91-525

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-91-525

М.В.Алешин

О ПОТЕНЦИАЛЕ ДВОЙНОГО СЛОЯ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1991

1. Обозначения и полученные результаты

D – конечная область в R^3 с границей S – двумерным многообразием класса C^2.

$C(\bar{D}), C(S)$ – понимаемые в общепринятом смысле банаховы пространства.

W – замкнутое подпространство $C(\bar{D})$, образованное функциями, гармоническими в D.

V – подпространство тех элементов W, которые имеют на S правильную нормальную производную.

M – интегральный оператор на $C(S)$, порождаемый ядром потенциала двойного слоя.

Λ – оператор непрерывного продолжения из $C(S)$ в W.

Часть обозначений вводится по ходу изложения.

В работе обнаружен ряд ранее неизвестных свойств M. Эти свойства позволяют строить собственные функции и резольвенту данного оператора. Они же приводят к довольно простым методам решения краевых задач для уравнения Лапласа. Один из таких методов – процедура построения плотности потенциала Робена – распространяется на более общий случай электростатических задач.

2. Предварительные сведения

Напомним (см., например, [1]), оператор Λ разрешает внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа. Такая задача корректна, поэтому Λ – непрерывная биекция $C(S)$ на W. Используя эту биекцию, преобразуем M к виду, удобному для анализа.

Начнем с известного соотношения

$$\forall\phi \in C(S) \quad (\Lambda M\phi)(\vec{r}) = (\Lambda\phi)(\vec{r}) + \frac{1}{2\pi}\int_S d\sigma' \frac{(\vec{n}(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\phi(\vec{r}\,')$$

($\vec{r} \in D$, $\vec{n}(\vec{r}\,')$ – внешняя нормаль к S в точке $\vec{r}\,'$). Другая его форма

$$(\Lambda M\Lambda^{-1})(\Lambda\phi)(\vec{r}) = -(\Lambda\phi)(\vec{r}) + \frac{1}{2\pi}\int_D d\vec{r}\,'(\vec{\nabla}'(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|})\cdot\vec{\nabla}'(\Lambda\phi)(\vec{r}\,')) \ . \Rightarrow$$

$$\forall u \in W \quad (Ku)(\vec{r}) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}(\Lambda(1+M)\Lambda^{-1}u)(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_D d\vec{r}\,'(\vec{\nabla}'(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|})\cdot\vec{\nabla}'u(\vec{r}\,'))$$

($\vec{r} \in D$, Λ^{-1} есть просто сужение функций W на границу их области определения).

Характер оператора K побуждает рассмотреть на W произведение

$$(u,v) = \frac{1}{4\pi}\int_D d\vec{r}\,(\vec{\nabla}u^*\cdot\vec{\nabla}v) \ .$$

Очевидно, W слишком широкое, чтобы требуемый интеграл существовал для любой пары его элементов. Ограничимся пространством V. На нем

$$(u,v) = \frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma\, u^*\cdot\frac{\partial v}{\partial n} \ .$$

Единственное отличие этого произведения от скалярного: из $(u,u)=0$ следует не $u=0$, а $u=const$. Данный недостаток легко устранить, положив эквивалентными все функции V, различающиеся на константу. Возникающее множество классов эквивалентности H наследует линейные операции V, а рассматриваемое произведение становится на нем скалярным. Таким образом, H – предгильбертово пространство.

Возвращаясь к K, примем во внимание $u=const \in Ker\,K$ и

$$\forall u \in V \quad (Ku)(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{r}\,') \in V \quad (\vec{r} \in \bar{D}) \ ,$$

то есть $K : V \to V$. Благодаря этим двум свойствам, на H можно определить оператор $J:\ \forall u \in V\ \ J\Theta(u) = \Theta(Ku)$ ($\Theta(u)$ – класс эквивалентности u). Исследуем его.

Прежде всего, $\forall u,v \in V$

$$(\Theta(u), J\Theta(v)) = \frac{1}{4\pi}\int_D d\vec{r}\,(\vec{\nabla}u^*(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}(\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial v}{\partial n}(\vec{r}\,'))) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma'\frac{\partial u^*}{\partial n}(\vec{r})\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial v}{\partial n}(\vec{r}\,') = (J\Theta(u),\Theta(v)) \ . \Rightarrow$$

$$(\Theta(u), J\Theta(u)) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma'\frac{\partial u^*}{\partial n}(\vec{r})\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{r}\,')\frac{2}{\pi}arctg(\frac{1}{\varepsilon}|\vec{r}-\vec{r}\,'|) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma'\frac{\partial u^*}{\partial n}(\vec{r})\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{r}\,')\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2}exp(-\varepsilon|\vec{k}| + i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,'))) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2}exp(-\varepsilon|\vec{k}|)\left|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_S d\sigma\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{r})\,exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}))\right|^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2}exp(-\varepsilon|\vec{k}|)\left|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_D d\vec{r}\,(\vec{k}\cdot\vec{\nabla}u(\vec{r}))\,exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}))\right|^2 \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{k}\,exp(-\varepsilon|\vec{k}|)\left|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_D d\vec{r}\,(\vec{\nabla}u(\vec{r}))\,exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}))\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d\vec{k}\left|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_D d\vec{r}\,(\vec{\nabla}u(\vec{r}))\,exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}))\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_D d\vec{r}\,|\vec{\nabla}u(\vec{r})|^2 = (\Theta(u),\Theta(u))$$

(используемые здесь положения можно найти в [2],[3]). Налицо эрмитовость, положительность и ограниченность J. Кроме того, поскольку

$$\|\,J\,\| = \sup_{u\in V, u\neq const}(\Theta(u), J\Theta(u))/(\Theta(u),\Theta(u)) \leq 1 \ ,$$

спектр J принадлежит отрезку [0,1] (см.[4]). Этим накладывается ограничение и на спектр M.

3. Спектральные свойства оператора M

Обозначим N – интегральный оператор на $C(S)$ с ядром, эрмитово сопряженным ядру M. Как известно ([4]), M, N компактны и их спектры, за исключением точки 0, дискретны. Соответственно, если $\lambda \neq 0$ принадлежит спектру M, то найдется

$$\psi \in C(S): \quad (N\psi)(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi}\int_S d\sigma' \frac{(\vec{n}(\vec{r})(\vec{r}-\vec{r}'))}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\psi(\vec{r}') = \lambda^*\psi(\vec{r}) \quad (\vec{r} \in S). \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\psi(\vec{r}')\right) = \frac{1}{2}(\lambda^*+1)\psi(\vec{r}) \quad (\vec{r} \in S). \Rightarrow (\lambda^*+1)\int_S d\sigma\psi = 0. \Rightarrow$$

При $\lambda \neq -1$ $\int_S d\sigma\psi = 0$. Следовательно, по теореме о разрешимости внутренней задачи Неймана $\exists u \in V: \dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi$, причем u определена с точностью до аддитивной постоянной. Для этой функции

$$\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\psi(\vec{r}') = (Ku)(\vec{r}) \quad (\vec{r} \in \bar{D}) . \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n}(Ku) = \frac{1}{2}(\lambda^*+1)\frac{\partial u}{\partial n} . \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(Ku - \frac{1}{2}(\lambda^*+1)u) = 0 . \Rightarrow Ku - \frac{1}{2}(\lambda^*+1)u = const . \Rightarrow$$

$$\Theta(Ku) = J\Theta(u) = \frac{1}{2}(\lambda^*+1)\Theta(u) . \Rightarrow \frac{1}{2}(\lambda^*+1) \in [0,1] . \Rightarrow \lambda \in [-1,1] .$$

Вспомним теперь, что на $C(S)$ уравнение $M\phi = \phi$ выполняется только при $\phi = 0$. Напротив, уравнение $M\phi = -\phi$ имеет ненулевое решение $\phi = const \neq 0$ ([1]). В результате справедлива

Теорема 1: Спектр оператора M (N) содержится в [-1,1).

Еще один факт связан с одинаковой кратностью совпадающих собственных значений M и N. Остановимся на одном таком значении $\lambda \neq 0, -1$. Пусть его кратность s. Соответственно найдется s линейно независимых функций $\psi^{(i)} \in C(S) : N\psi^{(i)} = \lambda\psi^{(i)}; \; i = 1, ..., s$. По доказанному выше каждой $\psi^{(i)}$ отвечает $u^{(i)} \in V : \dfrac{\partial u^{(i)}}{\partial n} = \psi^{(i)}. \Rightarrow$

$$Ku^{(i)} - \frac{1}{2}(\lambda+1)u^{(i)} = const . \Rightarrow$$

$$K(u^{(i)} + 2const/(\lambda+1)) = \frac{1}{2}(\lambda+1)(u^{(i)} + 2const/(\lambda+1)) . \Rightarrow$$

Выбор $u^{(i)}$ можно подчинить условию $Ku^{(i)} = \dfrac{1}{2}(\lambda+1)u^{(i)}$. Тогда

$$K\Lambda(\Lambda^{-1}u^{(i)}) = \frac{1}{2}\Lambda(M+1)(\Lambda^{-1}u^{(i)}) = \frac{1}{2}(\lambda+1)u^{(i)}. \Rightarrow M(\Lambda^{-1}u^{(i)}) = \lambda(\Lambda^{-1}u^{(i)}) .$$

Но $\Lambda^{-1}u^{(i)}; \; i = 1, ..., s$ так же линейно независимы, как и $\psi^{(i)}; \; i = 1, ..., s$. Отсюда: всякая собственная функция M, отвечающая λ, представима линейной комбинацией $\Lambda^{-1}u^{(i)}; \; i = 1, ..., s$. Тем самым нами доказана

Теорема 2: Для любых $\phi \in C(S)$, $\lambda \in R$, удовлетворяющих $M\phi = \lambda\phi$ и $\lambda \neq 0, 1$, имеет место $\Lambda\phi \in V$, $N\dfrac{\partial}{\partial n}(\Lambda\phi) = \lambda\dfrac{\partial}{\partial n}(\Lambda\phi)$.

Третье положение сформулируем относительно операторов M^2, N^2 (их собственные значения неотрицательны). Введем $\{\eta_i\}$:

$$i \in N \;, \; \eta_i \in (0, \infty) \;, \; ((\eta_i < \eta_j) \Leftrightarrow (i > j)) \;,$$

$$A_i = \{\phi \in C(S) \mid M^2\phi = {\eta_i}^2\phi\} \neq \{0\} \;, \quad B_i = \{\psi \in C(S) \mid N^2\psi = {\eta_i}^2\psi\} \neq \{0\} \;.$$

(Множества $Ker\ M^2$ и $Ker\ N^2$ рассматриваться не будут.) Обозначим через $\{{\phi_i}^{(k)}\}$ – базис A_i, через $\{{\psi_i}^{(k)}\}$ – базис B_i (i пробегает свою область значений I). Совокупность этих базисов определенным образом нормируема. Во-первых, $\forall\, i, j \in I$

$$(i \neq j) \Rightarrow \left(\int_S d\sigma{\phi_i}^{(k)}{\psi_j}^{(n)} = \frac{1}{{\eta_i}^2}\int_S d\sigma(M^2{\phi_i}^{(k)}){\psi_j}^{(n)} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{{\eta_i}^2}\int_S d\sigma{\phi_i}^{(k)}(N^2{\psi_j}^{(n)}) = \frac{{\eta_j}^2}{{\eta_i}^2}\int_S d\sigma{\phi_i}^{(k)}{\psi_j}^{(n)} = 0\right) .$$

Во-вторых, при $\eta_i \neq 1$ можно положить ${\psi_i}^{(k)} = \dfrac{\partial}{\partial n}(\Lambda{\phi_i}^{(k)})$. $\Rightarrow$

$$\int_S d\sigma{\phi_i}^{(k)}{\psi_i}^{(k)} = \int_S d\sigma{\phi_i}^{(k)}\frac{\partial}{\partial n}(\Lambda{\phi_i}^{(k)}) = \int_D d\vec{r}\,|\vec{\nabla}(\Lambda{\phi_i}^{(k)})|^2 > 0 . \Rightarrow$$

Процедура Грама – Шмидта ([4]) позволяет удовлетворить требованию

$$\int_S d\sigma{\phi_i}^{(k)}{\psi_i}^{(n)} = \delta_{kn} .$$

Проверим его выполнение в случае $\eta_i = 1$. По теореме 1 $\eta_1 = 1$, причем $A_1 = \{\phi \in C(S) \mid M\phi = -\phi\}$, $B_1 = \{\psi \in C(S) \mid N\psi = -\psi\}$. $\Rightarrow$ Для любых ненулевых $\nu \in A_1$, $\mu \in B_1$ $\nu = const$, а μ – плотность потенциала Робена на S ([1]). Согласно определению последнего

$$const = const' \int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mu(\vec{r}') \qquad (\vec{r} \in \bar{D}). \Rightarrow$$

$$\int_S d\sigma \nu\mu = const' \int_S d\sigma \int_S d\sigma' \mu(\vec{r}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mu(\vec{r}') =$$

$$= 4\pi \cdot const' \int \frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2} \left| \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_S d\sigma \ \mu(\vec{r}) \ exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r})) \right|^2$$

(применение преобразования Фурье описано выше). Полагая μ сингулярной обобщенной функцией умеренного роста, легко доказать, что ее фурье-образ $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_S d\sigma \ \mu(\vec{r}) \ exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r})) \neq 0$. $\Rightarrow$ От ν, μ можно потребовать $\nu \equiv 1$ и $\int_S d\sigma\nu\mu = 1$. Этим окончательно доказана

Теорема 3: Системы $\bigcup_{i \in I}\{\phi_i{}^{(k)}\}, \bigcup_{i \in I}\{\psi_i{}^{(k)}\}$ собственных функций операторов M^2, N^2 можно нормировать условием $\int_S d\sigma \phi_i{}^{(k)} \psi_j{}^{(n)} = \delta_{ij}\delta_{kn}$.

4. Построение собственных функций и резольвент операторов M, N

Теорема 3 делает возможным построение собственных функций M, N методом Келлога ([5]). Используя базисы, упомянутые в теореме, определим

$$P_i \ : \ \forall\phi \in C(S) \quad P_i\phi = \sum_k^{(i)} \phi_i{}^{(k)} \int_S d\sigma \psi_i{}^{(k)} \phi \ ;$$

$$Q_i \ : \ \forall\psi \in C(S) \quad Q_i\psi = \sum_k^{(i)} \psi_i{}^{(k)} \int_S d\sigma \phi_i{}^{(k)} \psi$$

(индекс возле знака суммы указывает на зависимость области изменения k от значения i). Очевидно $P_i[C(S)] = A_i$, $Q_i[C(S)] = B_i$ и

$$\forall\phi \in A_i \ \ \forall\psi \in B_i \quad P_i\phi = \phi \ , \quad Q_i\psi = \psi \ ;$$

$$\forall i \neq j \ \ \forall\phi \in A_i \ \ \forall\psi \in B_i \quad P_j\phi = 0 \ , \quad Q_j\psi = 0 \ . \Rightarrow$$

$$P_iP_j = \delta_{ij}P_i, \ \ Q_iQ_j = \delta_{ij}Q_i. \Rightarrow (1 - P_i)^2 = 1 - P_i \ , \ (1 - Q_i)^2 = 1 - Q_i \ ;$$

$$(1 - P_i)(1 - P_j) = (1 - P_j)(1 - P_i) \ , \ (1 - Q_i)(1 - Q_j) = (1 - Q_j)(1 - Q_i) \ . \Rightarrow$$

$$((1 - P_{i_1} \dots (1 - P_{i_n}))^2 = (1 - P_{i_1}) \dots (1 - P_{i_n}) \ ,$$

$$((1 - Q_{i_1}) \dots (1 - Q_{i_n}))^2 = (1 - Q_{i_1}) \dots (1 - Q_{i_n}) \ . \Rightarrow$$

При любых $i_1, \dots, i_n \in I$ $(i_1 < \dots < i_n)$ операторы

$$1 - P_{\{i_1,\dots,i_n\}} = (1 - P_{i_1}) \dots (1 - P_{i_n}) = 1 - P_{i_1} - \dots - P_{i_n} \ ,$$

$$1 - Q_{\{i_1,\dots,i_n\}} = (1 - Q_{i_1}) \dots (1 - Q_{i_n}) = 1 - Q_{i_1} - \dots - Q_{i_n}$$

являются проекторами и их области значений $X_{\{i_1,\dots,i_n\}}$, $Y_{\{i_1,\dots,i_n\}}$ – замкнутые подпространства $C(S)$. Для этих подпространств справедливо:

$$\forall i \in I \quad \forall\phi \in A_i \quad \forall\psi \in B_i$$

$$(i \in \{i_1, \dots, i_n\}) \Leftrightarrow (\phi \notin X_{\{i_1,\dots,i_n\}}) \Leftrightarrow (\psi \notin Y_{\{i_1,\dots,i_n\}}) \ . \qquad (*)$$

Воспользуемся еще одним свойством операторов P_i, Q_i :

$$\forall\phi \in C(S) \quad MP_i\phi = \sum_k^{(i)} (M\phi_i{}^{(k)}) \int_S d\sigma\psi_i{}^{(k)} \phi =$$

$$= \sum_k^{(i)} \phi_i{}^{(k)} \int_S d\sigma (N\psi_i{}^{(k)}) \phi = \sum_k^{(i)} \phi_i{}^{(k)} \int_S d\sigma\psi_i{}^{(k)} (M\phi) = P_iM\phi \ ,$$

$$\forall\psi \in C(S) \quad NQ_i\psi = \sum_k^{(i)} (N\psi_i{}^{(k)}) \int_S d\sigma\phi_i{}^{(k)} \psi =$$

$$= \sum_k^{(i)} \psi_i{}^{(k)} \int_S d\sigma (M\phi_i{}^{(k)}) \psi = \sum_k^{(i)} \psi_i{}^{(k)} \int_S d\sigma\phi_i{}^{(k)} (N\psi) = Q_iN\psi \ . \Rightarrow$$

$$MP_{\{i_1,\dots,i_n\}} = P_{\{i_1,\dots,i_n\}}M \ , \quad NQ_{\{i_1,\dots,i_n\}} = Q_{\{i_1,\dots,i_n\}}N \ . \Rightarrow$$

Оператор M (N) допускает сужение на $X_{\{i_1,\dots,i_n\}}$ $(Y_{\{i_1,\dots,i_n\}})$. В силу $(*)$ спектр такого сужения совпадает со спектром M, N всюду, кроме тех точек, чей модуль равен $\eta_{i_1},\dots,\eta_{i_n}$. Следовательно (см. [4]),

$$\lim_{p\to\infty} \| (M\uparrow X_{\{i_1,\dots,i_n\}})^p \|^{1/p} = \lim_{p\to\infty} \| (N\uparrow Y_{\{i_1,\dots,i_n\}})^p \|^{1/p} = \sup_{\substack{\text{спектр M,N}\\ |\lambda|\neq \eta_{i_1},\dots,\eta_{i_n}}} |\lambda| .$$

Данное соотношение позволяет строить те собственные функции M, N, которые не принадлежат $Ker\ M^2$, $Ker\ N^2$.

Допустим, уже известны $P_1, Q_1;\dots;P_{n-1}, Q_{n-1}$. Существуют ли η_n, A_n, B_n? Ответ на этот вопрос положителен, если спектральный радиус оператора $M(1-P_1)\dots(1-P_{n-1})$ $(N(1-Q_1)\dots(1-Q_{n-1}))$ отличен от нуля. Считая указанное условие выполненным (при нулевом спектральном радиусе исследование просто прекращается), имеем

$$\forall\phi\in C(S)\quad (1-P_1)\dots(1-P_{n-1})\phi = P_n\phi + (1-P_1)\dots(1-P_n)\phi\ ,$$

$$\forall(\delta\in R:\ \sup_{\substack{\text{спектр M}\\ |\lambda|<\eta_n}} |\lambda| < \delta < \eta_n)\quad \exists q\in N:\ \forall p>q$$

$$\| M^{2p}(1-P_1)\dots(1-P_n)\phi \| < \delta^{2p} \| (1-P_1)\dots(1-P_n)\phi \|\ .$$

С другой стороны, можно выбрать $\phi\in C(S):\ P_n\phi\neq 0\ .\ \Rightarrow$

$$\lim_{p\to\infty} M^{2p}(1-P_1)\dots(1-P_{n-1})\phi/\| M^{2p}(1-P_1)\dots(1-P_{n-1})\phi \| =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\frac{\eta_n{}^{2p}P_n\phi + M^{2p}(1-P_1)\dots(1-P_n)\phi}{\| \eta_n{}^{2p}P_n\phi + M^{2p}(1-P_1)\dots(1-P_n)\phi \|} =$$

$$= P_n\phi/\| P_n\phi \| = \phi_n{}^{(1)}.\ \Rightarrow\ \eta_n = (M^2\phi_n{}^{(1)}/\phi_n{}^{(1)})^{1/2}.$$

От $\phi_n{}^{(1)}$ легко перейти к $\psi_n{}^{(1)}$. Учтем два обстоятельства:

$$\int_S d\sigma\phi_n{}^{(1)}(Q_n\phi_n{}^{(1)}) = \int_S d\sigma(P_n\phi_n{}^{(1)})\phi_n{}^{(1)} = \int_S d\sigma(\phi_n{}^{(1)})^2 \neq 0\ ,$$

$$\forall\psi\in C(S)\quad \lim_{p\to\infty}(N/\eta_n)^{2p}(1-Q_1)\dots(1-Q_n)\psi = 0\ .\ \Rightarrow$$

$$\psi_n{}^{(1)} = \lim_{p\to\infty}(N/\eta_n)^{2p}(1-Q_1)\dots(1-Q_{n-1})\phi_n{}^{(1)}/(\int_S d\sigma(\phi_n{}^{(1)})^2) =$$

$$= \lim_{p\to\infty}(Q_n\phi_n{}^{(1)} + (N/\eta_n)^{2p}(\prod_{i=1}^{n}(1-Q_i))\phi_n{}^{(1)})/(\int_S d\sigma(\phi_n{}^{(1)})^2) =$$

$$= Q_n\phi_n{}^{(1)}/(\int_S d\sigma(\phi_n{}^{(1)})^2) \neq 0\ .\ \Rightarrow\ \psi_n{}^{(1)}\in B_n\ ,\ \int_S d\sigma\phi_n{}^{(1)}\psi_n{}^{(1)} = 1\ .$$

Как и выше, условием прекращения исследования служит:

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sup_{\phi\neq 0}\frac{1}{\|\phi\|}\| M^p(1-P_1)\dots(1-P_{n-1})(\phi-\phi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\psi_n{}^{(1)}\phi) \|\right)^{1/p} = 0\ .$$

Несоблюдение его вынуждает сделать новый шаг – рассмотреть

$$\lim_{p\to\infty}(M/\eta_n)^{2p}(1-P_1)\dots(1-P_{n-1})(\phi-\phi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\psi_n{}^{(1)}\phi) =$$

$$= \lim_{p\to\infty}(P_n(\phi-\phi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\psi_n{}^{(1)}\phi) + (M/\eta_n)^{2p}(\prod_{i=1}^{n}(1-P_i))\phi) =$$

$$= P_n(\phi-\phi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\psi_n{}^{(1)}\phi) = P_n\phi - \phi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\psi_n{}^{(1)}(P_n\phi)\ .\ \Rightarrow$$

Либо $A_n = \{\phi\in C(S)\mid \phi/\phi_n{}^{(1)} = const\}$, $B_n = \{\psi\in C(S)\mid \psi/\psi_n{}^{(1)} = const\}$ и рассматриваемый предел равен нулю при всех $\phi\in C(S)$, либо найдется

$$\phi\in C(S):\quad P_n\phi - \phi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\psi_n{}^{(1)}(P_n\phi) \neq 0\ .$$

Первая альтернатива приводит к исходной ситуации, остановимся поэтому на второй. Обозначим

$$\phi_n{}^{(2)} = P_n(\phi-\phi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\psi_n{}^{(1)}\phi)/\| P_n(\phi-\phi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\psi_n{}^{(1)}\phi) \|\ .\ \Rightarrow$$

$$\|\phi_n{}^{(2)}\| = 1\ ,\ \phi_n{}^{(2)}\in A_n\ ,\ \int_S d\sigma\phi_n{}^{(2)}\psi_n{}^{(1)} = 0\ .\ \Rightarrow$$

$$\int_S d\sigma\phi_n{}^{(1)}(Q_n(\phi_n{}^{(2)} - \psi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\phi_n{}^{(1)}\phi_n{}^{(2)})) =$$

$$= \int_S d\sigma\phi_n{}^{(1)}(\phi_n{}^{(2)} - \psi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\phi_n{}^{(1)}\phi_n{}^{(2)}) = 0\ ,$$

$$\int_S d\sigma\phi_n{}^{(2)}(Q_n(\phi_n{}^{(2)} - \psi_n{}^{(1)}\int_S d\sigma\phi_n{}^{(1)}\phi_n{}^{(2)})) =$$

$$= \int_S d\sigma \phi_n{}^{(2)}(\phi_n{}^{(2)} - \psi_n{}^{(1)} \int_S d\sigma \phi_n{}^{(1)} \phi_n{}^{(2)})) = \int_S d\sigma (\phi_n{}^{(2)})^2 \neq 0 \ . \ \Rightarrow$$

$$Q_n(\phi_n{}^{(2)} - \psi_n{}^{(1)} \int_S d\sigma \phi_n{}^{(1)} \phi_n{}^{(2)}) \neq 0 \ . \ \Rightarrow$$

$$\psi_n{}^{(2)} = Q_n(\phi_n{}^{(2)} - \psi_n{}^{(1)} \int_S d\sigma \phi_n{}^{(1)} \phi_n{}^{(2)})/(\int_S d\sigma (\phi_n{}^{(2)})^2) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} (N/\eta_n)^{2p} (\prod_{i=1}^{n-1} (1 - Q_i))(\phi_n{}^{(2)} - \psi_n{}^{(1)} \int_S d\sigma \phi_n{}^{(1)} \phi_n{}^{(2)})/(\int_S d\sigma (\phi_n{}^{(2)})^2) \ . \ \Rightarrow$$

$$\psi_n{}^{(2)} \in B_n, \ \int_S d\sigma \phi_n{}^{(1)} \psi_n{}^{(2)} = 0 \ , \ \int_S d\sigma \phi_n{}^{(2)} \psi_n{}^{(2)} = 1 \ .$$

Дальнейшие шаги очевидны. Они позволяют восстановить B_n, A_n. Оставшиеся A_i, B_i можно искать той же процедурой. Собственные функции операторов M, N будут содержаться в множествах

$$A_i{}^{(+)} = \{(1 + M/\eta_i)\phi \mid \phi \in A_i\} \ , \quad A_i{}^{(-)} = \{(1 - M/\eta_i)\phi \mid \phi \in A_i\} \ ,$$

$$B_i{}^{(+)} = \{(1 + N/\eta_i)\psi \mid \psi \in B_i\} \ , \quad B_i{}^{(-)} = \{(1 - N/\eta_i)\psi \mid \psi \in B_i\} \quad (i \in I) \ .$$

Переходя к вопросу о резольвентах M, N, определим ξ_i, ζ_i:

$$(\xi_i = 0) \Leftrightarrow (A_i{}^{(+)} = B_i{}^{(+)} = \{0\}) \ , \ (\xi_i = 1) \Leftrightarrow (A_i{}^{(+)} \neq \{0\} \ , \ B_i{}^{(+)} \neq \{0\}) \ ,$$

$$(\zeta_i = 0) \Leftrightarrow (A_i{}^{(-)} = B_i{}^{(-)} = \{0\}) \ , \ (\zeta_i = 1) \Leftrightarrow (A_i{}^{(-)} \neq \{0\}, \ B_i{}^{(-)} \neq \{0\}) \ . \ \Rightarrow$$

Спектр M, N есть $\bigcup_i \{\xi_i \eta_i, -\zeta_i \eta_i\}$. Знание его оказывается достаточным для построения $(\lambda - M)^{-1}, (\lambda - N)^{-1}$ при $\lambda \notin \bigcup_i \{\xi_i \eta_i, -\zeta_i \eta_i\}$. В самом деле,

$$\forall \lambda, \lambda' \in R, \ \lambda \neq \lambda' \ (\lambda - M)^{-1} = \frac{1}{\lambda - \lambda'}((M - \lambda')(\lambda - M)^{-1} + 1) \ . \ \Rightarrow$$

$$(\lambda - M)^{-1} = \frac{\xi_i}{\lambda - \eta_i} + \left(\frac{M - \eta_i}{\lambda - \eta_i}\right)^{\xi_i} \frac{\zeta_i}{\lambda + \eta_i} + \left(\frac{M - \eta_i}{\lambda - \eta_i}\right)^{\xi_i} \left(\frac{M + \eta_i}{\lambda + \eta_i}\right)^{\zeta_i} (\lambda - M)^{-1} . \Rightarrow$$

$$(\lambda - M)^{-1} = \frac{1}{\lambda + 1} + \frac{M+1}{\lambda+1} \frac{\xi_2}{\lambda - \eta_2} + \frac{M+1}{\lambda+1} \left(\frac{M - \eta_2}{\lambda - \eta_2}\right)^{\xi_2} \frac{\zeta_2}{\lambda + \eta_2} + \ldots +$$

$$+ \left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{M - \eta_i}{\lambda - \eta_i}\right)^{\xi_i} \left(\frac{M + \eta_i}{\lambda + \eta_i}\right)^{\zeta_i}\right) (\lambda - M)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda + 1} + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{\xi_i}{\lambda - \eta_i} + \left(\frac{M - \eta_i}{\lambda - \eta_i}\right)^{\xi_i} \frac{\zeta_i}{\lambda + \eta_i}\right) \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{M - \eta_j}{\lambda - \eta_j}\right)^{\xi_j} \left(\frac{M + \eta_j}{\lambda + \eta_j}\right)^{\zeta_j} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{M - \eta_i}{\lambda - \eta_i}\right)^{\xi_i} \left(\frac{M + \eta_i}{\lambda + \eta_i}\right)^{\zeta_i}\right) (M/\lambda)^p$$

при $|\lambda| > \eta_n$ и $\lambda \neq -1; \xi_2\eta_2, -\zeta_2\eta_2; \ldots ; \xi_{n-1}\eta_{n-1}, -\zeta_{n-1}\eta_{n-1}$. Сходимость степенного ряда в круге $|\lambda| > \eta_n$ обусловлена свойствами

$$\prod_{i=1}^{n-1} (M - \eta_i)^{\xi_i} (M + \eta_i)^{\zeta_i} = (\prod_{i=1}^{n-1} (M - \eta_i)^{\xi_i} (M + \eta_i)^{\zeta_i})(1 - P_{\{1,\ldots,n-1\}}),$$

$$\lim_{p\to\infty} \| ((1 - P_{\{1,\ldots,n-1\}})M)^p \|^{1/p} = \lim_{p\to\infty} \| (M \uparrow X_{\{1,\ldots,n-1\}})^p \|^{1/p} = \eta_n.$$

Что касается резольвенты $(\lambda - N)^{-1}$, то она получается из $(\lambda - M)^{-1}$ прямой заменой $M \to N$.

5. Классические задачи Дирихле, Неймана и Робена

Ниже используются следующие результаты предыдущего раздела:

$$(1 - M)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + M) M^n, \ \ (1 - N)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + N) N^n,$$

$$\forall \phi \in C(S) \ \ \forall \psi \in C(S) \ \ \forall (\delta \in R : \sup_{\substack{\text{спектр M} \\ |\lambda| \neq 1}} |\lambda| < \delta < 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} (M/\delta)^n (\phi - \nu \int_S d\sigma \mu \phi) = \lim_{n\to\infty} (N/\delta)^n (\psi - \mu \int_S d\sigma \nu \psi) = 0$$

(по-прежнему $\nu, \mu \in C(S) : \nu \equiv 1, N\mu = -\mu, \int_S d\sigma \nu \mu = 1$; сходимость всюду равномерная). Данные положения позволяют решать все основные типы краевых задач для уравнения Лапласа. Кратко рассмотрим каждый из типов ([1]).

Внутренняя задача Дирихле: найти гармоническую в D функцию $u \in C(\bar{D})$, принимающую на S заданное значение $\phi \in C(S)$. Решение ее можно искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(\vec r) = (\Lambda\phi)(\vec r) = (\Xi\alpha)(\vec r) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi}\int_S d\sigma' \frac{(\vec n(\vec r\,')(\vec r - \vec r\,'))}{|\vec r - \vec r\,'|^3}\alpha(\vec r\,')$$

($\vec r \in D$, $\vec n(\vec r\,')$ – внешняя нормаль к S в точке $\vec r\,'$, $\alpha \in C(S)$). Плотность такого потенциала α подчиняется уравнению $\phi = \Lambda^{-1}\Xi\alpha = -(1-M)\alpha$. Уравнение разрешимо, поскольку единица принадлежит резольвентному множеству M. Соответственно $\Lambda^{-1}\Xi = -(1-M)$. $\Rightarrow$

$$\Lambda = -\Xi(1-M)^{-1} = -\frac{1}{2}\Xi - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Xi(1+M)M^n. \Rightarrow$$

$$u(\vec r) = -\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma' \frac{(\vec n(\vec r\,')(\vec r - \vec r\,'))}{|\vec r - \vec r\,'|^3}\phi(\vec r\,') -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma' \frac{(\vec n(\vec r\,')(\vec r - \vec r\,'))}{|\vec r - \vec r\,'|^3}((1+M)M^n\phi)(\vec r\,') \quad (\vec r \in D).$$

Попутно оказывается определенной и функция Грина задачи Дирихле. Она (легко проверить) является ядром оператора $F - \Lambda\Gamma F$, где

$$\forall u \in C(\bar D) \quad \Gamma u = u \downarrow S, \quad (Fu)(\vec r) = \frac{1}{4\pi}\int_D d\vec r\,' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}u(\vec r\,') \quad (\vec r \in \bar D).$$

Внешняя задача Неймана: найти гармоническую в $G = R^3 \backslash \bar D$ функцию $f \in C(\bar G)$, имеющую на S заданную правильную нормальную производную $\psi \in C(S)$ и обращающуюся в 0 на бесконечности. Представление

$$f(\vec r) = \frac{1}{2\pi}\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}\beta(\vec r\,') \quad (\vec r \in \bar G)$$

сводит эту проблему к граничному уравнению $\psi = -(1-N)\beta$. $\Rightarrow$

$$\beta = -(1-N)^{-1}\psi = -\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1+N)N^n\psi. \Rightarrow$$

$$f(\vec r) = -\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}\psi(\vec r\,') -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}((1+N)N^n\psi)(\vec r\,') \quad (\vec r \in \bar G).$$

Внутренняя задача Неймана: найти гармоническую в D функцию $v \in C(\bar D)$, имеющую на S заданную правильную нормальную производную $\psi \in C(S)$. Подобно предыдущему

$$v(\vec r) = \frac{1}{2\pi}\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}\beta(\vec r\,') \quad (\vec r \in \bar D),$$

однако теперь $\psi = \beta + N\beta = (1+N)\beta$. Данное уравнение разрешимо лишь при условии $\int_S d\sigma\nu\psi = 0$ ([1]). Это же условие влечет сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-N)^n\psi = \sum_{n=0}^{\infty}(-N)^n(\psi - \mu\int_S d\sigma\nu\psi). \Rightarrow$$

$$(1+N)\sum_{n=0}^{\infty}(-N)^n\psi = \psi. \Rightarrow \beta = \sum_{n=0}^{\infty}(-N)^n\psi + const\cdot\mu. \Rightarrow$$

$$v(\vec r) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}((-N)^n\psi)(\vec r\,') + const \quad (\vec r \in \bar D).$$

Внешняя задача Дирихле: найти гармоническую в G функцию $g \in C(\bar G)$, принимающую на S заданное значение $\phi \in C(S)$ и обращающуюся в 0 на бесконечности. Здесь разумно представить

$$g(\vec r) = \frac{1}{2\pi}\int_S d\sigma' \frac{(\vec n(\vec r\,')(\vec r - \vec r\,'))}{|\vec r - \vec r\,'|^3}\alpha(\vec r\,') + \frac{1}{|\vec r - \vec r_0|}(\int_S d\sigma\mu\phi)/(\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec r\,' - \vec r_0|}\mu(\vec r\,'))$$

($\vec r \in G$, $\vec r_0$ – некоторая точка D). Тогда $\alpha + M\alpha = (1+M)\alpha = \gamma$, где

$$\gamma(\vec r) \stackrel{def}{=} \phi(\vec r) - \frac{1}{|\vec r - \vec r_0|}(\int_S d\sigma\mu\phi)/(\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec r\,' - \vec r_0|}\mu(\vec r\,')) \quad (\vec r \in S). \Rightarrow$$

В силу свойств μ $\int_S d\sigma\mu\gamma = 0.$ $\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-M)^n\gamma$ сходится, а значит, удовлетворяет условию $(1+M)\sum_{n=0}^{\infty}(-M)^n\gamma = \gamma. \Rightarrow \alpha = \sum_{n=0}^{\infty}(-M)^n\gamma + const. \Rightarrow$

$$g(\vec r) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_S d\sigma' \frac{(\vec n(\vec r\,')(\vec r - \vec r\,'))}{|\vec r - \vec r\,'|^3}((-M)^n\gamma(\vec r\,') +$$

$$+ \frac{1}{|\vec r - \vec r_0|}(\int_S d\sigma\mu\phi)/(\int_S d\sigma' \frac{1}{|\vec r\,' - \vec r_0|}\mu(\vec r\,')) \quad (\vec r \in G).$$

Осталось найти μ. Принимая во внимание третье из положений, приведенных в начале параграфа, имеем $\forall\psi \in C(S)$

$$\lim_{n\to\infty}(-N)^n\psi = \mu\int_S d\sigma\nu\psi + \lim_{n\to\infty}(-N)^n(\psi - \mu\int_S d\sigma\nu\psi) = \mu\int_S d\sigma\nu\psi. \Rightarrow$$

$$\mu = \lim_{n\to\infty}(-N)^n(\nu/(\int_S d\sigma)) .$$

Этот результат можно обобщить на электростатические системы.

6. Общая проблема электростатики проводников

Рассмотрим систему n проводников, помещенных в вакуум. Пусть D_i – область пространства, занимаемая i-м проводником; S_i – его поверхность; q_i – электрический заряд; α_i – поверхностная плотность заряда ($\alpha_i \in C(S_i)$, $\int_S d\sigma\alpha_i = q_i$). Все перечисленные параметры безразмерные; D_i, S_i удовлетворяют тем же требованиям, что и D, S. Определим зависимость $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ от геометрии системы и $q_1, \ldots, q_n$.

Заряды на $S_1, \ldots, S_n$ находятся в равновесии со своим электрическим полем. Это равновесие проявляется в форме потенциала поля

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi}\int_{S_i} d\sigma'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\alpha_i(\vec{r}') + const \qquad (\vec{r}\in R^3) .$$

Вдоль проводников потенциал постоянен: $\Phi\downarrow\bar{D}_i = const_i \;\; (i = 1, \ldots, n)$. $\Rightarrow$

$$2\frac{\partial}{\partial n}(\Phi)(\vec{r}) = \alpha_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{S_j} d\sigma'\frac{(\vec{n}(\vec{r})(\vec{r}-\vec{r}'))}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\alpha_j(\vec{r}') = ((\delta_{ij}+N_{ij})\alpha_j)(\vec{r}) = 0$$

($\vec{r}\in S_i$, нормальная производная берется изнутри поверхности, по повторяющимся индексам ведется суммирование). Данная система уравнений фредгольмова. Союзная к ней

$$\beta_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{S_j} d\sigma'\frac{(\vec{n}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}'))}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\beta_j(\vec{r}') = ((\delta_{ij}+M_{ij})\beta_j)(\vec{r}) = 0 \quad (\vec{r}\in S_i) .$$

Операторы M_{ij}, N_{ij} отображают $\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)$ на $\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)$. Их свойства, очевидно, совпадают со свойствами M, N.

Для системы уравнений $(\delta_{ij}+M_{ij})\beta_j = 0$ сразу можно указать n линейно независимых решений: $\beta_i = \nu_i^{(1)} \equiv \delta_{i1}, \ldots, \beta_i = \nu_i^{(n)} \equiv \delta_{in}$. $\Rightarrow$

$$\exists\{\mu_i^{(1)}\}, \ldots, \{\mu_i^{(n)}\} \in (\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)) : \quad (\delta_{ij}+N_{ij})\mu_j^{(k)} = 0 ,$$

$$\forall c_1, \ldots, c_n \in R \;\; (c_k\{\mu_i^{(k)}\} = 0 \Leftrightarrow c_k \cdot c_k = 0)$$

(соблюдается правило суммирования по повторяющимся индексам). Таким образом, кратность собственного значения $\lambda = -1$ операторов M_{ij}, N_{ij} не меньше n. Может ли она быть больше n?

Обозначим $q_i^{(k)} = \int_{S_i} d\sigma\mu_i^{(k)}$. Как известно (см.[6]), $q_1, \ldots, q_n$ однозначно связаны с $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. В частности,

$$(q_1 = 0, \ldots, q_n = 0) \Leftrightarrow (\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0) . \Rightarrow$$

$$\forall c_1, \ldots, c_n \in R \;\; ((c_k q_i^{(k)} = 0;\; i = 1, \ldots, n) \Leftrightarrow c_k\{\mu_i^{(k)}\} = 0 \Leftrightarrow c_k \cdot c_k = 0) . \Rightarrow$$

$\{q_i^{(1)}\}, \ldots, \{q_i^{(n)}\}$ – базис в R^n. $\Rightarrow$ $\exists c_1, \ldots, c_n \in R$: $\{q_i\} = c_k\{q_i^{(k)}\}$. $\Rightarrow$

$\{\alpha_i\} = c_k\{\mu_i^{(k)}\}$. $\Rightarrow$ $\{\mu_i^{(1)}\}, \ldots, \{\mu_i^{(n)}\}$ – базис в пространстве собственных функций N_{ij}, отвечающих собственному значению $\lambda = -1$. Выбор этого базиса подчиним условию $q_i^{(k)} = \delta_{ik}$. $\Rightarrow \alpha_i = q_k\mu_i^{(k)}$, $\int_{S_j} d\sigma\nu_j^{(i)}\mu_j^{(k)} = \delta_{ik}$.

Далее следуем аналогии с задачей Дирихле. Подобно W, V и Λ для области D введем W_i, V_i и Λ_i для D_i. $\Rightarrow W' = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i, V' = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i, \Lambda' = \bigoplus_{i=1}^{n}\Lambda_i$. $\Rightarrow$

$$\forall\{\phi_i\} \in (\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)) \;\; \frac{1}{2}\Lambda'\{(\delta_{ij}+M_{ij})\phi_j\} = \{v_i\} \in W' , \text{ где}$$

$$v_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{D_k} d\vec{r}'(\vec{\nabla}'(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) \cdot \vec{\nabla}'(\Lambda_k\phi_k)(\vec{r}')) = (K_{ik}\Lambda_k\phi_k)(\vec{r}) \quad (\vec{r}\in D_i) . \Rightarrow$$

$$\forall\{u_i\}, \{v_i\} \in V' \quad (\{u_i\}, \{v_i\}) \stackrel{def}{=} \frac{1}{4\pi}\int_{D_i} d\vec{r}\,(\vec{\nabla}u_i^* \cdot \vec{\nabla}v_i) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_i} d\sigma\; u_i^* \cdot \frac{\partial v_i}{\partial n} . \Rightarrow$$

$$\forall\{u_i\} \in V' \quad ((\{u_i\},\{u_i\}) = 0 \Leftrightarrow u_i = const_i \ ; \ \ i = 1,\ldots,n) \ . \ \Rightarrow$$

$$\forall\{u_i\},\{v_i\} \in V' \quad ((\{u_i\} \sim \{v_i\}) \overset{def}{\Leftrightarrow} u_i - v_i = const_i \ ; \ \ i = 1,\ldots,n) \ . \ \Rightarrow$$

$$\forall\{u_i\} \in V' \quad \Theta'(\{u_i\}) \in V'/_{\sim} \ . \ \Rightarrow$$

$\forall\{u_i\},\{v_i\} \in V' \quad (\Theta'(\{u_i\}),\Theta'(\{v_i\})) \overset{def}{=} (\{u_i\},\{v_i\})$ – скалярное произведение на $V'/_{\sim}$. Оператор K_{ij}, в свою очередь, обладает свойствами:

$$\{const_i\} \in Ker\ K_{ij} \ \text{ и } \ \forall\{u_i\} \in V' \ \ \{K_{ij}u_j\} \in V' \ . \ \Rightarrow$$

На $V'/_{\sim}$ определим J': $\forall\{u_i\} \in V' \ \ J'\Theta'(\{u_i\}) = \Theta'(\{K_{ij}u_j\})$.

Проверим эрмитовость, положительность и ограниченность J'.

$$\forall\{u_i\},\{v_i\} \in V' \quad (\Theta'(\{u_i\}), J'\Theta'(\{v_i\})) = (J'\Theta'(\{u_i\}),\Theta'(\{v_i\})) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{4\pi}\int_{S_i} d\sigma \frac{1}{4\pi}\int_{S_j} d\sigma' \frac{\partial u_i^*}{\partial n}(\vec{r}) \ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ \frac{\partial v_j}{\partial n}(\vec{r}') \ . \ \Rightarrow$$

$$\forall\{u_i\} \in V' \quad (\Theta'(\{u_i\}), J'\Theta'(\{u_i\})) =$$

$$= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{4\pi}\int_{S_i} d\sigma \frac{1}{4\pi}\int_{S_j} d\sigma' \frac{\partial u_i^*}{\partial n}(\vec{r}) \ \frac{\partial u_j}{\partial n}(\vec{r}') \ \frac{2}{\pi} arctg(\frac{1}{\varepsilon}|\vec{r}-\vec{r}'|) =$$

$$= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2} \ exp(-\varepsilon|\vec{k}|) \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{D_i} d\vec{r} \ (\vec{k}\cdot\vec{\nabla}u_i(\vec{r})) \ exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}))\right|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi}\int d\vec{k} \ \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{D_i} d\vec{r} \ (\vec{\nabla}u_i(\vec{r})) \ exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}))\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{D_i} d\vec{r} \ (\vec{\nabla}u_i^* \cdot \vec{\nabla}u_i) = (\Theta'(\{u_i\}),\Theta'(\{u_i\})) \ . \ \Rightarrow$$

Спектр J' содержится в [0,1].

Связь операторов M_{ij}, N_{ij}, J' влечет ограничение и на спектр M_{ij}, N_{ij}. Выберем произвольную ненулевую $\{\psi_i\} \in (\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)): \ \{N_{ij}\psi_j\} = \lambda\{\psi_i\}$ (λ принадлежит комплексной плоскости и отлична от (-1)). Для нее

$$\frac{\partial}{\partial n}(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi}\int_{S_j} d\sigma' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\psi_j(\vec{r}')) = \frac{1}{2}(\lambda+1)\psi_i(\vec{r})$$

($\vec{r} \in S_i$, нормальная производная берется изнутри поверхности). ⇒

$$(\lambda+1)\int_{S_i} d\sigma\psi_i = 0 \ . \ \Rightarrow \ \int_{S_i} d\sigma\psi_i = 0 \ . \ \Rightarrow \ \exists u_i \in V_i: \ \frac{\partial u_i}{\partial n} = \psi_i \ . \ \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi}\int_{S_j} d\sigma' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\psi_j(\vec{r}')) = (K_{ij}u_j)(\vec{r}) \qquad (\vec{r} \in \bar{D}_i) \ . \ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(K_{ij}u_j) = \frac{1}{2}(\lambda+1)\frac{\partial u_i}{\partial n} \ . \ \Rightarrow \ \frac{\partial}{\partial n}(K_{ij}u_j - \frac{1}{2}(\lambda+1)u_i) = 0 \ . \ \Rightarrow$$

$$K_{ij}u_j - \frac{1}{2}(\lambda+1)u_i = const_i \ . \ \Rightarrow$$

$$\Theta'(\{K_{ij}u_j\}) = J'\Theta'(\{u_i\}) = \frac{1}{2}(\lambda+1)\Theta'(\{u_i\}) \ . \ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(\lambda+1) \in [0,1] \ . \ \Rightarrow \ \lambda \in [-1,1] \ .$$

Опять встает вопрос, является ли $\lambda = 1$ собственным значением M_{ij}, N_{ij}. Допустим $\{\psi_i\} \in (\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)): \ \{N_{ij}\psi_j\} = \{\psi_i\}$. ⇒

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi}\int_{S_i} d\sigma' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\psi_i(\vec{r}') \qquad (\vec{r} \in R^3) \ . \ \Rightarrow$$

$$2\frac{\partial}{\partial n}(\Psi)(\vec{r}) = -\psi_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{S_j} d\sigma' \frac{(\vec{n}(\vec{r})(\vec{r}-\vec{r}'))}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\psi_j(\vec{r}') = ((-\delta_{ij}+N_{ij})\psi_j)(\vec{r}) = 0$$

($\vec{r} \in S_i$, нормальная производная берется извне поверхности). Отсюда

$$\int_{G'} d\vec{r} \ (\vec{\nabla}\Psi^* \cdot \vec{\nabla}\Psi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} d\sigma \ \Psi^* \frac{\partial}{\partial n}(\Psi) = 0$$

(G' – область пространства R^3 вне $\bar{D}_1,\ldots,\bar{D}_n$). Но $\Psi \in C(\bar{G}') \cap C^1(G')$ и $\lim_{|\vec{r}|\to\infty} \Psi(\vec{r}) = 0$, поэтому $((\vec{\nabla}\Psi) \downarrow G') = 0$. ⇒ $(\Psi \downarrow G') = const = 0$. ⇒ $(\Psi \downarrow S_i) = 0$; $i = 1,\ldots,n$. ⇒ В силу единственности решения внутренней задачи Дирихле $(\Psi \downarrow D_i) = 0$; $i = 1,\ldots,n$. ⇒ $\{\psi_i\} = 0$. ⇒ Поскольку M_{ij}, N_{ij} компактны, $\lambda = 1$ принадлежит их резольвентному множеству. В итоге $\lambda = (-1)$ – максимальное по модулю собственное значение M_{ij}, N_{ij}.

Остался последний шаг к построению $\{\mu_i^{(1)}\},\ldots,\{\mu_i^{(n)}\}$. Определим

$$Q'_{ij} \ : \quad \forall\{\psi_i\} \in (\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)) \quad Q'_{ij}\psi_j = \mu_i^{(k)}\int_{S_j} d\sigma \ \nu_j^{(k)}\psi_j \ .$$

Образ $\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)$ при действии оператора $\delta_{ij} - Q'_{ij}$ обозначим Y'. Свойства Q'_{ij}, Y' подобны свойствам $Q_1, Y_{\{1\}}$:

1. $Q'_{ij}Q'_{jk} = Q'_{ik}$. $\Rightarrow$ Y' –замкнутое подпространство $\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)$.

2. $N_{ij}Q'_{jk} = Q'_{ij}N_{jk}$. $\Rightarrow$ Имеет смысл сужение $N_{ij} \uparrow Y'$.

3. $(\delta_{ij} - Q'_{ij})\mu_j^{(k)} = 0;\ k = 1, \ldots, n.$

4. Если $\{\psi_i\}$ – собственная функция N_{ij}, отвечающая собственному значению $\lambda \neq -1$, то $\int_{S_i} d\sigma \nu_i^{(k)} \psi_i = -\int_{S_i} d\sigma (M_{ij}\nu_j^{(k)})\psi_i =$

$$= -\int_{S_i} d\sigma \nu_i^{(k)} (N_{ij}\psi_j) = -\lambda \int_{S_i} d\sigma \nu_i^{(k)} \psi_i = 0 \ . \ \Rightarrow$$

$$\{(\delta_{ij} - Q'_{ij})\psi_j\} = \{\psi_i\}. \ \Rightarrow \ \{\psi_i\} \in Y' \ . \ \Rightarrow$$

Спектр $N_{ij} \uparrow Y'$ получается из спектра N_{ij} исключением точки (-1). $\Rightarrow$

$$\lim_{p\to\infty} \| N_{ii_1} \ldots N_{i_{p-1}j}(\delta_{jk} - Q'_{jk}) \|^{1/p} = \sup_{\substack{\text{спектр } N_{ij} \\ |\lambda| \neq 1}} |\lambda| = \eta' < 1 \ . \ \Rightarrow$$

$$\forall \{\phi_i\} \in (\bigoplus_{i=1}^{n} C(S_i)) \quad \lim_{p\to\infty} N_{ii_1} \ldots N_{i_pj}(\delta_{jk} - Q'_{jk})\phi_k = 0 \ . \ \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} (-N_{ii_1}) \ldots (-N_{i_pj})\phi_j =$$

$$= \lim_{p\to\infty} (-N_{ii_1}) \ldots (-N_{i_pj}) Q'_{jk}\phi_k = \mu_i^{(k)} \int_{S_j} d\sigma \, \nu_j^{(k)} \phi_j. \ \Rightarrow$$

$$\mu_i^{(k)} = \lim_{p\to\infty} (-N_{ii_1}) \ldots (-N_{i_pj})(\nu_j^{(k)} / \int_{S_k} d\sigma) \ . \ \Rightarrow$$

$$\alpha_i = \lim_{p\to\infty} (-N_{ii_1}) \ldots (-N_{i_pj})(q_k \nu_j^{(k)} / \int_{S_k} d\sigma) \ .$$

Литература

[1] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 1981. – 512 с.

[2] Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. 1966. – 228 с.

[3] Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. – М.: Высшая школа. 1973. Т.2. – 470 с.

[4] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – М.: Мир. 1977. Т.1. – 357 с.

[5] Рисс Ф., Секефальви – Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир. 1979. – 587 с.

[6] Тамм И. Е. Основы теории электричества.– М.: Наука.1976.– 616 с.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 ноября 1991 года.