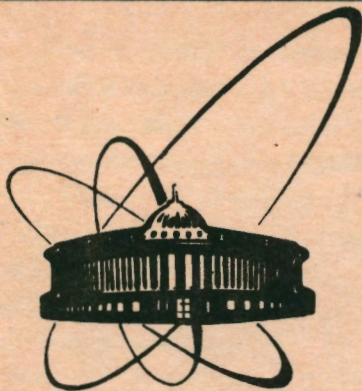


91-189



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P5-91-189

И. В. Кисель, Е. В. Конотопская, Г. А. Ососков,
Н. И. Чернов

**ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ
МЕТОДА КРАУФОРДА ПОДГОНКИ ОКРУЖНОСТИ**

1991

1 Введение

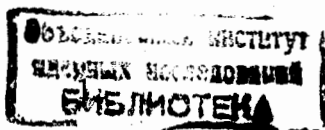
Несоответствие геометрической простоты постановки задачи подгонки окружности к измеренным точкам и итерационной сложности реализации метода наименьших квадратов все время толкало экспериментаторов на поиски простого и элегантного метода решения. Рано или поздно практически каждый выходит на метод, который мы (из-за наибольшей доступности ссылки) будем называть методом Крауфорда [1]¹. Простота формул и быстрота подгонки являются привлекательными свойствами этого метода. К сожалению, в реальных установках, где фиксирован размер измеряемой дуги, как только дело доходит до больших радиусов восстанавливаемой окружности, наступает разочарование: метод "срывается" на малые радиусы [2, 3, 4].

Выяснение объективной качественной причины этого (см. ниже п.2) не снимает искушения пользоваться вышеупомянутыми преимуществами метода Крауфорда там, где он "должен работать на верняка" (это обычно означает, что подгоняемые точки разбросаны почти по всей окружности малого радиуса).

Таким образом возникла задача: проанализировать количественно зависимость точности метода Крауфорда от радиуса подгоняемой окружности с тем, чтобы найти такую область допустимых радиусов, в которой сохранялись бы все преимущества этого метода.

В настоящей работе в предположениях, вполне выполнимых для многих физических установок, выведены достаточно точные теоретические зависимости от радиуса как невязки метода, так и относительной ошибки в определении радиуса. Справедливость сделанных предположений проверена с помощью численного эксперимента, выполненного на основе параметров детектора АРЕС [4] и подтвердившего теоретические результаты.

¹ Следует отметить, что еще за 20 лет до Крауфорда этот метод был предложен Н.Н.Говоруном [5] и широко применялся в ОИЯИ.



2 Метод Крауфорда

Пусть имеется n экспериментальных точек $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ и существует достаточно обоснованная гипотеза о том, что их расположение на плоскости описывается уравнением окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (1)$$

с неизвестным центром (a, b) и радиусом R . Задача определения этих параметров по измеренным точкам и есть задача подгонки окружности. В методе наименьших квадратов (МНК) для оценки a, b, R ищется минимум функционала

$$S_2(a, b, R) = \sum_{i=1}^n \rho_i^2, \quad (2)$$

где

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - R. \quad (3)$$

Нелинейность производных (2) по параметрам оказалась нетривиальным затруднением, для обхода которого был предложен целый ряд достаточно эффективных итерационных методов [2, 3, 4].

Предложение Крауфорда [1] состоит в замене (2) на функционал

$$S = \sum_{i=1}^n ((x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 - R^2)^2. \quad (4)$$

Легко показать (см. напр. [1]), что нормальные уравнения, получаемые при дифференцировании (4) по параметрам, являются линейными относительно a, b и $\gamma = R^2 - a^2 - b^2$, что позволяет легко вычислить оценки \hat{a}, \hat{b} и \hat{R} безо всяких итераций.

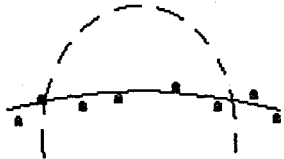


Рис. 1. "Срыв" метода Крауфорда на малые радиусы.

Однако в [2] была подмечена очевидная при $\rho_i \ll R$ связь

$$S = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 (\rho_i + 2R)^2 \approx 4R^2 \sum_{i=1}^n \rho_i^2 = 4R^2 S_2, \quad (5)$$

качественно объясняющая, почему при минимизации S этот функционал "предпочитает" окружность с радиусом, меньшим (см. пункт на рис. 1), чем у той, что должна пройти близко к измеренным точкам, минимизируя функционал S_2 , получаемый в МНК. При расположении точек по всей окружности этот эффект не сказывается.

3 Анализ метода Крауфорда

Мы предполагаем, что x -координаты измеренных точек детерминированы (неслучайны). Это соответствует физическим экспериментам, в которых x -координаты определяются положением детекторов (камер, проволочек и т.д.). А y -координаты измеренных точек случайны и определяются формулой, следующей из (1),

$$y_i = b - \sqrt{R^2 - (x_i - a)^2} + \epsilon_i, \quad (6)$$

где ϵ_i ($i = \overline{1, n}$) - ошибки измерений, независимы и распределены нормально со средним 0 и дисперсией σ^2 (дисперсия предполагается одинаковой для простоты, хотя можно рассматривать и общий случай).

Наша задача состоит в том, чтобы определить ошибку, допускаемую методом Крауфорда при больших радиусах R окружности, и установить таким образом границы применения этого метода. Основным параметром в нашей задаче - радиус R . Будем считать, что x -координаты измеренных точек расположены симметрично относительно начала координат: $x_1 + \dots + x_n = 0$ (этого также можно добиться переносом системы координат). Наконец, если точки x_1, \dots, x_n расположены на равных расстояниях друг от друга (это обычно имеет место в экспериментах), то дополнительно получаем $x_1^3 + \dots + x_n^3 = 0$. Для упрощения обозначений удобно ввести аналог известных гауссовых скобок $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^p y^q = [x^p y^q]$, так что $[x] = 0, [x^3] = 0$.

В этих обозначениях решение задачи подгонки окружности методом Крауфорда выглядит так²: \hat{a} и \hat{b} определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} [x^2]\hat{a} + [xy]\hat{b} = \frac{1}{2}[xy^2], \\ [xy]\hat{a} + ([y^2] - [y]^2)\hat{b} = \frac{1}{2}([x^2y] + [y^3] - ([x^2] + [y^2])[y]), \end{cases} \quad (7)$$

а радиус \hat{R} - из соотношения

$$\hat{R}^2 = \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - 2\hat{b}[y] + [x^2] + [y^2]. \quad (8)$$

Здесь \hat{a} , \hat{b} , \hat{R} - означают оценки параметров a , b , R .

В разных физических экспериментах целью подгонки окружности может быть либо "чистый" фит (т.е. проведение аппроксимирующей линии, напр. трека), либо оценка значения R (по радиусу кривизны траектории определяется импульс заряженной частицы). В первом случае критерием качества метода является среднеквадратичная "невязка" (или "хи-квадрат", как иногда его называют):

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^n (\sqrt{(x_i - \hat{a})^2 + (y_i - \hat{b})^2} - \hat{R})^2, \quad (9)$$

а во втором - относительная ошибка:

$$\widehat{\Delta R} = \frac{\hat{R} - R}{R}. \quad (10)$$

Из (5) следует более удобная формула для невязки (см. также [2, 3]):

$$\overline{\hat{\chi}^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{((x_i - \hat{a})^2 + (y_i - \hat{b})^2 - \hat{R}^2)^2}{4\hat{R}^2}. \quad (11)$$

Величины (10) и (11) случайны (т.к. случайны оценки \hat{a} , \hat{b} , \hat{R} и координаты y_i) и для исследования метода Крауфорда следует найти их средние значения $\langle \widehat{\Delta R} \rangle$ и $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$.

²Дополнительным сдвигом и поворотом системы координат легко добиться того, что $[y] = 0$ и $[xy] = 0$. Однако мы этого не делаем, так как тогда нарушаются важные предположения о неслучайности x_i .

В нашей задаче есть два параметра, влияющие на точность результата: радиус R (достаточно большой) и среднеквадратическая ошибка измерений σ (достаточно малая). Легко видеть, что при $\sigma = 0$ все точки попадают точно на окружность и метод Крауфорда дает точные оценки $\hat{a} = a$, $\hat{b} = b$, $\hat{R} = R$ при любом радиусе R . С другой стороны, как мы видели, при заданном $\sigma > 0$ и больших R применение метода может привести к большим ошибкам [2, 3, 4]. Следовательно, все определяется соотношением двух очень малых параметров: σ и R^{-1} , за которыми приходится следить очень аккуратно. Ниже все наши формулы выписываются с точностью до малых высших порядков относительно σ и R^{-1} .

Прежде всего выразим определитель системы линейных уравнений (7):

$$\det = \frac{1}{4R^2}[x^2]([x^4] - [x^2]^2) + \frac{1}{R}[x^2]([x^2\epsilon] - [x^2][\epsilon]) + ([x^2]([\epsilon^2] - [\epsilon]^2) - [x\epsilon]^2). \quad (12)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{1}{2\det} \left(\frac{1}{2R}[x^2]([x^4] - [x^2]^2) + [x^2]([x^2\epsilon] - [x^2][\epsilon]) \right), \\ \hat{a} &= \frac{1}{2\det}[x\epsilon]([x^2][\epsilon] - [x^2\epsilon]), \end{aligned} \quad (13)$$

И, наконец,

$$\hat{R}^2 \approx \hat{b}^2 + [x^2] - 2\hat{b}[\epsilon] - \frac{\hat{b}}{R}[x^2].$$

После этого

$$\hat{\epsilon}^2 \approx \frac{[x^4] - [x^2]^2}{4\hat{R}^2} - \frac{\hat{b}}{\hat{R}^2}([x^2y] - [x^2][y]) + \frac{\hat{b}^2}{\hat{R}^2}([y^2] - [y]^2) + \frac{\hat{a}^2}{\hat{R}^2}[x^2] + 2\frac{\hat{a}\hat{b}}{\hat{R}^2}[xy]. \quad (14)$$

Мы видим, что \det представляет собой сумму трех величин, имеющих, соответственно, порядки R^{-2} , $\sigma \cdot R^{-1}$, σ^2 . Аналогично, в (13) входит сумма двух величин порядков R^{-1} и σ соответственно. Поэтому при $\sigma \ll R^{-1}$ следует оставить лишь первые слагаемые в этих суммах, при $\sigma \gg R^{-1}$ - лишь последние, а если σ и R^{-1} сравнимы, то надо учитывать все слагаемые. Рассмотрим соответствующие случаи последовательно.

1^o. $\sigma \ll R^{-1}$, или точнее, как видно из (12), это случай

$$R \ll \frac{1}{\sigma} \sqrt{[x^4] - [x^2]^2}. \quad (15)$$

В этом случае радиус R достаточно мал и метод Крауфорда работает так же хорошо, как и обычный метод наименьших квадратов. В (14) все слагаемые имеют один порядок ($\sim \sigma^2$) и можно показать (мы не приводим всех выкладок), что среднее значение квадрата невязки

$$\langle \hat{\epsilon}^2 \rangle = \frac{n-3}{n} \sigma^2 + o(\sigma^2) \quad (16)$$

и

$$\left\langle \left| \frac{R - \hat{R}}{R} \right| \right\rangle \approx \text{const} \cdot \sigma,$$

где const не зависит от измеренных значений, т.е. зависит от n , $[x^2]$, $[x^4]$, R и выражается очень громоздкой формулой, приводить которую нет необходимости.

2°. $\sigma \gg R^{-1}$, или точнее, $R \gg \sigma^{-1} \sqrt{[x^4] - [x^2]^2}$ (ср. с (15)). В этом случае радиус R слишком велик и ошибка метода Крауфорда весьма велика. Величины (13) определяются только последними слагаемыми, \hat{a} пренебрежимо мало, а в формуле (14) первое слагаемое играет решающую роль. Точнее,

$$\hat{b} \approx \frac{[x^2\epsilon] - [x^2][\epsilon]}{2([x^2] - [\epsilon]^2 - \frac{[x\epsilon]^2}{[x^2]})}, \quad (17)$$

$$\hat{R}^2 \approx \hat{b}^2 + [x^2] - 2\hat{b}[\epsilon],$$

$$\hat{\epsilon}^2 \approx \frac{[x^4] - [x^2]^2}{4\hat{b}^2 + 4[x^2] - 8\hat{b}[\epsilon]}. \quad (18)$$

Мы видим, что величины \hat{b} и \hat{R} имеют порядок σ^{-1} и (с точностью до малых высших порядков) их средние значения вообще не зависят от исходных значений b и R . Поэтому относительная ошибка (10) становится порядка 1:

$$\langle \widehat{\Delta R} \rangle \approx 1,$$

что означает, что оценка \hat{R} никуда не годится. Впрочем, метод наименьших квадратов тоже бессилён в этой ситуации (см. результаты численного эксперимента, описанного ниже).

Что касается невязки (9) (или (11)), то дело обстоит сложнее. Как видно из (5), в числителе (11) стоит именно та величина, которую минимизирует метод Крауфорда

$$S = 4\hat{R}^2 \hat{\epsilon}^2 \rightarrow \inf_{a,b,R}.$$

Как уже отмечалось, вместо "правильного" радиуса R , дающего $S = R^2 \sigma^2$, функционал метода Крауфорда предпочитает меньшие радиусы. Их величина в зависимости от измеренных значений может случайно меняться от $R \sim 1/\sigma$ до $R \sim \text{const} = \sqrt{[x^2]}$.

Мы оценим среднее значение невязки $\langle \hat{\epsilon}^2 \rangle$ (оно оказывается не порядка σ^2 или const , а промежуточное: порядка σ), используя довольно тонкие факты из математической статистики.

Вектор ошибок $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^T = \epsilon$ имеет многомерное нормальное распределение со средним 0 и диагональной ковариационной матрицей $\text{diag}(\sigma^2)$. Любое ортогональное преобразование $\delta = C \cdot \epsilon$ (где $C^T \cdot C = E$, т.е. C - ортогональная матрица $n \times n$) даст нам случайный вектор δ в точности с такими же свойствами. Мы выберем матрицу C так, чтобы первые три компоненты вектора δ были следующие:

$$\begin{cases} \delta_1 = \sqrt{n}\epsilon, \\ \delta_2 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[x^2]}}[x\epsilon], \\ \delta_3 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[x^4] - [x^2]^2}}([x^2\epsilon] - [x^2][\epsilon]). \end{cases} \quad (19)$$

Легко проверить, что первые три строки так определенной матрицы C действительно взаимно ортогональны, а дополнить их до ортогональной матрицы $n \times n$ можно произвольным образом. Подставив выражения (19) в (17), найдем, что

$$\hat{b} = \frac{\sqrt{n([x^4] - [x^2]^2)}}{2} \frac{\delta_3}{\delta_3^2 + \dots + \delta_n^2}. \quad (20)$$

Из (20) уже видно, что хотя в типичном случае $\delta_i \sim \sigma$ и поэтому $\hat{b} \sim 1/\sigma$, но если $\delta_3 \approx 0$ в то время как $\delta_4^2 + \dots + \delta_n^2 \approx (n-3)\sigma^2$, то величина \hat{b} близка к нулю. В этом случае и наступает "крах" метода Крауфорда: если $\hat{b} \approx 0$, то согласно (17, 18) $\hat{R}^2 \approx [x^2] \approx \text{const}$ и $\hat{\epsilon}^2 \approx \text{const}$, что уже недопустимо, т.к. такой "фит" хуже даже простой подгонки прямой линией, которая и то дает $\hat{\epsilon}^2 \approx \sigma^2$. Для того чтобы грубо оценить вероятность этого и найти среднее $\langle \hat{\epsilon}^2 \rangle$, мы будем считать только величину δ_3 случайной (гауссовской), а сумму $\delta_3^2 + \dots + \delta_n^2$ постоянной и равной ее среднему значению $(n-2)\sigma^2$. Подставив наши формулы в выражение для невязки (18),

найдем, что с точностью до малых высших порядков

$$\hat{\epsilon}^2 \approx \frac{[x^4] - [x^2]^2}{4[x^2] - n(n-2)^{-2}([x^4] - [x^2]^2)\sigma^{-4}\delta_3^2}.$$

В этой формуле лишь величина δ_3 случайна, и потому

$$\langle \hat{\epsilon}^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{[x^4] - [x^2]^2}{4[x^2] - n(n-2)([x^4] - [x^2]^2)\sigma^{-2}t^2} dt \approx \quad (21)$$

$$\approx \sigma \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(n-2)^2([x^4] - [x^2]^2)}{8\pi n[x^2]}}.$$

Итак, среднеквадратическая ошибка при подгонке оказалась $\sqrt{\langle \hat{\epsilon}^2 \rangle} \approx \text{const} \cdot \sqrt{\sigma}$, т.е. существенно выше, чем даже при подгонке прямой линией (там она $\approx \text{const} \cdot \sigma$). В этом и состоит главный недостаток метода Крауфорда.

3°. σ и R^{-1} сравнимы. В этом случае \det следует вычислять по полной формуле (12) и, подставив в нее (19), получим

$$\det = \frac{[x^2]}{n} \left\{ (\delta_3 + \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{[x^4] - [x^2]^2}}{2R})^2 + \delta_4^2 + \dots + \delta_n^2 \right\}.$$

Обозначим $\zeta = \delta_3 + \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{[x^4] - [x^2]^2}}{2R}$. Это гауссовская случайная величина со смещенным средним $A = \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{[x^4] - [x^2]^2}}{2R} \neq 0$. Вычисляя \hat{b} , получим

$$\hat{b} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{[x^4] - [x^2]^2} \cdot \zeta}{2(\zeta^2 + \delta_4^2 + \dots + \delta_n^2)},$$

откуда

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{(\zeta^2 + \delta_4^2 + \dots + \delta_n^2)^2}{n \cdot \zeta^2 + 4[x^2]([x^4] - [x^2]^2)^{-1}(\zeta^2 + \delta_4^2 + \dots + \delta_n^2)^2}.$$

Вновь, как и в предыдущем случае, заменим величину $\delta_4^2 + \dots + \delta_n^2$ на ее среднее значение $(n-3)\sigma^2$. Тогда

$$\langle \hat{\epsilon}^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-A/\sigma)^2}{2}} \frac{(t^2 + n-3)^2}{nt^2 + \sigma^2 B(t^2 + n-3)^2} dt, \quad (22)$$

где $B = 4[x^2]([x^4] - [x^2]^2)^{-1}$. Подинтегральная функция имеет два выраженных пика - в точке A/σ и в точке 0. Поэтому приближенно

$$\langle \hat{\epsilon}^2 \rangle \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(n-3)^2([x^4] - [x^2]^2)}{8\pi n[x^2]}} \sigma e^{-\frac{n([x^4] - [x^2]^2)}{8R^2\sigma^2}} + \frac{4R^2\sigma^4}{([x^4] - [x^2]^2)n^2} \left(\frac{n([x^4] - [x^2]^2)}{4R^2\sigma^2} + n-3 \right)^2. \quad (23)$$

где A и B определены выше. В формуле (23) в первом слагаемом перед экспонентой стоит величина, практически совпадающая с величиной (21). При $(R \cdot \sigma) \rightarrow \infty$ экспонента стремится к 1 и мы приходим к выражению (21), но когда $R \cdot \sigma$ имеет порядок 1, экспонента "уводит" все слагаемое к нулю, а при $R \cdot \sigma \approx 0$ решающим становится второе слагаемое.

Наконец, оценим относительную ошибку определения радиуса, предположив для простоты, что \hat{a} - мало, а $\hat{b} \approx R$:

$$\left\langle \left| \frac{\hat{R} - R}{R} \right| \right\rangle \approx \left\langle \frac{R - \hat{b}}{R} \right\rangle \approx \frac{R - \langle \hat{b} \rangle}{R} \approx \frac{4R^2\sigma^2(n-3)}{n([x^4] - [x^2]^2) + 4R^2\sigma^2(n-3)}. \quad (24)$$

Отметим, что формула (24) справедлива лишь при $n \geq 4$. Дело в том, что при $n = 3$ среднее значение $\langle \hat{b} \rangle$ бесконечно! Это можно показать строго, но мы не приводим доказательство.

4 Численные результаты

Численные результаты получены на основе параметров установки АРЕС так, чтобы смоделировать условия эксперимента по поиску распада $\mu \rightarrow 3e$ [4].

В этом эксперименте было задействовано 10 из 18 цилиндрических многопроволочных пропорциональных камер. Радиус первой камеры 64.0 мм, десятой - 314.6 мм. Расстояние между проволочками внутри камер ≈ 2 мм, поэтому экспериментальные точки имеют ошибку ≈ 1 мм. Эффективность работы камер в среднем составляла 97%. При восстановлении треков требовалось, чтобы на треке лежало не менее 8 точек, а также не допускались разрывы внутри трека (отсутствие экспериментальных точек в соседних камерах). Технические характеристики установки были подобраны так,

что разброс радиусов оказался примерно в диапазоне от 15 см до 70 см.

При проведении численного эксперимента было взято $n = 10$, $\sigma = 1$ мм, экспериментальные точки x ; соответствовали радиусам камер. Это привело к следующему разделению областей: 1) $R \leq 100$ см, 2) $R \geq 1000$ см, 3) $100 \text{ см} \leq R \leq 1000$ см. Для достижения необходимой точности в численном расчете методом Монте-Карло каждая точка на рис. 2 и 3 получалась усреднением оценок параметров 10^4 случайных окружностей (что требовало порядка 1 мин на ПЭВМ РС-АТ/386). Каждая такая окружность с заложенным в нее радиусом и случайно разыгранным центром накладывалась на модель детектирующей установки, что давало 10 отсчетов, по которым дважды оценивались заложенные параметры: методом Крауфорда и по МНК. Оценки МНК проводились методом, предложенным в [2]. Этот метод по точности практически не уступает МНК, а его машинное время лишь в 1.5 раза больше, чем у метода Крауфорда. Средняя невязка вычислялась по формуле (11) и после извлечения корня и деления на σ усреднялась по 10 тыс. реализаций, давая одну точку на графике 2. Аналогично по формуле (10) с последующим усреднением вычислялась точка на графике 3 относительной ошибки радиуса. На графиках в виде кривых изображены зависимости $k \equiv \sqrt{\hat{\epsilon}^2}/\sigma$, $\langle \Delta \hat{R} \rangle$ и $\langle \hat{R} \rangle$ от R , вычисленные по формулам (16)-(24).

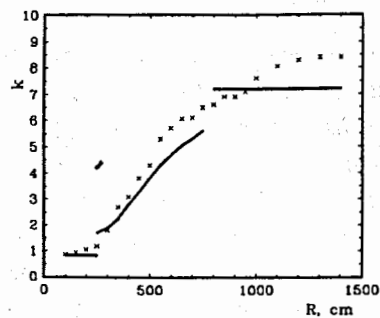


Рис. 2. Сравнение формул для невязки с результатами численного эксперимента по методу Монте-Карло.

Рис. 2 демонстрирует хорошее согласие приближенных формул, полученных в данной работе, с результатами численного эксперимента.

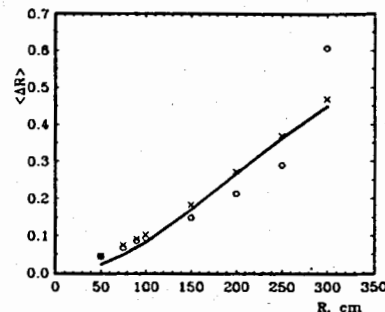


Рис. 3. Сравнение формул для относительной ошибки радиуса с результатами численного эксперимента по методу Монте-Карло и результатами метода наименьших квадратов.

Из рис. 3 видно, что радиусы меньше 100 см восстанавливаются так же хорошо, как и в МНК, а затем метод Крауфорда работает плохо, даже хуже, чем показывает рисунок. Дело в том, что хотя относительная ошибка радиуса в МНК растет, но среднее значение радиуса соответствует действительности, в то время как в методе Крауфорда средний радиус уходит на малые значения (см. рис. 4)! Этим и объясняется обманчивое превосходство метода Крауфорда над МНК после 300 см (рис. 3).

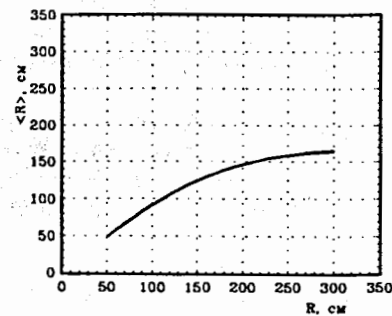


Рис. 4. Поведение среднего радиуса в методе Крауфорда.

Окончательный вывод о применимости метода Крауфорда достаточно пессимистичен: даже в "благополучном" случае диапазона изменений радиуса (15) метод Крауфорда применим только для оценки параметров по "вычищенным" данным, свободным от засорения точками шумов или других треков. Его нельзя применять для распознавания и прослеживания треков. Применение же робастных методов [6] переводит метод Крауфорда в разряд итерационных, среди которых он явно уступает уже упоминаемому методу [2].

Литература

- [1] Crawford J.F. - Nucl. Instr. and Meth., 1983, v.211, p.223.
- [2] Ососков Г.А., Чернов Н.И. ОИЯИ, P5-84-7, Дубна, 1984.
- [3] Chernov N.I., Ososkov G.A. - Comp. Phys. Comm., 1984, v.33, p.329.
- [4] Кисель И.В. и др., ОИЯИ, P1-91-110, Дубна, 1991.
- [5] Говорун Н.Н. и др., ОИЯИ-2036, Дубна, 1965.
- [6] Астапов А.А. и др., ОИЯИ, P5-85-492, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 апреля 1991 года.

Кисель И.В. и др.

P5-91-189

Исследование границ применимости метода Крауфорда
подгонки окружности

Простота формул и быстрота подгонки являются привлекательными свойствами этого метода. К сожалению, в реальных установках, где фиксирован размер измеряемой дуги, как только дело доходит до больших радиусов восстанавливаемой окружности, наступает разочарование: метод "срывается" на малые радиусы. Выяснение объективной качественной причины этого не снимает искушения пользоваться вышеупомянутыми преимуществами метода Крауфорда там, где он "должен работать наверняка". В настоящей работе выведены достаточно точные теоретические зависимости от радиуса как невязки метода, так и относительной ошибки в определении радиуса. Справедливость сделанных предположений проверена с помощью численного эксперимента, выполненного на основе параметров детектора АРЕС и подтвердившего теоретические результаты.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод авторов

Kisel I.V. et al.

P5-91-189

Study of the Applicability of the Crawford's Method
of Circle Fitting

The attractive features of the Crawford's method of circle fitting are easy to formulate and fast to calculate. Unfortunately in real experiments where the length of the arch measured is restricted the method is failed in cases of large radii estimating them by wrong, smaller values. There are quite objective reasons of this phenomenon, but the above advantages of the Crawford's kept a temptation to use it in cases when it "has to work certainly". Analytical expressions for the dependence of residuals and relative errors on radii fitted were evaluated in assumptions applicable to many physical facilities. The validity of these assumptions was examined by a numerical experiment carried out on the base of parameters of the ARES detector.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991