91-292

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-91-292

Е.В.Белякова

РЕШЕНИЕ КОМПЛЕКСА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1991

Белякова Е.В. Р5-91-292

Решение комплекса систем нелинейных неравенств второго порядка

Предложен метод решения комплекса систем нелинейных неравенств с общей центральной гладкой функцией второго порядка. Метод подразумевает использование теории информации. Рассмотрено обобщение комплекса систем нелинейных неравенств.

Работа выполнена в Лаборатории сверхвысоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод автора

Belyakova E.V. P5-91-292

Solution of System Complex of Second Level Non-Linear Unequation

The method of solution of system complex of non-linear unequations with a general central smooth function is proposed. The method uses information theory. Generalization of the system complex is seen.

The investigation has been performed at the Particle Physics Laboratory, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991

1. Математическая постановка задачи

Комплекс из $K \geq 1$ систем нелинейных неравенств n-го порядка в общем виде описывается так:

$$\begin{cases} U_i \leq F_n(t) \leq V_i \,, \\ T_1 \leq t \leq T_2 \,, \end{cases} \tag{1}$$

где $F_n(t)$ - гладкая функция n-го порядка действительной переменной t. Частный случай n=2:

$$F_2(t) = at^2 + bt + c, \quad a > 0 \,; \tag{1'}$$

$\{U_i\}$ и $\{V_i\}$, $i=1,K$ - действительные последовательности граничных условий, строго возрастающие:

$$U_i < U_{i+1}, \quad V_i < V_{i+1}, \quad i=1,\ldots,K-1. \tag{2}$$

Как частный случай можно выделить возможное соотношение:

$$U_i < V_i \leq U_{i+1} < V_{i+1} \leq U_{i+2} \,; \tag{3}$$

$T_1 \leq t \leq T_2$ - область определения комплекса (1), T_1 и T_2 - константы .

Любая система из (1) распадается на нижнюю (4) и верхнюю подсистемы (5):

$$\begin{cases} F(t) \geq U_i \,, \\ T_1 \leq t \leq T_2 \,, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} F(t) \leq V_i \,, \\ T_1 \leq t \leq T_2 \,. \end{cases} \tag{5}$$

Назовем $F(t)-U_i=0$ - нижним i-ым уравнением, (6)

$F(t)-V_i=0$ - верхним i-ым уравнением. (7)

Введем целочисленные переменные:

n_i - количество корней (6) и

N_i - количество корней (7).

Можно предположить два метода решения комплекса (1):

Метод I : подразумевает, что последовательности $\{U_i\}$ и $\{V_i\}$ определены к моменту решения (1).

Метод II : подразумевает, что $\{U_i\}$ и $\{V_i\}$ не определены заранее, но число К систем в (1) конечно и определено.

Заполним таблицу для k-ой системы для некоторой функции $F_2(t)$ и проиллюстрируем ее:

N_k / n_k	0	1	2
0	К-ая система несовместна	решение: точка	решение: отрезок
1	-" -	случаи невозможны	решение отрезок
2	- " -	- " -	решение: 2 отрезка

(8)

Обозначим возможные корни (6) через $t_1^{(k)}$ и $t_2^{(k)}$ и корни (7) - через $t_3^{(k)}$ и $t_4^{(k)}$. При $n_k=1$ либо $N_k=1$ предположим совпадение корней: $t_1^{(k)}=t_2^{(k)}$ и/или $t_3^{(k)}=t_4^{(k)}$.

Для иллюстрации возьмем

$$C > 0, \quad C - \frac{b^2}{4a} > 0, \quad b < 0. \qquad (9)$$

Случай $(n_k=1,2,\ N_k=0)$: $U_k < V_k < C - \frac{b^2}{4a}$.

Пересечений с параболой F(t) нет. /Рис.1/

Случай $(n_k=0,\ N_k=1)$. Пересечение есть: точка $t_3^{(k)} = -\frac{b}{2a} > 0$. /Рис.2/

Случаи $(n_k=1,\ N_k=1)$ и $(n_k=2,\ N_k=1)$.

Невозможны, поскольку противоречат (2) и (1)./Рис.3/.

Случай $(n_k=1,\ N_k=2)$.

Решение k-ой системы - отрезок $[t_3^{(k)}, t_4^{(k)}]$./Рис.4/.

Случай $(n_k=2,\ N_k=2)$.

Решение k-ой системы (без условия (3)): объединение отрезков $[t_3^{(k)},\ t_1^{(k)}] \cup [t_2^{(k)},\ t_4^{(k)}]$./Рис.5/.

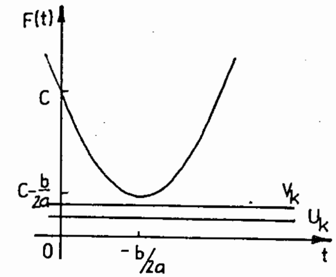

РИС.1.

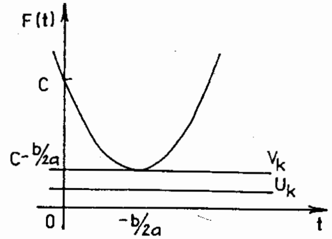

РИС.2.

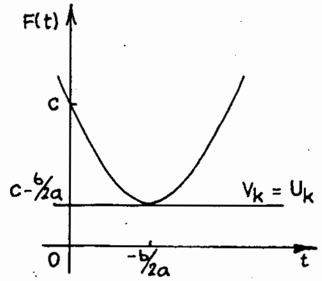

РИС. 3.

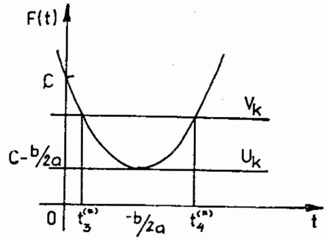

РИС.4.

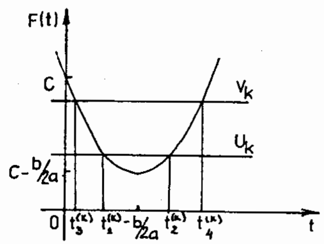

Рис.5.

2. Описание метода I

Из таблицы (8) и расчетов для рисунков 1-5 следует, что частное решение комплекса (1) - это решение j-ой системы, причем

$$\min V_j: \{V_j > C - \frac{b^2}{4a}\} \quad (10)$$

Суммируем вышесказанные случаи из пункта 1 и получаем чистое решение r_j системы j:

а) при $V_j = C - \frac{b^2}{4a}$:

$$r_j = \{t_3^{(j)}\} \quad (11)$$

б) при $U_j < C - \frac{b^2}{4a} < V_j$:

$$r_j = \{t / t \in [t_3^{(j)}, t_4^{(j)}]\} \quad (12)$$

в) при $C - \frac{b^2}{4a} < U_j < V_j$:

$$r_j = \{t / t \in [t_3^{(j)}, t_1^{(j)}] \cup [t_2^{(j)}, t_4^{(j)}]\} \quad (13)$$

А с учетом условия $T_1 < t < T_2$ окончательное решение R_j будет следующим:

а') при $V_j = C - \frac{b^2}{4a}$:

$$R_j = \{t / t \in \{t_3^{(j)}\} \cap [T_1, T_2]\} \quad (14)$$

б') при $U_j < C - \frac{b^2}{4a} < V_j$:

и при $\max(t_3^{(j)}, T_1) < \min(T_2, t_4^{(j)})$

$$R_j = \{t / t \in [\max(t_3^{(j)}, T_1);\ \min(T_2, t_4^{(j)})]\} \quad (15)$$

в') при $C - \frac{b^2}{4a} < U_j < V_j$ решение R_j будет пересечением множеств :

$$R_j = \{t / t \in ([t_3^{(j)}, t_1^{(j)}] \cup [t_2^{(j)}, t_4^{(j)}]) \cap [T_1, T_2]\} \quad (16)$$

Однако может быть, что R_j пусто, (хотя r_j - нет, поэтому переходим к системе с номером $j+1<K$, т.к. $V_j < V_{j+1}$ и система (j+1)-ая очередной кандидат на решение (1). Заметим, что решение комплекса (1) это совокупность индексированных множеств $R=\{R_j\}$, $(1<j<K)$, однако любое непустое множество R_j, входящее в R, является самостоятельным решением.

3. Описание метода II

Вернемся к методу I. Он основан на последовательном выборе систем из комплекса (1), начиная с номера j_{min}, поскольку имеется дополнительная информация о последовательностях $\{U_i\}$ и $\{V_i\}$, $i=1,K$.

Метод II основывается на том, что характер решения R_k из (1) позволяет "автоматически" регулировать, какую систему из (1) следует брать, если текущее множество решений R_k пусто.

Номер n_1 первой системы из (1), подлежащей решению, вычисляется так:

$$1 < n_1 < K, \quad n_1 = [\frac{K}{2}] + 1, \quad [.] \text{ - целая часть числа}, \quad (17)$$

если $N_{n_1} = 0$, то система n_1-ая несовместна /Рис.1/ , и требуется перейти к n_2-ой:

$$n_1 < n_2 < K, \quad n_2 = [\frac{K+n_1}{2}]. \quad (18)$$

Если $N_{n_1} \neq 0$, следовательно по формулам (14)-(16) можно получить множество решений R_{n_1} /Рис.4 и 5/.

. Однако при $R_{n_1} \equiv \{0\}$ вступает в действие еще один регулятор выбора систем, а именно проверка условия:

$$t_4^{(n_1)} < T_1 . \quad (19)^1$$

Если (19) верно, новый номер n_2 вычисляется по-другому:

$$1 < n_2 < n_1, \quad n_2 = [\frac{1+n_1}{2}]. \quad (20)$$

Для n_2-ой системы анализируется N_{n_2} - число корней верхнего уравнения, и выбор систем продолжается, аналогично (18)-(20).

Метод II решения комплекса (1) можно сравнить с решением задачи о наименьшем количестве взвешиваний для определения одной фальшивой монеты среди M монет. Метод II сходится в самом худшем случае через $[\log_2 K]+1$ шагов выбора. Точно оценить "сходимость" метода I нельзя.

Можно сочетать метод I и метод II, если часть граничных условий заранее известна.

---

1 По результату условие $t_3^{(n_1)} > T_2$ равносильно $N_{n_1} = 0$.

4. Обобщение комплекса нелинейных неравенств

В настоящей работе рассмотрены способы решения комплекса с центральной функцией F(t) второго порядка.

Заметим, что к нему можно привести следующие комплексы:

а) биквадратные:

$$\begin{cases} U_i^* \le a_* t^4 + b_* t^2 + C_* \le V_i^*, \\ T_1^* \le t \le T_2^*. \\ 1 \le i \le K, \quad a_* \ne 0. \end{cases} \qquad (21)$$

б) многопеременные:

$$\begin{cases} U_{p_i} \le \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le V_{p_i}, \\ T_{p_1} \le t \le T_{p_2}, \quad 1 \le i \le K, \quad a_j \ne 0, \end{cases} \qquad (22)$$

где функции

$x_j = x_j(t)$ задаются явно, и порядок $x_j(t)$ не более второго по t.

в) с кусочной областью определения :

$$\begin{cases} U_i \le at^2 + bt + C \le V_i, \\ T_{1i} \le t \le T_{2i}, \quad 1 \le i \le K, \quad a \ne 0 \end{cases} \qquad .(23)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н.,Семендяев К.А. Справочник по высшей математике. М.: ГИТТЛ, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1991 года.