сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-91-225

В.П.Гердт, А.Ю.Жарков*

АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ С НЕВЫРОЖДЕННОЙ ГЛАВНОЙ МАТРИЦЕЙ

*Саратовский государственный университет

1991

Гердт В.П., Жарков А.Ю.　　P5-91-225

Алгоритмы исследования интегрируемости квазилинейных эволюционных систем с невырожденной главной матрицей

В рамках симметрийного подхода предложены алгоритмы исследования интегрируемости квазилинейных эволюционных систем с невырожденной числовой главной матрицей. Хорошо известные алгоритмы построения формальных симметрий, проверки необходимых условий интегрируемости и нахождения высших симметрий обобщаются на случай кратных ненулевых собственных значений главной матрицы. Предложенные алгоритмы могут быть реализованы в подходящей системе компьютерной алгебры.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод авторов

Gerdt V.P., Zharkov A.Yu.　　P5-91-225

Algorithms for Investigating Integrability of Quasilinear Evolution Systems with Non-Degenerated Main Matrix

In the frames work of symmetry approach the algorithms for investigating integrability of quasilinear evolution systems with non-degenerated numeric main matrix are developed. Well-known algorithms for constructing formal symmetries, verifying necessary integrability conditions and finding higher symmetries are generalized to the case of multiple nonzero eigenvalues of main matrix. The suggested algorithms can be implemented in modern computer algebra systems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди дифференциальных уравнений в частных производных, встречающихся в прикладных задачах, особую роль играют нелинейные интегрируемые эволюционные системы. Интегрируемые системы обладают рядом замечательных свойств, в частности, точными решениями типа солитонов. В настоящее время продолжается интенсивная работа по исследованию интегрируемости и классификации интегрируемых систем с одной пространственной переменной

$$u_t=F(x,u,u_1,\dots u_N), \tag{1}$$

$$u=u(x,t), \quad u_k=\partial^k u/\partial x^k, \quad u=(u^1,u^2,\dots u^M), \quad F=(F^1,F^2,\dots F^M).$$

В рамках симметрийного подхода (см.[1,2]) в качестве критерия интегрируемости системы (1) принимается наличие у нее высших (обобщенных) симметрий. Как известно, конструктивные алгоритмы проверки необходимых условий интегрируемости и нахождения высших симметрий системы (1) при $M>1$ существенно зависят от структуры главной матрицы $F_N= \|\partial F^\alpha/\partial u^\beta{}_N\|$, $\alpha,\beta=1,2,\dots,M$. Соответствующие алгоритмы для квазилинейных систем с числовой невырожденной главной матрицей

$$u_t= F \equiv Au_N+f(x,u,u_1,\dots u_{N-1}), \quad N\ge 2, \tag{2}$$

$$A = \|a_{\alpha\beta}\|, \quad a_{\alpha\beta}\in\mathbb{C}, \quad \alpha,\beta=1,\dots,M, \quad \det A \ne 0$$

при следующем ограничении на собственные значения λ_α матрицы A

$$\lambda_\alpha\ne\lambda_\beta, \ \alpha,\beta=1,\dots,M \tag{3}$$

были развиты в [3] и реализованы в системах компьютерной алгебры FORMAC и REDUCE [3,4]. В настоящей работе алгоритмы работы [3] обобщаются на случай систем (2) без учета ограничения (3), но при некоторых дополнительных условиях на вектор-функцию f. Это дает возможность автоматизировать исследование интегрируемости для целого класса важных для приложений эволюционных систем, например, систем типа связанного нелинейного уравнения Шредингера.

2. ОСНОВЫ СИММЕТРИЙНОГО ПОДХОДА

Кратко напомним основные понятия и результаты симметрийного подхода.

Определение 1. **Дифференциальной функцией** будем называть любую функцию, зависящую от конечного числа динамических переменных из бесконечного набора $x,u,u_1,u_2,\dots$.

Определение 2. Дифференциальная вектор-функция $H=(H^1,H^2,\dots H^M)$ называется **симметрией** уравнения (1), если она удовлетворяет соотношению

$$dH/dt=F_*(H), \tag{4}$$

где F_* - матричный дифференциальный оператор

$$F_*=F_0+F_1D+\dots+F_ND^N, \qquad (F_i)^{\alpha\beta}=\partial F^\alpha/\partial u^\beta_i, \quad \alpha,\beta=1,2\dots M,$$

и где d/dt и $D=d/dx$ - операторы полного дифференцирования по t и x соответственно:

$$d/dt=\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=0}^{\infty}D^i(F^\alpha)\partial/\partial u^\alpha_i, \qquad D=\partial/\partial x+\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=0}^{\infty}u^\alpha_{i+1}\partial/\partial u^\alpha_i.$$

Порядком симметрии называется максимальное число n, такое, что $\partial H^\alpha/\partial u^\beta_n\neq 0$ для некоторых $\alpha,\beta\in\{1,2,\dots M\}$. Если $n\geq 2$, симметрия называется **высшей** (обобщенной).

Определение 3. Псевдодифференциальный оператор

$$L=\sum_{k=m-n+2}^{m}A_kD^k, \qquad \deg(L)=m, \tag{5}$$

коэффициенты A_k которого есть $M\times M$-матричнозначные дифференциальные функции, будем называть **формальной симметрией степени n порядка m**, если он удовлетворяет неравенству

$$\deg(L_t-[F_*,L])\leq m+N-n, \tag{6}$$

где

$$L_t=\sum_k(dA_k/dt)D^k, \qquad [F_*,L]=F_*L-LF_*,$$

а умножение псевдодифференциальных операторов определяется формулой

$$aD^k\cdot bD^l=a\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k}{i}D^i(b)\cdot D^{k+l-i}, \qquad \binom{k}{i}=\frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot i}.$$

Теорема 1 (см.[1,2]). Если эволюционная система (1) обладает симметрией порядка $n>N$, то для любых $m>0$ существует формальная симметрия степени m порядка n. ■

Согласно теореме 1, условия существования формальной симметрии порядка n являются необходимыми условиями существования симметрий порядка $n_1\geq n$. Эти условия, называемые в дальнейшем **условиями интегрируемости**, естественным образом возникают в процессе построения формальных симметрий и могут быть положены в основу классификационных алгоритмов.

3. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ФОРМАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Рассмотрим эволюционную систему (2) без учета ограничения (3). В общем случае главная матрица A системы (2) имеет μ различных собственных значений $\lambda_i\neq 0$ с кратностями p_i, $i=1,\dots,\mu$, $1\leq\mu\leq M$. С помощью диагонализирующего линейного преобразования и перестановки уравнений в системе приведем (2) к специальному диагональному виду

$$u_t=F\equiv\Lambda u_N+f(x,u,u_1,\dots u_{N-1}), \tag{7}$$

$$(\Lambda)^{\alpha\beta}=\begin{cases}\lambda_i, & \alpha=\beta\in\Gamma_i,\ \Gamma_i=[\alpha_i,\alpha_{i+1}-1],\ \alpha_{i+1}-\alpha_i=p_i,\ \alpha_1=1,\ \alpha_{\mu+1}=M,\\ 0, & \alpha\neq\beta,\ \alpha,\beta=1,\dots,M,\end{cases}$$

то есть $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1I_1,\dots,\lambda_\mu I_\mu)$, где I_i - единичные $p_i\times p_i$-матрицы, $\lambda_i\neq\lambda_j$, $\lambda_i\neq 0$, $i=1,\dots,\mu$.

Для заданной системы интервалов $\{\Gamma_i\}$, порожденной матрицей Λ, определим разбиение произвольной $M\times M$-матрицы $A\equiv\|a_{\alpha\beta}\|$ на блоки:

$$A^{\langle ij\rangle}=\|a_{\alpha\beta}\|,\ \alpha\in\Gamma_i,\ \beta\in\Gamma_j,\ i,j=1,\dots,\mu. \tag{8}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть для двух $M\times M$-матриц A и B задано разбиение (8). Тогда

$$(AB)^{\langle ij\rangle}=\sum_{k=1}^{\mu}A^{\langle ik\rangle}B^{\langle kj\rangle},\ i,j=1,\dots,\mu.$$

Утверждение леммы непосредственно следует из закона умножения матриц. ∎

<u>Следствие</u>. Пусть A- M×M-матрица, такая, что для произвольной M×M-матрицы B компоненты матрицы $[A,B]^{\langle ii\rangle}$ не зависят от компонент матриц $B^{\langle 11\rangle},\dots,B^{\langle \mu\mu\rangle}$. Тогда это эквивалентно условию

$$A^{\langle ii\rangle}=a\cdot I_i,\quad i=1,\dots,\mu,$$

где a - скаляр, I_i - единичные $p_i\times p_i$-матрицы.

<u>Доказательство</u> основано на тождестве

$$[A,B]^{\langle ii\rangle} = [A^{\langle ii\rangle},B^{\langle ii\rangle}] + \sum_{k=1}^{\mu}\delta_{ik}(A^{\langle ik\rangle}B^{\langle ki\rangle}-B^{\langle ik\rangle}A^{\langle ki\rangle}),$$

вытекающем непосредственно из леммы, и том факте, что матрица, коммутирующая с произвольной матрицей, пропорциональна единичной матрице. ∎

Перейдем к алгоритму нахождения формальной симметрии для эволюционной системы (7). Подставляя формальную симметрию (5) в неравенство (6), приравнивая коэффициенты при D^{m+N}, D^{m+N-1} нулю и рассматривая по отдельности диагональные и антидиагональные блоки в смысле разбиения (8), получим следующие уравнения на матрицу A_m:

$$(\lambda_i-\lambda_j)\cdot A_m^{\langle ij\rangle}=0,\ i\neq j,\ i,j=1,\dots,\mu \tag{9}$$

$$N\cdot\lambda_i D(A_m^{\langle ii\rangle}) + [F_{N-1},A_m]^{\langle ii\rangle}=0,\ i=1,\dots,\mu. \tag{10}$$

Уравнение (10) приводит к системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на компоненты матрицы $A_m^{\langle ii\rangle}$, исследование которой в общем случае затруднительно. В настоящей работе мы введем дополнительное ограничение на правую часть эволюционной системы (6), позволяющее избежать указанных трудностей. Потребуем, чтобы для произвольной M×M-матрицы B компоненты матрицы $[F_{N-1},B]^{\langle ii\rangle}$ не зависели от компонент матрицы $B^{\langle ii\rangle}$. Согласно следствию из леммы 1, это равносильно условию

$$F_{N-1}^{\langle ii\rangle}= \varphi_i(x,u,u_1,\dots u_{N-1})\cdot I_i,\quad i=1,\dots,\mu, \tag{11}$$

где φ_i - скалярные функции, I_i - единичные $p_i\times p_i$-матрицы.

Заметим, что ограничение (11) вполне оправданно, так как оно имеет место для многих встречающихся в приложениях эволюционных систем, в частности, для систем типа связанного нелинейного уравнения Шредингера.

Подставляя (5) в неравенство (6) с учетом ограничения (11), приравнивая нулю коэффициенты при $D^{m+N},\dots,D^{m+N-n+1}$ и выделяя диагональные и антидиагональные блоки, получаем рекуррентные соотношения на коэффициенты A_k формальной симметрии степени m порядка n:

1) При $k>m$ $A_k=0$.

2) При $k=m$ $$A_m^{\langle ij\rangle}= \begin{cases} 0, & i\neq j \\ Y^{\langle ii\rangle}, & i=j. \end{cases}$$

3) При $k=m-1,m-2,\dots,m-n+2$.

$$A_k^{\langle ij\rangle}= \begin{cases} (\lambda_i-\lambda_j)^{-1}\cdot B_k^{\langle ij\rangle}\Big|_{A_k^{\langle ij\rangle}=0}, & i\neq j, \\ (N\lambda_i)^{-1}D^{-1}\Big(B_{k-1}^{\langle ii\rangle}\Big|_{A_k^{\langle ii\rangle}=0}\Big)+Z_k^{\langle ii\rangle}, & i=j, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$B_k = \frac{d}{dt}(A_{k+N}) - C_{k+N},$$

$$C_j = \sum_{k=0}^{m+N-j}\ \sum_{l=0}^{m+N-j-k}\left\{\binom{l}{m-k}A_{m-k}D^kF_{j+k+l-m}-\binom{l}{N-k}F_{N-k}D^kA_{j+k+l-N}\right\},$$

Y, Z_k - произвольные константные M×M-матрицы.

В частном случае, когда все собственные значения λ_i имеют кратность 1, ограничение (11) теряет смысл и описанный алгоритм переходит в аналогичный алгоритм работы [3].

Напомним, что коэффициенты формальной симметрии по определению должны быть матричнозначными дифференциальными функциями. Поэтому для существования формальной симметрии степени m порядка n необходимо выполнение условий интегрируемости

$$B_{k-1}^{<11>}\Big|_{A_k^{<11>}=0} \in \mathrm{Im}(D), \quad k=m-1,m-2,\dots,m-n+2, \tag{13}$$

означающих, что левая часть (13) представляет собой полную производную по x от некоторой матричнозначной дифференциальной функции. Условия (13) накладывают сильные ограничения на функцию F и могут быть положены в основу классификации эволюционных систем (7), обладающих высшими симметриями. Отметим, что предложенный в работе [3] алгоритм обращения оператора D позволяет автоматически осуществлять проверку условий (13) в ходе построения формальной симметрии.

4. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ВЫСШИХ СИММЕТРИЙ

Пусть эволюционная система (2), удовлетворяющая ограничению (11), обладает симметрией H порядка n>N. Тогда выполняется следующее операторное соотношение, вытекающее из (4):

$$\frac{d}{d\tau}(H_*) - [F_*,H_*] = \frac{d}{d\tau}(F_*) \equiv \frac{d}{dt}(F_{N-1})\cdot D^{N-1} + \dots , \tag{14}$$

где

$$H_*=H_0+H_1D+\dots+H_nD^n, \quad (H_i)^{\alpha\beta}=\partial H^\alpha/\partial u_i^\beta, \quad \alpha,\beta=1,2\dots M,$$

$$d/d\tau = \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=0}^{\infty} D^i(H^\alpha)\,\partial/\partial u_i^\alpha.$$

Из соотношения (14) видно, что при ограничении (11) имеет место равенство

$$H_*- \mathrm{diag}(H_0) = \tilde{L} \equiv L\big|_{\mathrm{diag}(A_0)=0}, \tag{15}$$

где $L = \sum_{k=0}^{n} A_kD^k$ – формальная симметрия порядка n+2, вычисленная по рекуррентным формулам (12) при некотором фиксированном наборе значений произвольных констант – элементов матриц $Y^{<11>},Z_k^{<11>}$. Действуя обеими частями (15) на вектор-функцию u_1 и обращая оператор

$$\tilde{D}_\alpha \equiv D-\partial/\partial x-u_1^\alpha\cdot\partial/\partial u^\alpha,$$

найдем компоненты симметрии H с точностью до прибавления произвольных функций $h^\alpha(u^\alpha)$:

$$H^\alpha = \tilde{D}_\alpha^{-1}(\tilde{L}u_1)_\alpha + h^\alpha(u^\alpha), \quad \alpha=1,\dots,M. \tag{16}$$

Алгоритм обращения оператора $\tilde{D}_\alpha$ приводится в работе [3]. При его применении происходит автоматическая проверка условий

$$(\tilde{L}u_1)_\alpha \in \mathrm{Im}(\tilde{D}_\alpha), \tag{17}$$

представляющих собой необходимые условия существования симметрии заданного порядка. Из условий (17) возникает система линейных алгебраических уравнений на произвольные константы – элементы матриц $Y^{<11>},Z_k^{<11>}$. В случае ее разрешимости подставляем (16) в (4) и выписываем переопределенную систему уравнений в частных производных для определения функций $h^\alpha(u^\alpha)$.

Отметим, что в частном случае, когда

$$F_{N-1}^{<11>}= c_i\cdot I_i, \quad c_i\in\mathbb{C}, \quad i=1,\dots,\mu,$$

симметрия порядка n (если таковая существует), может быть найдена по формуле

$$H = D^{-1}(Lu_1),$$

где L – формальная симметрия степени n порядка n+2.

Авторы благодарят В.Ласснера за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sokolov V.V.,Shabat A.B. Classification of integrable evolution equations.*Math.Phys.Rev.*4,221-280, New York.
2. Mikhailov A.V.,Shabat A.B.,Yamilov R.I. Symmetry approach to classification of nonlinear equations. The complete list of integrable systems.*Usp.Mat.Nauk.*42,3-53,1987 (in Russian).
3. Gerdt V.P.,Shabat A.B.,Svinolupov S.I.,Zharkov A.Yu. Computer algebra application for investigating integrability of nonlinear evolution systems. In: "EUROCAL'87", Lecture Notes in Computer Science 378,81-92,Springer-Verlag, Berlin,1989.
4. Gerdt V.P., Zharkov A.Yu. Computer generation of necessary integrability conditions for polynomial-nonlinear evolution systems, Proc. of "ISSAC'90", International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM Press, Addison-Wesley Publ.Co., 1990,250-254.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 мая 1991 года.