объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-91-286

В.И.Иноземцев

О СТРУКТУРЕ ЗОНАЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ТИПА А II

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1991

Иноземцев В.И. P5-91-286
О структуре зональных сферических функций
на симметрических пространствах отрицательной кривизны типа A II

Предложен алгебраический способ построения зональных сферических функций (ЗСФ) на симметрических пространствах $X_n^- = SL(n, Q)/Sp(n)$ и связанных с ними собственных функций гиперболического оператора Сазерленда. Даны примеры явного вычисления коэффициентов, определяющих структуру ЗСФ.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод автора

Inozemtsev V.I. P5-91-286
On the Structure of Zonal Spherical Functions
on Symmetric Spaces of Negative Curvature of the Type A II

The purely algebraic method is proposed for the construction of zonal spherical functions (ZFS) on symmetric spaces $X_n^- = SL(n, Q)/Sp(n)$ and eigenfunctions of the hyperbolic Sutherland operator connected with them. The examples of the explicit calculations of the coefficients determining the structure of ZFS are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991

Цель данной работы состоит в нахождении эффективного алгоритма построения зональных сферических функций (ЗСФ) на симметрических пространствах X_n^- ранга $n-1$ и типа A II [1], реализуемых как множества классов смежности $SL(n, Q)/Sp(n)$, в случаях $n \geq 3$. Многочисленные примеры ЗСФ на пространствах ранга 1, используемых для вычисления матричных элементов представлений группы вращений псевдоевклидова пространства, приведены в [2]. Конструкции сплетающих операторов, позволяющие находить ЗСФ для пространства ранга 2 типа A III $= SU(p, q)/S(U(p) \times U(q))$, были описаны в [3, 4]. ЗСФ на пространстве X_3^- впервые были вычислены в работе [5]. Для пространств X_n^- высших рангов до недавнего времени были известны лишь интегральные представления ЗСФ, содержащие $2n(n-1)$-кратные интегралы по элементам нижних треугольных $n \times n$-матриц, составленных из кватернионов [6] и разложения в бесконечные $n(n-1)/2$-кратные ряды с рекуррентно определяемыми коэффициентами [1]. Оба эти представления, имеющие важное значение при исследовании различных асимптотик ЗСФ, неэффективны при практических расчетах даже в случае $n = 3$. Использование ЗСФ пространств высших рангов для решения задач математической физики обусловлено тем фактом, что при выборе орисферической системы координат на X_n^- радиальная часть квадратичного оператора Лапласа — Бельтрами может быть представлена в виде [7]

$$\bar{B}_n = a^{-2}[\Delta_n + 4a \sum_{j>s}^{n} \operatorname{cth}[a(x_j - x_s)](\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_s})], \quad x \in R^n, \ a > 0,$$

где Δ_n — оператор Лапласа в R^n. ЗСФ $\Phi_n^{(k)}(x)$ являются собственными функциями B_n, отвечающими собственным значениям

$$b_n(k) = -a^{-2}[k^2 + \frac{4n(n^2-1)a^2}{3}], \quad k \in R^n \quad (k^2 = \sum_{j=1}^{n} k_j^2),$$

симметричными относительно перестановок аргументов $\{x_j\}$ и нормированными условием $\Phi_n^{(k)}(0) = 1$. Для приложений наибольший интерес представляют волновые функции гиперболической задачи Сазерленда, описывающие процессы рассеяния n квантовых бозе-частиц на прямой с асимптотическими импульсами $k_1, \ldots, k_n$ и полной энергией $\epsilon(k) = k^2/2$,

$$\psi_n^{(k)}(x) = \prod_{j>s}^{n} \frac{\operatorname{sh}^2[\alpha(x_j - x_s)]}{\alpha^2} \Phi_n^{(k)}(x) . \tag{1}$$

Сингулярное преобразование, определяемое (1), переводит B_n в гамильтониан Сазерленда

$$H_S^{(n)} = -\frac{\Delta}{2} + \sum_{j>s}^{n} \frac{\alpha^2}{\operatorname{sh}^2[\alpha(x_j - x_s)]} . \tag{2}$$

Дискретный аналог $H_S^{(n)}$ используется при описании взаимодействия квантовых спинов 1/2 в одномерных моделях ферромагнетиков [9].

1. МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗСФ

Предлагаемый алгоритм построения функций $\psi_n^{(k)}(x)$ и $\Phi_n^{(k)}(x)$ посредством решения системы линейных алгебраических уравнений позволяет установить, в частности, их связь с однородными полиномами по переменным $y_j = \exp(2\alpha x_j)$. Он основан на результате работы [8], в которой была найдена рекуррентная схема вычисления собственных функций оператора (2),

$$\phi_n^{(k)}(x) = \hat{D}_n \exp(i \sum_{s=1}^{n} k_s x_s) , \tag{3}$$

где

$$\hat{D}_n = \hat{Q}_n^{1\dots n-1} \hat{D}_{n-1} ,$$

$$\hat{Q}_N^{i_1 \dots i_\ell} = \hat{Q}_N^{i_1 \dots i_{\ell-1}} [\frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} - \frac{\partial}{\partial x_N} - 2\alpha \operatorname{cth}\alpha(x_{i_\ell} - x_N)] + \tag{4}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\ell-1} 2\alpha^2 \operatorname{sh}^{-2}[\alpha(x_{i_s} - x_{i_\ell})] \hat{Q}_N^{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{\ell-1}} , \quad \hat{Q}_N = 1$$

$$1 \le i_1, \dots i_\ell < N , \quad 1 \le N \le n ,$$

ЗСФ $\Phi_n^{(k)}(x)$ связана с $\phi_n^{(k)}(x)$ соотношением

$$\Phi_n^{(k)}(x) = \text{const} \, (\prod_{j>s} \frac{\alpha^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha[x_j - x_s]}) \sum_{P \in \pi_n} \phi_n^{(k)}(Px) , \tag{5}$$

где π_n — группа перестановок чисел $1,\dots,n$; Px — точка в R^n с координатами $(x_{P1}, \dots x_{Pn})$.

Вычисления ЗСФ по схеме (3)—(4) отличаются крайней громоздкостью ввиду присутствия операторов дифференцирования в рекуррентных соотношениях и фактически были проведены лишь для случая $n = 3$. Ниже будет показано, что задача определения $\phi_n^{(k)}(x)$ допускает чисто алгебраическую формулировку.

Предложение 1. $\phi_n^{(k)}(x)$ представима в виде

$$\tilde{p}(k, \{\operatorname{cth}\alpha(x_j - x_s)\}) \times \exp(i \sum_{s=1}^{n} k_s x_s) ,$$

где $\tilde{p}$ — полином по переменным $\{\operatorname{cth}\alpha(x_j - x_s)\}$ $j > s$.

Доказательство основано на (3,4) и возможности представления $(\frac{d}{dz})^\ell (\operatorname{cth} z)^m$ в виде полинома степени $\ell + m$ по $\operatorname{cth} z$.

Как следствие, функция

$$\exp(-i \sum_{s=1}^{n} k_s x_s) \phi_n^{(k)}(x)$$

имеет период $\pi i \alpha^{-1}$ по каждому из аргументов $x_1, \dots, x_n$ и ограничена при $x_j \to \pm\infty$, $1 \le j \le n$. В окрестности каждой из гиперплоскостей $x_j = x_s$ в соответствии со структурой оператора Сазерленда (2) эта функция обладает особенностью вида $[\operatorname{sh}\alpha(x_j - x_s)]^{-1}$. В сочетании с предложением 1 эти свойства позволяют сформулировать следующее

Предложение 2. $\phi_n^{(k)}(x)$ обладает представлением вида

$$\phi_n^{(k)}(x) = [\prod_{j>s}^{n} \operatorname{sh}\alpha(x_j - x_s)]^{-1} S_n^{(k)}(y) \exp[\sum_{s=1}^{n} x_s(ik_s - (n-1)\alpha)] , \tag{6}$$

где $S_n^{(k)}(y)$ — полином по $y_s = \exp(2\alpha x_s)$, $1 \le s \le n$, причем степень каждой из переменных $\{y_s\}$ в $S_n^{(k)}(y)$ не превышает $n-1$.

Следствием из $H_s^{(n)} \phi_n^{(k)}(x) = \frac{k^2}{2} \phi_n^{(k)}(x)$ и (6) является уравнение для $S_n^{(k)}(y)$

$$4\alpha \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\left(y_j \frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial y}\right) + \sum_{j\neq s}^{n} \frac{y_j + y_s}{y_j - y_s}\left[2\alpha\left(y_s \frac{\partial}{\partial y_s} - y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right) + i(k_s - k_j)\right] S_n^{(k)} + 2\left\{\frac{\alpha n(n-1)(2n-1)}{3} + \sum_{j=1}^{n}\left[2(ik_j - \alpha(n-1))\, y_j \frac{\partial}{\partial y_j} - ik_j(n-1)\right]\right\} S_n^{(k)} = 0. \tag{7}$$

Для существования полиномиальных решений (7) необходимо, чтобы для каждой пары индексов (j, s), $1 \le j < s \le n$, полином

$$\left[2\alpha\left(y_s \frac{\partial}{\partial y_s} - y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right) + i(k_s - k_j)\right] S_n^{(k)}$$

делился без остатка на $(y_j - y_s)$. Представляя $S_n^{(k)}(y)$ в форме

$$S_n^{(k)}(y) = \sum_{\{m\}\in \mathbf{Z}^n} d^{(k)}_{m_1 \dots m_n} \prod_{\lambda=1}^{n} (y_\lambda)^{m_\lambda}, \tag{8}$$

где $d^{(k)}_{\{m\}} = 0$, если хотя бы одно из чисел m_s не принадлежит сегменту $[0, n-1]$, выразим это условие в виде системы $\frac{(n-1)(2n-1)\, n^{n-1}}{2}$ линейных уравнений на $d^{(k)}_{\{m\}}$,

$$\sum_{\ell \in \mathbf{Z}} d^{(k)}_{m_1 \dots m_j + \ell \dots m_s - \ell \dots m_n}\left[m_j - m_s + 2\ell + \frac{i}{2\alpha}(k_j - k_s)\right] = 0. \tag{9}$$

Подстановка (8) в (7) приводит к уравнению

$$\sum_{\{m\}\in \mathbf{Z}^n}\left(\prod_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{m_\lambda}\right) d^{(k)}_{\{m\}}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[2m_j^2 + \frac{2ik_j m_j}{\alpha} - \left(2m_j + \frac{ik_j}{\alpha}\right)\times(n-1)\right] - \sum_{j\neq s}^{n}\frac{y_j + y_s}{y_j - y_s}\left[m_j - m_s + \frac{i}{2\alpha}(k_j - k_s)\right] + \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}\right\} = 0. \tag{10}$$

Используя (9), можно выполнить деление на $y_j - y_s$ в (10) и получить, сравнивая коэффициенты при различных степенях переменных

$\{y_\lambda\}$, еще одну систему n^n линейных уравнений на $d^{(k)}_{\{m\}}$,

$$d^{(k)}_{m_1 \dots m_n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[2m_j^2 + 2m_j\left(\frac{ik_j}{\alpha} - n + 1\right) - \frac{ik_j}{\alpha}(n-1)\right] + \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}\right\} + \sum_{j\neq s}^{n}\sum_{\ell\in \mathbf{Z}} \operatorname{sign}(\ell)\left[m_s - m_j + \frac{i(k_s - k_j)}{2\alpha}\right] d^{(k)}_{m_1 \dots m_j + \ell \dots m_s - \ell \dots m_n} = 0 \tag{11}$$

Совокупность $\frac{(2n^2 - n + 1)}{2}\, n^{n-1}$ уравнений (9,11) позволяет определить коэффициенты $d^{(k)}_{\{m\}}$ с точностью до нормировочной постоянной.

Предложение 3. $S_n^{(k)}(y)$ — однородный полином степени $n(n-1)/2$.

Доказательство основывается на системе (9), из которой непосредственно следует, что $d^{(k)}_{\{m\}} = 0$, если $m_j = m_q = 0$ или $m_j = m_q = n-1$ для какой-либо из пар индексов (j, q). Рассмотрим произвольный коэффициент $d^{(k)}_{m_1 \dots m_n}$, для которого

$$\mu(d) = \sum_{s=1}^{n} m_s < \frac{n(n-1)}{2}.$$

Среди чисел $\{m_s\}$ в этом случае имеется по меньшей мере два совпадающих. Пусть r — минимальное значение соответствующих $\{m_s\}$. Выбирая среди них любую пару $m_j = m_q = r$, выразим $d^{(k)}_{m_1 \dots m_j \dots m_q \dots m_n}$, пользуясь (9), через коэффициенты $d^{(k)}_{m_1 \dots m_{j-\ell} \dots m_{q+\ell} \dots m_n}$, имеющие то же самое значение $\mu(d)$. Повторяя для них описанную выше процедуру, в конечном счете найдем, что первоначально выбранный коэффициент $d^{(k)}_{m_1 \dots m_n}$ может быть представлен в виде линейной комбинации тех $\{d^{(k)}_{\{m\}}\}$, для которых по меньшей мере два из чисел $m_1, \dots m_n$ равны 0. Следовательно, $d^{(k)}_{m_1 \dots m_n} = 0$ при $\mu(d) < \frac{n(n-1)}{2}$. Аналогично рассматривается случай $\mu(d) > \frac{n(n-1)}{2}$.

Предложение 4. Коэффициенты $d^{(k)}_{\{m\}}$ как функции k и α определяются значениями $n-1$ переменных $\omega_j = (k_j - k_{j+1})/\alpha$, $1 \le j \le n-1$.

Для доказательства достаточно установить, что коэффициенты системы (II) зависят от k и α только посредством комбинаций $\{\omega_j\}$. Это достигается путем использования тождеств

$$\sum_{j=1}^{n} k_j m_j = n^{-1}\Big(\frac{1}{2}\sum_{j\neq s}^{n}(k_j-k_s)(m_j-m_s)+\sum_{j=1}^{n} m_j\sum_{s=1}^{n} k_s\Big),$$

$$2\sum_{j=1}^{n} m_j^2 = n^{-1}\Big[\sum_{j\neq s}^{n}(m_j-m_s)^2+\Big(\sum_{s=1}^{n} m_s\Big)^2\Big]$$

и предложения 3. Окончательно система (II) может быть записана в форме

$$\sum_{j<s}^{n}\Big\{d^{(k)}_{\{m\}}\Big[\frac{m_j-m_s}{n}\Big(\frac{i}{\alpha}(k_j-k_s)+m_j-m_s\Big)+\frac{n+1}{6}\Big] - \sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\operatorname{sign}(\ell)\Big[\frac{i}{2\alpha}(k_j-k_s)+m_j-m_s+2\ell\Big]d^{(k)}_{m_1\dots m_j+\ell\dots m_s-\ell\dots m_n}\Big\}=0. \tag{12}$$

Пусть $\{P\}$ — следующий набор чисел $\{m_s\}$: $m_j = P_j - 1$, $j=1,\dots n$, где P — перестановка чисел 1,...,n.

Предложение 5. Все отличные от 0 коэффициенты $d^{(k)}_{\{m\}}$ с совпадающими значениями $\{m_s\}$ являются линейными комбинациями коэффициентов $d^{(k)}_{\{P\}}$, которые, в свою очередь, определяются из системы (9) с точностью до нормировочной постоянной d_0:

$$d^{(k)}_{\{P\}} = d_0\prod_{\lambda<\mu}^{n}\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_{P^{-1}\lambda}-k_{P^{-1}\mu})\Big]. \tag{13}$$

Первая часть утверждения доказывается путем применения схемы, использованной при доказательстве предложения 3. Для вывода (13) заметим, что в случае, когда все $\{m_s\}$ различны, (9) содержит подсистему $\frac{(n-1)}{2}n!$ уравнений

$$d^{(k)}_{m_1\dots m_j\dots m_s\dots m_n}\Big[-1+\frac{i}{2\alpha}(k_j-k_s)\Big]+ d^{(k)}_{m_1\dots m_s\dots m_j\dots m_n}\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_j-k_s)\Big]=0,\quad m_s=m_j+1 \tag{14}$$

Пусть P — перестановка $(j\to m_j+1)$, $1\le j\le n$, и R — перестановка j и s, не изменяющая остальных чисел от 1 до n. Подсистема (14) может быть записана в форме

$$d^{(k)}_{\{P\}}\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_s-k_j)\Big]=d^{(k)}_{\{PR\}}\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_j-k_s)\Big]. \tag{15}$$

Используя условие $m_s=m_j+1$, представим (13) в виде

$$d^{(k)}_{\{P\}}=d_0\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_j-k_s)\Big]\prod_{\lambda=1}^{m_j}\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_{P^{-1}\lambda}-k_j)\Big]\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_{P^{-1}\lambda}-k_s)\Big]\times$$
$$\times\prod_{\mu=m_s+2}^{n}\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_j-k_{P^{-1}\mu})\Big]\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_s-k_{P^{-1}\mu})\Big]\times \tag{16}$$
$$\times\prod_{\lambda<\mu}^{n}\Big[1+\frac{i}{2\alpha}(k_{P^{-1}\lambda}-k_{P^{-1}\lambda})\Big].$$
$$\lambda,\mu\neq m_j+1,\ m_s+1$$

Соответствующее выражение для $d^{(k)}_{\{PR\}}$ отличается от (16) только заменой $k_j \rightleftarrows k_s$. Следовательно, уравнения (15) выполняются для всех $P\in\pi_n$.

Формула (13) позволяет определить первые слагаемые в асимптотических разложениях функции $\phi^{(k)}_n(x)$ (6).

Предложение 6. Если $x_{P(\lambda+1)}-x_{P\lambda}\to\infty$, $1\le\lambda\le n-1$, то

$$\lim\phi^{(k)}_n(x)\exp\Big[-i\sum_{\lambda=1}^{n}k_\lambda x_\lambda\Big]=2^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^P d^{(k)}_{\{P^{-1}\}},$$

где $(-1)^P$ — четность перестановки P.

Приведем схему доказательства для случая $x_{\lambda+1}-x_\lambda\to+\infty$, $1\le\lambda\le n-1$. При этом

$$\prod_{\lambda>\mu}^{n}\operatorname{sh}\alpha(x_\lambda-x_\mu)\sim 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\exp\Big[-\sum_{\lambda=1}^{n}x_\lambda(n-2\lambda+1)\Big]$$

и

$$\phi_n^{(k)}(x)\exp[-i\sum_{\lambda=1}^{n} k_\lambda x_\lambda] \sim 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{\{m\}} d^{(k)}_{\{m\}} \exp[-2\alpha\sum_{\lambda=1}^{n-1}(x_{\lambda+1}-x_\lambda)\, f_\lambda(\{m\})],$$

где $f_\lambda(\{m\}) = \sum_{r=1}^{\lambda}(m_r - r + 1)$.

Для наборов $\{m\}$, которым соответствуют ненулевые $d^{(k)}_{\{m\}}$, $f_\lambda(\{m\})\ge 0$, причем равенство выполняется лишь при $m_\lambda=\lambda-1$, $1\le\lambda\le n$. Случай произвольной перестановки $P\in\pi_n$ рассматривается полностью аналогичным образом.

Замечание. При выборе постоянной d_0 в (13) в виде

$$d_0 = \prod_{j=1}^{n-1}(2j+1)!\prod_{\lambda>\mu}^{n}\left[\frac{i}{\alpha}(k_\lambda-k_\mu)\right]^{-1}\prod_{\lambda\ne\mu}^{n}\left[1+\frac{i}{\alpha}(k_\lambda-k_\mu)\right]^{-1}$$

получим

$$d^{(k)}_{\{P\}} = (-1)^P c(\alpha^{-1}k_{P^{-1}1},\dots\, \alpha^{-1}k_{P^{-1}n}),$$

где $c(k_1,\dots k_n)$ — функция Хариш—Чандры [1] для симметрического пространства X_n^-. Этот факт легко установить, сравнивая (13) и явное представление c—функции посредством B—функций Эйлера [6]. Согласно предложению 6, отношения коэффициентов (13) определяют S-матрицу многочастичного рассеяния в задаче Сазерленда [7].

Отметим также, что, согласно предложению 5, решения системы (9) должны удовлетворять уравнениям (12), т.е. система (12) является следствием (9). Было бы интересно найти прямое алгебраическое доказательство этого факта.

2. ПРИМЕРЫ ЯВНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ d-КОЭФФИЦИЕНТОВ

Введем следующие обозначения: пусть $[\lambda_1\dots\lambda_n]$ — перестановка $(1\to\lambda_1,\dots, n\to\lambda_n)$; $r_{\lambda\mu}=\frac{i}{2\alpha}(k_\lambda-k_\mu)$.

1. $n=3$. Согласно (13), $d^{(k)}_{\{P\}}$—коэффициенты имеют вид

$$d^{(k)}_{012}=d_0(1+r_{12})(1+r_{13})(1+r_{23}),\quad d^{(k)}_{102}=d_0(1+r_{21})(1+r_{23})(1+r_{13})$$

$$d^{(k)}_{210}=d_0(1+r_{32})(1+r_{31})(1+r_{21}),\quad d^{(k)}_{021}=d_0(1+r_{13})(1+r_{12})(1+r_{32}),$$

$$d^{(k)}_{120}=d_0(1+r_{31})(1+r_{32})(1+r_{12}),\quad d^{(k)}_{201}=d_0(1+r_{23})(1+r_{21})(1+r_{31}).$$

Единственным ненулевым коэффициентом, не совпадающим с $d^{(k)}_{\{P\}}$, является $d^{(k)}_{111}$. Он определяется из (9) при $m_1=0$, $m_2=1$, $m_3=2$, $j=1$, $s=3$:

$$d^{(k)}_{111}=d_0[6-r_{12}^2-r_{13}^2-r_{23}^2].$$

2. $n=4$. Помимо 24 коэффициентов $d^{(k)}_{\{P\}}$, отличны от 0 еще 14 коэффициентов, естественно разделяемых на три группы. Первые две из них содержат коэффициенты с тремя совпадающими нижними индексами, вычисление которых полностью аналогично $d^{(k)}_{111}$ при $n=3$,

$$d^{(k)}_{1113}=d_0(1+r_{14})(1+r_{24})(1+r_{34})(6-r_{12}^2-r_{13}^2-r_{23}^2), \tag{17}$$

$$d^{(k)}_{2220}=d_0(1+r_{41})(1+r_{42})(1+r_{43})(6-r_{12}^2-r_{13}^2-r_{23}^2). \tag{18}$$

Остальные коэффициенты этих групп $d^{(k)}_{1131}$, $d^{(k)}_{1311}$, $d^{(k)}_{3111}$, $d^{(k)}_{2202}$, $d^{(k)}_{2022}$, $d^{(k)}_{0222}$ получаются соответственно из (17) и (18) перестановками индексов [1243], [1342], [2341] в $\{r_{\lambda\mu}\}$.

Третья группа содержит коэффициенты с двумя парами совпадающих индексов: $d^{(k)}_{1122}$, $d^{(k)}_{2211}$, $d^{(k)}_{2112}$, $d^{(k)}_{1221}$, $d^{(k)}_{1212}$, $d^{(k)}_{2121}$. Все они могут быть определены из уравнений (9) по известным коэффициентам первой группы: так, полагая в (9) $m_1=m_2=m_3=1$, $m_4=3$; $j=3$, $s=4$, получим

$$d^{(k)}_{1113}(-2+r_{34})+d^{(k)}_{1122}r_{34}+d^{(k)}_{1131}(2+r_{34})=0, \tag{19}$$

что позволяет после несложных вычислений найти $d^{(k)}_{1122}$:

$$\begin{aligned} d^{(k)}_{1122}=d_0[&18+(r_{13}+r_{24})(14-2(r_{13}+r_{24})-r_{13}^2-r_{24}^2-\\ &-3(r_{12}^2+r_{34}^2)-r_{12}r_{34}+r_{12}^2r_{34}^2)-(r_{12}^2+r_{34}^2)(6+r_{13}r_{24}-r_{12}r_{34})-\\ &-r_{13}r_{24}(r_{13}^2+r_{24}^2)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Остальные пять коэффициентов этой группы находятся по (20) перестановками [3412], [3214], [4123], [1324], [4213] индексов в $\{r_{\lambda\mu}\}$.

3. При $n = 5$ имеется 171 отличный от 0 коэффициент $d^{(k)}_{\{m\}}$ с совпадающими индексами, подразделяемый на 8 групп; при $n = 6$ число этих коэффициентов — 2112, причем число групп возрастает до 21. Алгоритм их построения по известным $d^{(k)}_{\{p\}}$ путем использования уравнений вида (19) допускает простую реализацию на ЭВМ. Явные выражения для ЗСФ $\Phi^{(k)}_n(x)$ получаются симметризацией соответствующих сингулярных собственных функций операторов Сазерленда $\phi^{(k)}_n(x)$ (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хелгасон С. — Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
2. Виленкин Н.Я. — Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
3. Vretare L. — Formulas for Elementary Spherical Functions and Generalized Jacobi Polynomials. SIAM J. Math., 1984, v. 15, n.4, p.805-834.
4. Anderson A., Camporesi R. — Intertwining Operators for Solving Differential Equations with Applications to Symmetric Spaces. Comm. Math. Phys., 1990, v.130, No.1, p.61-82.
5. Sekiguchi J. — Zonal Spherical Functions on Some Symmetric Spaces. Publ. RIMS Kyoto Univ. 1977, v.12, p.455-464.
6. Гиндикин С.Г., Карпелевич Ф.И. — Мера Планшереля для римановых симметрических пространств неположительной кривизны. ДАН СССР, 1962, т.145, в.2, с.252-255.
7. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. — Quantum Integrable Systems Related to Lie Algebras. Phys. Reports, 1983, v.94, No.6, p.313-404.
8. Chalykh O.A., Veselov A.P. — Commutative Rings of Partial Differential Operators and Lie Algebras. Comm. Math. Phys., 1990, v.126, n.3, p.597-611.
9. Inozemtsev V.I. — On the Connection between S = 1/2 Heisenberg Chain and Haldane — Shastry Model. — J. Stat. Phys., 1990, v.59, n 5/6, p.1143-1155.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июня 1991 года.