2.9б)$$

$$\eta_N = \frac{p_N}{6}(v_2'(x_N) + \frac{1}{6}v_1'''(x_N) + \frac{1}{120}u_N^{(v)}) \qquad \text{при } \bar\beta_2 = 0,$$

$$(2.9в)$$

$$\eta_N - \eta_{N-1} = \frac{1}{6!}u_N^{(vi)} + \frac{1}{4!}v_1^{(iv)}(x_N) + \frac{1}{2}v_2''(x_N) +$$

$$+ \frac{\bar\beta_2 q_N - \bar\alpha_2 p_N}{2\beta_2}(v_2(x_N) + \frac{1}{6}v_1''(x_N) + \frac{1}{72}u_N^{(iv)})$$

при $\beta_2 \neq 0$.

Для выполнения равенств (2.7) и (2.8) достаточно взять в качестве v_j решение краевой задачи

$$Lv_j(x) = r_j(x),$$

$$\ell_1 v_j = \gamma_{1j}, \quad x=a,$$

$$\ell_2 v_j = \gamma_{2j}, \quad x=b, \quad j=1,2.$$

Из (2.5),(2.6) видно, что найденное решение $v_j(x)$ принадлежит классу $C^{8-2j}[a,b]$, если $u \in C^8[a,b]$. Система (2.9) решается методом трехточечной прогонки, причем последний является корректным и устойчивым /7/ благодаря условию $q(x) < 0$. Следовательно, ее решение η_i равномерно ограничено по i. Таким образом, обоснована гипотеза (2.2), и при этом α_j удовлетворяет системе (I.6) с точностью $O(h^6)$. Поскольку матрица этой системы (I.6) имеет диагональное преобладание, то норма обратной к ней матрицы ограничена. Следовательно, внесение в правую часть погрешности порядка $O(h^6)$ приводит к изменению решения на величину того же порядка. Поэтому для коэффициентов коллокационного сплайна S справедлива формула

$$\alpha_i^0 = u_i + h^2 v_1(x_i) + h^4 v_2(x_i) + O(h^6), \quad i=0,\ldots,N . \qquad (2.10)$$

Пусть α_j^1 — коэффициенты B-представления сплайна S на сетке с шагом $h_1 = h/2$. Тогда из (2.10) следует, что

$$\alpha_i^1 = u_i + \frac{h^2}{4} v_1(x_i) + O(h^4) \quad , \quad i = 0,\ldots,N \qquad (2.II)$$

Из соотношений (2.I0) и (2.II) следует, что

$$\frac{4\alpha_i^1 - \alpha_i^0}{3} = u_i + O(h^4) \quad , \quad i=0,\ldots,N \quad ,$$

т.е. справедлива процедура Ричардсона на последовательности сеток для коэффициентов сплайна.

Разложение (2.2) коэффициентов коллокационного сплайна еще указывает на возможность выхода к схеме повышенной точности, и тем самым позволяет построить сплайн, аппроксимирующий решение краевой задачи (I.I),(I.2) с большей точностью. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вместо (I.4) уравнение

$$LS = r - \frac{h^2}{12} u^{(IV)} \quad , \quad x \in \Delta_N \qquad (2.I2)$$

с краевыми условиями (I.5).

Как и раньше, ищем коэффициенты сплайна, удовлетворяющего уравнению (2.I2) и краевым условиям (I.5) в виде (2.2). Тогда легко видеть, что в правой части соотношения (2.4) добавляется член $-h^2 u_i^{(IV)}/12$ и при этом, как видно из (2.4), $v_1(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$Lv_1(x_i) = r_1(x_i) - \frac{h^2}{12} u_i^{(IV)} = -\frac{1}{6} Lu_i'' \quad , \quad i=0,\ldots,N$$

с краевыми условиями (2.7б). Отсюда легко показать, что

$$v_1(x_i) = -\frac{1}{6} u_i'' \quad , \quad i=0,\ldots,N \quad . \qquad (2.I3)$$

В связи с рассмотрением уравнения (2.I2) подвергаются изменению краевые условия (2.8б) для функции $v_2(x)$, и они примут вид

$$\ell_1 v_2 = (7\bar{\beta}_1 u_0^{(V)} + 5\bar{\alpha}_1 u_0^{(IV)})/360 \quad , \quad x=a \quad , \qquad (2.8в)$$

$$\ell_2 v_2 = (7\bar{\beta}_2 u_N^{(V)} + 5\bar{\alpha}_2 u_N^{(IV)})/360, \quad x=b \; .$$

Таким образом, формула (2.I0) для коэффициентов сплайна, являющегося решением задачи (2.I2), (I.5), приобретает вид

$$\alpha_i = u_i - \frac{h^2}{6} u_i'' + h^4 v_2(x_i) + O(h^6) \; , \; i=0,\ldots,N \quad . \qquad (2.I4)$$

С другой стороны, известно[5], что квазиинтерполяционный сплайн, коэффициенты которого определяются формулой

$$\tilde{\alpha}_i = u_i - \frac{h^2}{6} u_i'' \quad , \quad i=0,\ldots,N \quad , \qquad (2.I5)$$

аппроксимирует достаточно гладкое решение задачи (I.I), (I.2) с точностью $O(h^4)$. Тогда из (2.I4) ясно, что сплайн, удовлетворяющий уравнению (2.I2) и краевым условиям (I.5), аппроксимирует решение задачи (I.I), (I.2) с такой же точностью $O(h^4)$, т.е. в этом случае точность аппроксимации сплайна увеличивается сразу на два порядка. Из (2.I2) видно, что построить такой сплайн сразу невозможно, поскольку нам неизвестны величины u_i^{IV}. Однако полезно отметить следующие его свойства:

$$S_i = u_i' + O(h^4) \quad , \quad i=1,\ldots,N-1 \quad ,$$

$$\frac{S_{i+1}'' + 10S_i'' + S_{i-1}''}{12} = u_i'' + O(h^4) \quad , \quad i=2,\ldots,N-2 \quad ,$$

при выводе которых была учтена гладкость функции $v_2(x)$. Отсюда ясно, что этот же сплайн удовлетворяет уравнениям

$$\frac{S_{i+1}'' + 10S_i'' + S_{i-1}''}{12} + p_i S_i' + q_i S_i = r_i + O(h^4) \quad , \quad i=2,\ldots,N-2 \quad ,$$

что указывает на выход к схеме повышенной точности.

§ 3. Сплайн-схема повышенной точности

В[8] предложена сплайн-схема повышенной точности и в случае равномерной сетки она выглядит так:

$$\ell_1 S = \gamma_1 \quad , \quad x=x_0 \quad ,$$

$$L^{(4)} S(x) = r(x), \quad x \in \Delta_N \quad , \qquad (3.I)$$

$$\ell_2 S = \gamma_2 \quad , \quad x=x_N \quad ,$$

где

$$
L^{(4)}S=\begin{cases}
\dfrac{14S_o''-5S_1''+4S_2''-S_3''}{12}+p_oS_o'+q_oS_o\,, & x=x_o\,,\\[2ex]
\dfrac{S_{i-1}''+10S_i''+S_{i+1}''}{12}+p_iS_i'+q_iS_i\,, & x=x_i,\quad i=1,\dots,N-1\,,\\[2ex]
\dfrac{14S_N''-5S_{N-1}''+4S_{N-1}''-S_{N-3}''}{12}+p_NS_N'+q_NS_N\,, & x=x_N
\end{cases}
$$

После исключения нескольких коэффициентов задача (3.I) сводится к системе, которая может быть решена методом пятиточечной прогонки /7/. Однако мы предлагаем простой путь получения приближенного решения задачи (3.I). Пусть s^o и s^1 —решения задач

$$
\begin{aligned}
&\ell_1 s^o=\gamma_1\,, && x=x_o\\
&Ls^o(x)=r(x)\,, && x\in\Delta_N\,,\\
&\ell_2 s^o=\gamma_2\,, && x=x_N
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\ell_1 s^1=\gamma_1\,, && x=x_o\,,\\
&Ls^1(x)=r(x)-(L^{(4)}-L)s^o(x)\,, && x\in\Delta_N\,,\\
&\ell_2 s^1=\gamma_2\,, && x=x_N\,,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

соответственно.

Теорема. Пусть p, q и r в уравнении (I.I) достаточно гладкие функции и шаг равномерной сетки таков, что выполняются неравенства (I.7). Тогда для сплайна s^1, являющегося решением задачи (3.3), справедливы соотношения

$$
\| s^1-u\|_C=O(h^4)\,, \tag{3.4}
$$

$$
s_i^{1'}=u_i'+O(h^4)\,,\qquad i=0,\dots,N\,, \tag{3.5}
$$

$$
s_i^{1''}=u_i''-\frac{h^2}{12}u_i^{IV}+O(h^4)\,,\qquad i=0,\dots,N\,, \tag{3.6}
$$

$$
\frac{s_{i+1}^{1''}+10s_i^{1''}+s_{i-1}^{1''}}{12}=u_i''+O(h^4)\,,\qquad i=1,\dots,N-1\,, \tag{3.7а}
$$

$$
\frac{s_{i+1}^{1''}-2s_i^{1''}+s_{i-1}^{1''}}{h^2}=u_i^{IV}+O(h^2)\,,\qquad i=1,\dots,N-1 \tag{3.7б}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{14s_o^{1''}-5s_1^{1''}+4s_2^{1''}-s_3^{1''}}{12}=u_o''+O(h^4)\,,\\
&\frac{14s_N^{1''}-5s_{N-1}^{1''}+4s_{N-2}^{1''}-s_{N-3}^{1''}}{12}=u_N''+O(h^4)\,.
\end{aligned}
\tag{3.7в}
$$

Доказательство. В силу условий теоремы задачи (3.2), (3.3) разрешимы. Для s^o, согласно лемме 2, справедливы соотношения (I.IOв), (I.IOг). Следовательно, имеем

$$
(L^{(4)}-L)s^o(x)=\frac{h^2}{12}u^{IV}(x)+O(h^4)\,,\qquad x\in\Delta_N\,. \tag{3.8}
$$

Пусть $\tilde{s}(x)$ – квазиинтерполяционный кубический сплайн, коэффициенты которого определены по формуле

$$
\tilde{\alpha}_{-1}=u_o-hu_o'+\frac{h^2}{3}u_o''-\frac{h^4}{24}u_o^{(IV)}+\frac{7h^5}{360}u_o^{(V)}+O(h^6)\,,
$$

$$
\tilde{\alpha}_{N+1}=u_N+hu_N'+\frac{h^2}{3}u_N''-\frac{h^4}{24}u_N^{(IV)}-\frac{7h^5}{360}u_N^{(V)}+O(h^6)\,,
$$

$$
\tilde{\alpha}_i=u_i-\frac{h^2}{6}u_i''\,,\qquad i=0,\dots,N\,.
$$

Тогда $\tilde{s}$ удовлетворяет соотношениям /8/

$$\ell_1\tilde{s} = \gamma_1 + O(h^4)\ , \quad x=x_o\ ,$$

$$L\tilde{s}(x) = r(x) - \frac{h^2}{12}u^{(V)}(x) + O(h^4)\ , \quad x\in\Delta_N\ , \tag{3.9}$$

$$\ell_2\tilde{s} = \gamma_2 + O(h^4)\ , \quad x=x_N\ .$$

Пусть $s_p = s^1 - \tilde{s} = \sum_{j=-1}^{N+1}(\alpha_j^1 - \tilde{\alpha}_j)B_j(x)$. Тогда из (3.3) и (3.9), с учетом (3.8), легко получаем

$$\ell_1 s_p = O(h^4) \quad x=x_o\ ,$$

$$Ls_p = O(h^4)\ , \quad x\in\Delta_N\ ,$$

$$\ell_2 s_p = O(h^4)\ , \quad x=x_N\ .$$

Отсюда следует

$$\alpha_i^1 - \tilde{\alpha}_i = O(h^4)\ , \quad i=-1,0,1,\ldots,N+1\ ,$$

и тем самым имеем

$$s^1 = \tilde{s} + O(h^4)\ , \quad a\le x\le b\ .$$

Если учесть, что $\tilde{s} = u + O(h^4)$ для всех $x\in[a,b]$, то отсюда получаем

$$s^1 - u = (s^1-\tilde{s}) + (\tilde{s}-u) = O(h^4)\ , \quad x\in[a,b]\ ,$$

т.е. доказано соотношение (3.4.).

Из (3.3), (3.8) ясно, что s^1 удовлетворяет уравнению (2.I2) с точностью $O(h^4)$. Следовательно, как это сделано для задачи (2.I2), (I.5), коэффициенты α_i^1 можно представить в виде (2.I4), т.е.

$$\alpha_i^1 = u_i - \frac{h^2}{6}u_i'' + h^4 v_2(x_i) + O(h^6)\ , \quad i=0,\ldots,N\ . \tag{3.I0}$$

При этом $v_2(x_i)$ удовлетворяет

$$\ell_1 v_2 = (7\bar{B}_1 u_o^{(V)} + 5\bar{\alpha}_1 u_o^{(IV)})/360\ , \quad x=x_o\ , \tag{3.IIa}$$

$$Lv_2(x_i) = O(1)\ , \quad i=1,\ldots,N-1\ , \tag{3.IIб}$$

$$\ell_2 v_2 = (7\bar{B}_2 u_N^{(V)} + 5\bar{\alpha}_2 u_N^{(IV)})/360\ , \quad x=x_N\ . \tag{3.IIв}$$

Отсюда ясно, что в качестве $v_2(x)$ можно взять любую функцию из класса $C^4[a,b]$, удовлетворяющую краевым условиям (3.IIa), (3.IIв). Тогда соотношения (3.5), (3.6) для всех $i=1,\ldots,N-1$ немедленно вытекают из представления (3.I0). Пусть $\bar{B}_1 \ne 0$. Тогда из (3.3) с учетом (3.4) и (3.8) получаем

$$s_o^1 = u_o + O(h^4)\ , \quad s_o^{1''} = u_o'' - \frac{h^2}{12}u_o^{IV} + O(h^4)\ .$$

Если $\bar{B}_1=0$, то без ограничения общности можно считать, что $\bar{\alpha}_1=1$. Тогда с учетом (3.I0) и краевого условия для гладкой функции $v_2(x)$ получаем

$$s_o^{1''} = \frac{\alpha_1^1 - 2\alpha_o^1 + \alpha_{-1}^1}{h^2} = \frac{6}{h^2}(u_o - \alpha_o^1) = u_o'' - \frac{h^2}{12}u_o^{IV} + O(h^4)\ ,$$

$$s_o^{1'} = \frac{\alpha_1^1 - \alpha_{-1}^1}{2h} = \frac{\alpha_1^1 + 2\alpha_o^1 - 3u_o}{h} = u_o' + O(h^4)\ .$$

Аналогичным образом доказываются соотношения (3.5), (3.6) для $i=N$. Соотношения (3.7a) являются прямым следствием равенств (3.6). Далее представим (3.6) в виде

$$\frac{s_{i+1}^{1''} + 10s_i^{1''} + s_{i-1}^{1''}}{12} - u_i'' - \frac{h^2}{12}\left[\frac{s_{i+1}^{1''} - 2s_i^{1''} + s_{i-1}^{1''}}{h^2} - u_i^{IV}\right] = O(h^4)\ ;$$

$$i=1,\ldots,N-1\ .$$

Отсюда с учетом (3.7a) получаем (3.7б). А соотношения (3.7в) немедленно вытекают из (3.6), (3.7б). Теорема доказана полностью.

Следует отметить, что аналогичный прием улучшения точности разностных решений известен под названием метода последовательных приближений, предложенного Фоксом /9/. Отметим, что схема (3.I) отличается от хорошо известной сплайн-схемы повышенной точности /I/ лишь уравнениями в точках $x=a$ и $x=b$. Преимущество схемы (3.I) состоит в том, что она непосредственно распространяется на систему дифференциальных уравнений второго порядка.

Следствие I. Из формулы (3.I0) непосредственно вытекает процедура экстраполяции по Ричардсону для схемы (3.3)

$$u_i = \frac{\alpha_i^1(h) - 20\alpha_i^1(h/2) + 64\alpha_i^1(h/4)}{45} + O(h^6), \quad i=0,\dots,N,$$

где $\alpha_i^1(h/2^m)$ – коэффициенты сплайна s^1 на сетке с шагом $h/2^m$, $m=0,1,2$.

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, I980.
2. Ильин В.П. О сплайновых решениях обыкновенных дифференциальных уравнений //Ж.вычисл.матем. и матем. физики, I978, т.I8,№3, с.620–627.
3. Lucas T.R., Reddien G. Some Collocation Methods for Nonlinear Boundary Value Problems//SIAM.J. on Numerical Analysis, 1972, v.9,2, p.341–356.
4. Жанлав Т., Жидков Е.П. Применение экстраполяции по Ричардсону к кубическим сплайнам. Препринт ОИЯИ, PII-86-4I5, Дубна, I986.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, I980.
6. Жанлав Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через B-сплайны // Вычислительные системы. – Новосибирск, I98I, вып.87: Методы сплайн-функций, с.3–I0.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, I978.
8. Жанлав Т. Об аппроксимации решений краевых задач кубическими сплайнами. Препринт ОИЯИ, PII-89-343, Дубна, I989.
9. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Ред Дж.Холл и Дж.Уатт. – М.: Мир, I979.

Рукопись поступила в издательский отдел
I6 марта I992 года.