СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P5 - 9063

Е.П.Жидков, Р.В.Малышев, Е.Х.Христов

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

1975

P5 - 9063

Е.П.Жидков, Р.В.Малышев, Е.Х.Христов

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Жидков Е.П., Малышев Р.В., Христов Е.Х. Р5 - 9063

Решение обратной задачи рассеяния методом Ньютона

Основан простой итерационный процесс для восстановления потенциала в уравнении Шредингера по фазе рассеяния. Регуляризацией по Тихонову получена устойчивая рассчетная схема для ЭВМ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Zhidkov E.P., Malyshev R.V., Christov E.C. P5 - 9063

Solution of the Inverse Scattering Problem by Newton's Method

It is stated a simple convergent process for the constraction of the potential in Schrödinger equation from the scattering phase shift. Using Tikhonov regularization, it is obtained a stable computing scheme.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

В в е д е н и е

В настоящей работе рассматривается обратная задача квантовой теории рассеяния для радиального уравнения Шредингера

$$y'' + (k^2 - v(x))y = 0, \quad 0 \le x < \infty \tag{0.I}$$

с краевым условием

$$y(0) = 0. \tag{0.2}$$

Потенциал $v(x)$ предполагается вещественным и удовлетворяющим неравенству

$$\int_0^\infty x|v(x)|dx < \infty. \tag{0.3}$$

Пусть $f_v(x,k)$ и $\varphi_v(x,k)$ решения уравнения (0.I), удовлетворяющие соответственно условиям

$$\lim_{x\to\infty} f_v(x,k)e^{-ikx} = 1, \quad (\operatorname{Im} k \ge 0), \tag{0.4}$$

$$\varphi_v(0,k) = 0, \quad \varphi_v'(x,k) = 1. \tag{0.5}$$

Функция Йоста $f_v(k)$ и функция рассеяния $S_v(k)$ определяются формулами

$$f_v(k) = \lim_{x\to 0} f_v(x,k) = W\{f_v(x,k), \varphi_v(x,k)\} \equiv \tag{0.6}$$
$$\equiv f_v\varphi_v' - f_v'\varphi_v,$$

$$S_v(k) = \frac{f_v(-k)}{f_v(k)} = \lim_{x\to 0}\frac{f_v(x,-k)}{f_v(x,k)}, \quad (\operatorname{Im} k = 0). \tag{0.7}$$

В работах[I] был построен устойчивый алгоритм восстановления потенциала на ЭВМ по экспериментальной фазе. Здесь продолжается изучение возможностей решения относительно $\upsilon(x)$ уравнения $\Phi(\upsilon) - S_*(k) = 0$, где $S_*(k)$ - заданная функция, а $\Phi(\upsilon)$- оператор, ставящий в соответствие каждому потенциалу $\upsilon(x)$ функцию рассеяния $S_\upsilon(k)$ по формуле (0.7). На основе метода Ньютона-Канторовича[2] с учетом основополагающих результатов В.А.Марченко по обратной задаче рассеяния[3] получено аналитическое доказательство сходимости применяемого в[I] итерационного процесса. Предложена и новая, более простая схема для определения потенциала по функции рассеяния в предположении, что известно, "достаточно хорошее "начальное приближение к искомому решению. Приведены результаты численного счета. В работе изучен простейший случай обратной задачи, когда потенциал восстанавливается однозначно по одной лишь функции рассеяния. Случай наличия связанных состояний у искомого потенциала сводится к этому с помощью операторов преобразований Крама-Крейна[4,5].

§ I. Некоторые сведения об обратной задаче

В этом параграфе сформулированы некоторые сведения о прямой и обратной задачах рассеяния в удобной для применения функционального метода Ньютона-Канторовича форме.

Введем линейные нормированные пространства X, Y и Z с обычными операциями сложения и умножения на вещественные числа следующим образом: будем обозначать через X пространство

вещественных измеримых функций $\upsilon(x)$, удовлетворяющих условию (0.3) с нормой

$$\|\upsilon\|_X = \int_0^\infty x|\upsilon(x)|dx. \qquad (I.1)$$

Отметим, что X - полное пространство. Через Y обозначим пространство вещественных функций $f(x) \in L^1(-\infty,\infty)$, абсолютно непрерывных при $x>0$ и таких, что $x f'(x) \in L^1(0,\infty)$.
Норму в Y определим следующим образом:

$$\|f\|_Y = \int_0^\infty x|f'(x)|dx + \int_{-\infty}^0 |f(x)|dx. \qquad (I.2)$$

Так как $\|f\|_{L^1(0,\infty)} \le \|f'\|_X$, то $\|f\|_{L^1(-\infty,\infty)} \le \|f\|_Y$.

Пространство Z определим как множество функций $F(k)$, представимых в виде преобразования Фурье некоторой функции $f(x) \in Y$, т.е.

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2ikx} dx, \quad -\infty < k < \infty. \qquad (I.3)$$

Норму введем равенством

$$\|F\|_Z = \|f\|_Y. \qquad (I.4)$$

Множество функций $f(x) \in Y$ и $f(x) \equiv 0$ при $x<0$ обозначим через Y_+, а множество функций $F(k)$, представимых в виде (I.3) с некоторой $f(x) \in Y_+$, обозначим через Z_+.
Из (I.2) следует, что норма в Y_+ определяется равенством

$$\|f\|_{Y_+} = \int_0^\infty x|f'(x)|dx = \|f'\|_X. \qquad (I.5)$$

Пусть P_Y^+ и P_Z^+ – операторы проектирования на подпространства Y_+ и Z_+, тогда для любой функции $f(x) \in Y$ имеем

$$P_Z^+\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2ikx} dx\right\} = \int_0^{\infty} f(x) e^{-2ikx} dx = \int_0^{\infty} P_Y^+[f] e^{-2ikx} dx. \quad (I.6)$$

Обозначим через $\Omega_v \subset X$ –совокупность потенциалов $v(x) \in X$, для которых у граничной задачи (0.1)-(0.2) нет собственных чисел и виртуального уровня. Отметим, что для того, чтобы $v \in \Omega_v$, необходимо и достаточно, чтобы функция Йоста $f_v(k)$ (0,6) удовлетворяла условию

$$\min_{\operatorname{Im} k \geq 0} |f_v(k)| = m_v > 0. \quad (I.7)$$

Пусть Ω_S - множество функций $S(k), (-\infty < k < \infty)$, удовлетворяющих условиям

$$S(k) = \overline{S(-k)} = S^{-1}(-k), \quad (I.8)$$

$$1 - S(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F_S(x) e^{-ikx} dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} F_S(2x) e^{-2ikx} dx, \quad (I.9)$$

$$\ln S(+0) - \ln S(+\infty) = 0, \quad (I.10)$$

где $F_S(x) \in Y$. Совокупность функций $\{2F_S(2x)\} \subset Y$, для которых функция $S(k)$, построенная по (I.9), удовлетворяет (I.8) и (I.10), обозначим через Ω_F. Проекцию этого множества на Y_+ обозначим через $\Omega_F^+ = P_Y^+(\Omega_F)$, а совокупность

производных по x при $x > 0$ функций из Ω_F^+ обозначим через $\Omega_{F'}^+$. Очевидно, $\Omega_{F'}^+ = \{4F_S'(2x)\} \subset X$.

Множеству Ω_v принадлежат, например, все неотрицательные потенциалы $v(x) \geq 0, (0 < x < \infty)$, а также потенциалы, для которых $\|v\|_X < 1$.

Определим в пространстве X оператор

$$\Phi(v) = 1 - S_v(k) \equiv 2\int_{-\infty}^{\infty} F_{S_v}(2x) e^{-2ikx} dx, \quad (I.11)$$

ставящий в соответствие потенциалу $v(x)$ функцию $1 - S_v(k)$, где $S_v(k)$- функция рассеяния (0.7). В [3], в частности, было показано, что область значения $\Phi(v)$ содержится в пространстве Z, более того, оператор $\Phi(v)$ взаимно однозначно отображает множество Ω_v на множество $I - \Omega_S$, т.е. для любой функции $S(k)$, удовлетворяющей условиям (I.8)-(I.10) (и только для такой) существует единственный потенциал $v(x) \in \Omega_v$, с функцией рассеяния $S_v(k)$, равной заданной $S(k)$. Наряду с оператором $\Phi(v)$ (I.11) определим в пространстве X, играющем основную роль в наших рассмотрениях, оператор

$$\Psi(v) = 4F_{S_v}'(2x), \ (0 < x < \infty), \quad (I.12)$$

где функция $F_{S_v}(x)$ построена по $S_v(k)$ формулой(0.9). Область значения этого оператора содержится в пространстве X. Отметим, что $\Psi(v)$ определяется по $\Phi(v)$ формулой

$$\Psi(v) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_Z^+[\Phi(v)] e^{2ikx} dk. \quad (I.13)$$

<u>Лемма I.I</u>. Оператор $\Psi(v)$ взаимно однозначно отображает множество Ω_v на множество $\Omega^+_{F'}$.

<u>Доказательство</u>. Из определения $\Omega^+_{F'}$ следует, что $\Psi(v)$ отображает Ω_v на $\Omega^+_{F'}$. Обратно, из уравнения Марченко в обратной задаче рассеяния[3] получаем, что если $S(k)\in\Omega_S$, потенциал $v(x)\in\Omega_v$ и определяется однозначно по значениям функции $F_S(x)$ (1,9) при $x>0$. Так как $F_S(+\infty)=0$, ($F'_S(x)\in X$), то $F'_S(x)$ восстанавливает $F_S(x)$ при $x>0$ по формуле $F_S(x)=-\int_x^\infty F'_S(t)\,dt$. Следовательно, если $F'_{S_1}(x)=F'_{S_2}(x)$ $(0<x<\infty)$, то и $F_{S_1}(x)=F_{S_2}(x)$ $(0<x<\infty)$, что вместе с $S_j(k)\in\Omega_S$ $(j=1,2)$ дает $v_1(x)=v_2(x)\in\Omega_v$. Лемма доказана.

Выбор оператора $\Psi(v)$ обусловлен тем, что функция $4F'_S(2x)$, построенная по $S(k)$ по отношению гладкости и убывания на бесконечности, ведет себя аналогично искомому потенциалу, что со своей стороны позволяет провести все рассмотрения, оставаясь в одном лишь пространстве X .

Так как на языке функции $F_S(x)$ нетрудно сформулировать необходимые и достаточные условия для того, чтобы соответствующий функции $S(k)$ потенциал $v(x)$ имел определенное число производных, убывал как x^{-n} $(x\to\infty)$, либо экспоненциально, или исчезал тождественно при $x>A$ и т.д., то при подходящем изменении метрики пространства рассматриваемых потенциалов можно без труда перенести основные утверждения этой работы в другие пространства, более подходящие для данной конкретной обратной задачи рассеяния.

§ 2. <u>Дифференциальные свойства оператора $\Phi(v)$</u>

<u>Теорема 2.I</u>. Оператор $\Phi(v)$ (1.11), действующий из пространства X (§1) в пространство непрерывных функций $C(-\infty,\infty)$, дважды непрерывно дифференцируем в любой точке $v\in\Omega_v$. Первая производная по Фреше определяется ограниченным линейным оператором

$$\Phi'(v)h=\frac{1}{2ik}\int_0^\infty h(x)u_v^2(x,k)\,dx\ ,\quad (-\infty<k<\infty),\qquad (2.I)$$

с нормой

$$\|\Phi'(v)h\|_{C(-\infty,\infty)}\le m_v^{-2}\exp\{2\|v\|_X\}\|h\|_X\ ,\qquad (2.2)$$

где

$$u_v(x,k)=f_v(x,-k)-S_v(k)f_v(x,k)=-\frac{2ik}{f_v(k)}\varphi_v(x,k),\qquad (2.3)$$

а $\varphi_v(x,k)$, $f_v(k)$ и m_v даются, соответственно, (0,5), (0,6), (I.7). Вторая производная определяется ограниченной билинейной формой

$$\Phi''(v)(g,h)=\frac{1}{2k^2}\Big\{\int_0^\infty g(x)u_v(x,k)f_v(x,k)\,dx\int_0^x h(t)u_v^2(t,k)\,dt+\int_0^\infty h u_v f_v\int_0^x g u_v^2\,dt\Big\}\qquad (2.4)$$

для нормы которой справедлива оценка

$$\|\Phi''(v)(g,h)\|_{C(-\infty,\infty)}\le m_v^{-3}\exp\{4\|v\|_X\}\|g\|_X\|h\|_X\qquad (2.5)$$

Предварительно будет доказана:

Лемма 2.1. Для любого потенциала $v(x) \in \Omega_v$ существует число $\delta = \delta(v) > 0$, такое, что для всех $h(x) \in X$ с нормой $\|h\|_X < \delta$ справедливо следующее разложение для возмущенной функции рассеяния

$$S_{v+h}(k) = S_v(k) - \frac{2ik}{f_v^2(k)} \int_0^\infty h(x) \varphi_v^2(x,k)\,dx + \omega(v,h,k) \quad (2.6)$$

$$\|\omega(v,h,k)\|_{C(-\infty,\infty)} = O(\|h\|_X^2), \quad (2.7)$$

где $\varphi_v(x,k)$, $f_v(k)$ и $S_v(k)$ определяются по невозмущенному потенциалу $v(x)$ формулами (0.5), (0.6), (0.7).

Доказательство: Покажем сначала, что для возмущенной функции Йоста $f_{v+h}(k)$ справедливо разложение

$$f_{v+h}(k) = f_v(k) + \int_0^\infty h(x) \varphi_{v+h}(x,k) f_v(x,k)\,dx, \ (\operatorname{Im} k \geq 0). \quad (2.8)$$

Рассмотрим функцию

$$F(x,k) = W\{f_v(x,k), \varphi_{v+h}(x,k)\} (\equiv f_v \varphi'_{v+h} - f'_v \varphi_{v+h}). \quad (2.9)$$

Из (0.5) и (0.6) получаем, что существует $\lim_{x\to 0} F(x,k) = f_v(k)$. С другой стороны, при вещественных $k \neq 0$ для $\varphi_v(x,k)$ справедливо представление (2.3), что вместе с равенствами $\lim_{x\to\infty} W\{f_v(x,k), f_{v+h}(x,-k)\} = -2ik$, $\lim_{x\to\infty} W\{f_v(x,k), f_{v+h}(x,k)\} = 0$ дает $\lim_{x\to\infty} F(x,k) = f_{v+h}(k)$. Отсюда, интегрируя тождество

$$\frac{d}{dx} F(x,k) = \frac{d}{dx} W\{f_v(x,k), \varphi_{v+h}(x,k)\} = h(x) \varphi_{v+h}(x,k) f_v(x,k)$$

по x на интервале $[0, \infty)$, приходим к (2.8). Обозначая

$$\omega(k) = \frac{1}{f_v(k)} \int_0^\infty h(x) \varphi_{v+h}(x,k) f_v(x,k)\,dx, \quad (2.10)$$

из (2.7) и (0.7), получаем представление

$$S_{v+h}(k) = S_v(k)[1+\omega(-k)][1+\omega(k)]^{-1}. \quad (2.11)$$

Теперь фиксируем потенциал $v(x) \in \Omega_v$ и выберем добавку $h(x) \in X$ такой, чтобы удовлетворялось

$$\|h\|_X \leq \min\{\|v\|_X, \tfrac{1}{2} m_v \exp\{-3\|v\|_X\}\}. \quad (2.12)$$

Тогда из хорошо известных оценок

$$|\varphi_v(x,k)| \leq x \exp\{\int_0^x t|v(t)|\,dt\}, \quad (2.13)$$

$$|k \varphi_v(x,k)| \leq \exp\{\int_0^x t|v(t)|\,dt\}, \quad (2.14)$$

$$|f_v(x,k)| \leq \exp\{\int_x^\infty t|v(t)|\,dt\} \quad (2.15)$$

следует, что $\|\omega(k)\|_{C(-\infty,\infty)} \leq 1/2$. Следовательно, с так выбранным $h(x)$ из (2.11) получаем сходящееся по норме пространства $C(-\infty, \infty)$ разложение

$$S_{v+h}(k) = S_v(k) - \frac{2ik}{f_v^2(k)} \int_0^\infty h(x) \varphi_{v+h}(x,k) f_v(x,k)\,dx \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \omega^n(k). \quad (2.16)$$

Для того чтобы получить (2.6), осталось подставить во второй член правой части (2.16) разложение

$$\varphi_{v+h}(x,k) = \varphi_v(x,k) + \int_0^x G_v(x,t;k)\,h(t)\,\varphi_{v+h}(t,k)\,dt,$$

$$G(x,t;k) = f_v^{-1}(k)\{\varphi_v(x,k) f_v(t,k) - \varphi_v(t,k) f_v(x,k)\}. \qquad (2.17)$$

Тогда $\omega(v,h,k)$ определяется выражением

$$\omega(v,h,k) = -2ik f_v^{-2}(k)\int_0^\infty h(x)\varphi_v(x,k)\,dx\int_0^x h(t) G_v(x,t;k)\varphi_{v+h}(t,k)\,dt$$
$$+ 2ik f_v^{-3}(k)\int_0^\infty h(x)\varphi_{v+h}(x,k)\varphi_v(x,k)\,dx\int_0^\infty h(x)\varphi_v(x,k) f_v(x,k)\,dx\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\omega^n(k) \qquad (2.18)$$

Оценки (2.13)-(2.15) вместе с $\|\omega(k)\|_{C(-\infty,\infty)} < 1/2$ дают (2.7). Лемма доказана.

<u>Доказательство теоремы 2.I</u>. Оценки (2.2) и (2.5) вытекают из (2.13)-(2.15). Из (2.8) следует неравенство

$$\sup_{\operatorname{Im} k\geq 0}|f_{v_1}(k) - f_{v_2}(k)| \leq \|v_1 - v_2\|_X \exp\{\|v_1\|_X + \|v_2\|_X\},$$

справедливое для любых двух потенциалов из X. Отсюда получаем, что если $v_j \in \Omega_v\ (j=1,2)$ и норма $\|v_1 - v_2\|_X$ достаточно мала, то справедливо неравенство

$$|f_{v_2}(k)| \geq |f_{v_1}(k)| - |f_{v_2}(k) - f_{v_1}(k)| \geq \min_{\operatorname{Im} k\geq 0}|f_{v_1}(k)| - \sup_{\operatorname{Im} k\geq 0}|f_{v_2}(k) - f_{v_1}(k)| > 0,$$

показывающее, что множество Ω_v открытое. Следовательно, для доказательства дифференцируемости оператора $\Phi(v)$ осталось проверить, что если $v \in \Omega_v$, то

$$\lim_{\|h\|_X\to 0}\frac{1}{\|h\|_X}\|\Phi(v+h) - \Phi(v) - \Phi'(v)h\|_{C(-\infty,\infty)} = 0;$$

где оператор $\Phi'(v)$ определяется (2.I). Но это равенство является лишь иной записью равенств (2.6), (2.7).

Для того чтобы найти вторую производную, рассмотрим при фиксированном $g \in X$ разность

$$\Phi'(v+h)g - \Phi'(v)g = \frac{1}{2ik}\int_0^\infty g(x)\{u_{v+h}^2(x,k) - u_v^2(x,k)\}\,dx. \qquad (2.19)$$

Подставляя в правую часть (2.19) разложение

$$u_{v+h}(x,k) = u_v(x,k) + \frac{1}{2ik}\left\{u_v(x,k)\int_0^x h(t) f_v(t,k) u_v(t,k)\,dt + f_v(x,k)\int_0^x h(t) u_v^2(t,k)\,dt\right\} + \dots,$$

которое является следствием разложений (2.8), (2.17), получаем после несложных выкладок искомое выражение (2.4). Теорема доказана.

<u>Замечание</u>. Очевидно, выражения (2.I) и (2.4) являются первой и второй производной оператора $\Phi(v)$ в любой точке $v \in X$, для которой $f_v(0) \neq 0$. В оценках (2.2) и (2.5) можно положить $m_v = \inf_{-\infty<k<\infty}|f_v(k)|$.

В заключении этого параграфе рассмотрим оператор

$$Q(v) = \delta_v(k), \quad -\infty<k<\infty, \qquad (2.20)$$

ставящий в соответствие каждому потенциалу $v(x) \in \Omega_v$ фазу рассеяния $\delta_v(k) = -2i\ln S_v(k)$. Из определения оператора $\Phi(v)$ (I.II) имеем $Q(v) = -2i\ln(1 - \Phi(v))$. Отсюда правило дифференцирования сложной функции и теорема 2.I дают сразу следующее утверждение:

Теорема 2.2. Оператор $Q(v)$ (2.20) с областью определения Ω_v (§ I) и областью значений в $C(-\infty,\infty)$ дважды непрерывно дифференцируем. Первая производная

$$Q'(v)h = 2i\,S_v^{-1}(k)\,\Phi'(v)h = k|f_v(k)|^{-2}\int_0^\infty h(x)\varphi_v^2(x,k)\,dx, \tag{2.21}$$

а вторая

$$Q''(v)(h,g) = 2i\,S_v^{-2}(k)\,\Phi'(v)h\,\Phi'(v)g - 2i\,S_v^{-1}(k)\,\Phi''(v)(h,g),$$

где $\Phi'(v)$ и $\Phi''(v)$ определяются (2.I), (2.4).

Отметим, что выражение (2.21) совпадает с ранее полученной в [I] методом фазовых функций производной оператора (2.20).

§ 3. Интегральные представления для $\varphi_v^2(x,k)$ и $f_v^2(x,k)$ и дифференциальные свойства оператора $\Psi(v)$

Основной целью настоящего параграфа является изучение дифференциальных свойств оператора $\Psi(v)$ (1.12). Так как из (I.I3) следует, что $\Psi(v)$ получается из $\Phi(v)$ (I.II) путем последовательного применения линейных операторов, не зависящих от v, то из теоремы 2.I и правила дифференцирования сложной функции вытекает, что оператор $\Psi(v)$ тоже дважды дифференцируем, притом

$$\Psi'(v)h = \frac{d}{dx}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_Z^+[\Phi'(v)h]\,e^{2ikx}\,dk,\ (0<x<\infty), \tag{3.I}$$

$$\Psi''(v)(g,h) = \frac{d}{dx}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_Z^+[\Phi''(v)(g,h)]\,e^{2ikx}\,dk,\ (0<x<\infty), \tag{3.2}$$

где $\Phi'(v)$ и $\Phi''(v)$ определяются (2.I), (2.4). Обоснование этой формальной выкладки дается теоремой 3.I. Доказательство строится с помощью некоторых интегральных представлений и построенных по ним операторов, полученных в первой части параграфа.

Напомним, что если $v(x)\in X$, то решения $\varphi_v(x,k)$ и $f_v(x,k)$ уравнения (0.I) представимы в виде [6,7]

$$\varphi_v(x,k) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x K(x,t)\,\frac{\sin kt}{k}\,dt, \tag{3.3}$$

$$f_v(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty L(x,t)\,e^{ikt}\,dt,\ (\operatorname{Im} k\ge 0), \tag{3.4}$$

где для ядер $K(x,t)$ и $L(x,t)$ справедливы оценки

$$|K(x,t)| \le \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |v(s)|\,ds\,\exp\Big\{\int_0^{\frac{x+t}{2}} s|v(s)|\,ds\Big\},\ (0\le t\le x), \tag{3.5}$$

$$|L(x,t)| \le \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} |v(s)|\,ds\,\exp\Big\{\int_x^\infty s|v(s)|\,ds\Big\},\ (x\le t<\infty), \tag{3.6}$$

а функция Йоста

$$f_v(k) = 1 + \int_0^\infty L(x)e^{ikx}\,dx,\quad \int_0^\infty |L(x)|\,dx<\infty. \tag{3.7}$$

Кроме того, если $v(x)\in\Omega_v$, то [8]

$$f_v^{-1}(k) = 1 + \int_0^\infty K(x)\,e^{ikx}\,dx,\quad \int_0^\infty |K(x)|\,dx<\infty. \tag{3.8}$$

Из (3.3) и (3.4) и теоремы о свертке, получаем для квадратов решений $\varphi_v(x,k)$ и $f_v(x,k)$ представления

$$\varphi_v^2(x,k)=\int_0^x M(x,t)\frac{\sin 2kt}{k}\,dt, \tag{3.9}$$

$$f_v^2(x,k)=e^{2ikx}+\int_x^\infty N(x,t)e^{2ikt}\,dt, \tag{3.10}$$

где ядра $M(x,t)$ и $N(x,t)$ выражаются через ядра $K(x,t)$ и $L(x,t)$ формулами

$$M(x,t)=1+2\int_{|x-2t|}^x K(x,s)\,ds+8\int_0^{\min(t,t-x)}d\alpha\int_{\alpha+t}^x K(x,\beta)K(x,\beta-2\alpha)\,d\beta, \quad (0\le t\le x), \tag{3.11}$$

$$N(x,t)=4L(x,2t-x)+2\int_x^{2t-x}L(x,s)L(x,2t-s)\,ds, \quad (x\le t<\infty). \tag{3.12}$$

Отметим, что из (3.11) следует

$$M(x,0)=M(x,x)=1, \qquad 0\le x<\infty. \tag{3.13}$$

Из (3.7) и (3.8) вытекают представления

$$f_v^2(k)=1+\int_0^\infty \Pi(x)e^{2ikx}\,dx, \quad \int_0^\infty|\Pi(x)|\,dx<\infty, \tag{3.14}$$

$$f_v^{-2}(k)=1+\int_0^\infty \Gamma(x)e^{2ikx}\,dx, \quad \int_0^\infty|\Gamma(x)|\,dx<\infty. \tag{3.15}$$

Приведем некоторые оценки, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть

$$\tau(x)=\int_0^x|v(s)|\,ds, \quad \sigma(x)=\int_x^\infty|v(s)|\,ds, \quad \sigma_1(x)=\int_x^\infty\sigma(t)\,dt. \tag{3.16}$$

Отметим, что $\sigma_1(x)\le\int_x^\infty t|v(t)|\,dt\le\|v\|_X$.

Из (3.5) и (3.6) получаем для ядер $M(x,t)$ и $N(x,t)$ оценки (с некоторой постоянной $C>0$)

$$|M(x,t)|\le C[\tau(x)+\tau^2(x)]\le C[\|v\|_X+\|v\|_X^2], \quad (0\le t\le x), \tag{3.17}$$

$$|N(x,t)|\le C\Big\{\sigma(t)+\int_x^t\sigma(u)\sigma(x+t-u)\,du\Big\}, \quad (x\le t<\infty). \tag{3.18}$$

Из последней оценки следует, что

$$\int_x^\infty|N(x,t)|\,dt\le C[\sigma_1(x)+\sigma_1^2(x)]\le C[\|v\|_X+\|v\|_X^2]. \tag{3.19}$$

Дифференцируя обе стороны (3.11) по t и заменяя t на x и x на t, получаем

$$P(x,t)\equiv M'_x(t,x)=\operatorname{sign}(t-2x)\,K\Big(\frac{t}{2},\frac{|t-2x|}{2}\Big)+\int_x^t K\Big(\frac{t}{2},\frac{u}{2}\Big)K\Big(\frac{t}{2},\frac{|u-2x|}{2}\Big)\operatorname{sign}(u-2x)\,du, \quad (x\le t<\infty). \tag{3.20}$$

Оценка (3.5) дает

$$|P(x,t)|\le\frac{1}{2}\int_{\min(\frac{t-x}{2},\frac{x}{2})}^{t/2}|v(s)|\,ds\; e^{\tau(\frac{t}{2})}+\int_{\min(\frac{t-x}{4},\frac{x}{2})}^{t/2}|v(s)|\,ds\;\tau\Big(\frac{t}{2}\Big)e^{2\tau(\frac{t}{2})}, \quad (x\le t<\infty),$$

из которой вытекает, что

$$\int_0^t|P(x,t)|\,dx\le 2\tau\Big(\frac{t}{2}\Big)e^{\tau(\frac{t}{2})}\Big\{1+3\tau\Big(\frac{t}{2}\Big)e^{\tau(\frac{t}{2})}\Big\}, \quad 0\le t<\infty$$

и

$$\sup_{0\le t<\infty}\int_0^t|P(x,t)|\,dx\le 2\|v\|_X e^{\|v\|_X}\Big\{1+3\|v\|_X e^{\|v\|_X}\Big\}. \tag{3.21}$$

Определим в пространстве X оператор интегрирования J со значениями в пространстве Y_+ по формуле

$$Jf(x)=-\int_x^\infty f(t)\,dt, \quad (0<x<\infty). \tag{3.22}$$

В пространстве Y_+ введем оператор дифференцирования

$$Df(x) = f'(x), \quad 0 < x < \infty. \tag{3.23}$$

Областью значения D является пространство X. Очевидно, для любых $f(x) \in X$ и $g(x) \in Y_+$ справедливы равенства

$$DJf(x) = f(x), \quad JDg(x) = g(x)$$

и

$$\| Jf \|_{Y_+} = \| f \|_X, \quad \| Dg \|_X = \| g \|_{Y_+}$$

По ядру $M(x,t)$ (3.II) построим операторы

$$Af = -\int_x^\infty M(t,x) f(t)\,dt, \quad (0 < x < \infty) \tag{3.24}$$

и

$$(I+P)f = DAf = f(x) - \int_x^\infty P(x,t) f(t)\,dt, \quad (0 < x < \infty), \tag{3.25}$$

где $P(x,t)$ определяется (3.20). В правой части (3.25) учтено (3.I3).

<u>Лемма 3.I.</u> Оператор P, действующий из X в X, является ограниченным оператором с нормой

$$\| Pf \|_X \le 2\|\upsilon\|_X e^{\|\upsilon\|_X} \{ 1 + 3\|\upsilon\|_X e^{\|\upsilon\|_X} \} \| f \|_X. \tag{3.26}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $f \in X$, тогда

$$\int_0^\infty x\,dx \int_x^\infty |P(x,t) f(t)|\,dt = \int_0^\infty |f(t)|\,dt \int_0^t x|P(x,t)|\,dx \le \sup_t \int_0^t |P(x,t)|\,dx \, \|f\|_X,$$

что вместе с (3.2I) дает (3.26). Лемма доказана.

<u>Следствие I</u>. Оператор A (3.24) с областью определения X имеет область значений в Y_+ и

$$\| Af \|_{Y_+} \le 2\|\upsilon\|_X e^{\|\upsilon\|_X} \{ 1 + 3\|\upsilon\|_X e^{\|\upsilon\|_X} \} \| f \|_X.$$

Построим по ядру $N(x,t)$ (3.I2) операторы

$$(I+F)f = f(x) + \int_x^\infty N(x,t) f(t)\,dt, \quad (0 < x < \infty) \tag{3.27}$$

и

$$(I+G)f = D(I+F)Jf. \tag{3.28}$$

<u>Лемма 3.2</u>. Операторы F и G являются ограниченными операторами, первый – как оператор из Y_+ в Y_+, а второй – как оператор из X в X, притом

$$\| Ff \|_{Y_+} \le \{ \tfrac{1}{2}\|\upsilon\|_X + 6\|\upsilon\|_X e^{\|\upsilon\|_X} + \|\upsilon\|_X^2 e^{2\|\upsilon\|_X} \} \| f \|_{Y_+}, \tag{3.29}$$

$$\| Gf \|_X \le \{ \tfrac{1}{2}\|\upsilon\|_X + 6\|\upsilon\|_X e^{\|\upsilon\|_X} + \|\upsilon\|_X^2 e^{2\|\upsilon\|_X} \} \| f \|_X. \tag{3.30}$$

<u>Доказательство</u>: Так как для любой $f \in Y_+$

$$\| Ff \|_{Y_+} = \| FJf' \|_{Y_+} = \| DFJf' \|_X = \| Gf' \|_X \le \| G \|_X \| f' \|_X = \| G \|_X \| f \|_{Y_+},$$

то достаточно доказать (3.30). Пусть $f \in X$, тогда из определения (3.28) оператора G получаем при $x > 0$

$$Gf = -\frac{d}{dx} \int_x^\infty N(x,t) \Big\{ \int_t^\infty f(s)\,ds \Big\} dt =$$

$$= -\int_x^\infty \Big\{ N(x,x) - \int_x^t N'_x(x,\xi)\,d\xi \Big\} f(t)\,dt.$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражение (3.I2) для $N(x,t)$ с помощью оценки (3.6) и оценки /3/

$$\left| \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_j} + \frac{1}{4}\upsilon\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \right| \le \frac{1}{2}\sigma(x_1)\sigma\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) e^{\sigma_1(x_1)} \tag{3.30'}$$

после несложной выкладки приходим к (3.30). Лемма доказана.

Лемма 3.3. Построенный по функции $\Gamma(x)$ (3.15) оператор

$$(I+\Gamma)f = f(x) + \int_x^\infty \Gamma(t-x) f(t)\,dt\,, \qquad (3.31)$$

действующий из пространства X в X, либо из Y в Y, ограничен и имеет ограниченный обратный

$$(I+\Gamma)^{-1} f = (I+\Pi)f = f(x) + \int_x^\infty \Pi(t-x) f(t)\,dt\,, \qquad (3.32)$$

где ядро $\Pi(x)$ определяется (3.14). Справедливы оценки

$$\|(I+\Gamma)f\|_{X(Y)} \le \{1 + \|\Gamma\|_{L^1(0,\infty)}\}\,\|f\|_{X(Y)}\,, \qquad (3.33)$$

$$\|(I+\Pi)f\|_{X(Y)} \le \{1 + \|\Pi\|_{L^1(0,\infty)}\}\,\|f\|_{X(Y)} \qquad (3.34)$$

Доказательство: Обратимость оператора $I+\Gamma$ вытекает из известных теорем об интегральных уравнениях с разностным ядром[9]. Для того чтобы доказать оценки (3.33) и (3.34), достаточно отметить, что если $f(x) \in X(Y)$, то $\int_x^\infty \Gamma(t-x) f(t)\,dt = \int_0^\infty \Gamma(t) f(t+x)\,dt$, откуда следует, что операторы D и Γ коммутируют и $\|\int_x^\infty \Gamma(t-x) f(t)\,dt\|_{X(Y)} \le \|\Gamma\|_{L^1} \|f\|_{X(Y)}$. Лемма доказана.

Теорема 3.I. Оператор $\Psi(v)$ (I.12) дважды непрерывно дифференцируем в любой точке $v \in \Omega_v$. Первая производная по Фреше дается ограниченным обратимым оператором:

$$\Psi'(v)h = (I+\Gamma)(I+P)h\,, \quad h \in X\,. \qquad (3.35)$$

Обратный оператор является тоже ограниченным и имеет вид:

$$[\Psi'(v)]^{-1} h = (I+G)h\,, \quad h \in X\,. \qquad (3.36)$$

Операторы Γ, P и G определяются формулами (3.31), (3.25) и (3.28).

Доказательство: Из представления (3.9) следует, что для любого $h(x) \in X$ справедливо тождество

$$2ik\int_0^\infty h(x)\varphi_v^2(x,k)\,dx = 2ik\int_0^\infty h(x)\,dx \int_0^x M(x,t)\frac{\sin 2kt}{k}\,dt =$$
$$= 2i\int_0^\infty \sin 2kt\,dt \int_t^\infty M(x,t)h(x)\,dx = -\int_{-\infty}^\infty e^{-2ikt}\,dt \int_{|t|}^\infty M(x,t)h(x)\,dx\,, \qquad (3.37)$$

где ядро $M(x,t)$ в последнем интеграле продолжено по t нечетным образом. Возможность замены порядка интегрирования в (3.37) для $h \in X$ вытекает из оценки (3.17). Обозначим

$$H(x) = -\int_{|x|}^\infty M(t,x)h(t)\,dt\,, \qquad M(x,-t) = -M(x,t)\,, \qquad (3.38)$$

тогда при $x>0$ из следствия I леммы 3.I получаем $DH(x) = (I+P)h \in X$, что вместе с оценкой (3.17), из которой следует $H(x) \in L^1(-\infty,\infty)$, дает $H(x) \in Y$. Из тождества (3.37) и представления (3.15) находим следующую форму записи для оператора $\Phi'(v)$ (2.I)

$$\Phi'(v)h = \int_{-\infty}^\infty \{(I+\Gamma)H(x)\}\,e^{-2ikx}\,dx\,. \qquad (3.39)$$

вместе с $H(x) \in Y$ и леммы 3.3 дает $\Phi'(v)h \in Z$ для любого $h \in X$. Вычитая единицы из обеих сторон (2.6), получаем, с учетом (I.II) и (3.39), представление

$$\omega(v,h,k) = \int_{-\infty}^\infty \{2F_{v+h}(2x) - 2F_v(2x) - (I+\Gamma)H(x)\}\,e^{-2ikx}\,dx \qquad (3.40)$$

Так как все подынтегральные члены принадлежат Y, то отсюда следует, что $\omega(v,h,k) \in Z$ при всех достаточно малых по норме $h(x) \in X$. Пользуясь интегральными преобразованиями и соответствующими оценками, полученными в начале этого параграфа, нетрудно вывести из представления (2.18), что $\|\omega(v,h,k)\|_Z =$

$= O(\|h\|^2_X)$, т.е., если обозначить

$$\omega(v,h,k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(v,h;x) e^{-2ikx} dx, \qquad (3.4I)$$

то

$$\|D\Omega(v,h,x)\|_X \le \|\Omega(v,h;x)\|_Y = O(\|h\|^2_X). \qquad (3.42)$$

Сравнивая (3.40) и Э3.4I), получаем

$$2F_{v+h}(2x) - 2F_v(2x) - (I+\Gamma)H(x) = \Omega(v,h;x), \ (-\infty<x<\infty).$$

Продифференцируем обе части по x при $x>0$, с учетом (3.24) и (3.25), имеем следующее равенство, справедливое для всех $h(x)$ из достаточно малой окрестности точки $v \in \Omega_v$

$$4F'_{v+h}(2x) - 4F'_v(2x) - (I+\Gamma)(I+P)h(x) = D\Omega(v,h;x). \qquad (3.43)$$

Здесь использовано, что операторы D (3.23) и $I+\Gamma$ (3.3I) коммутируют. Вспоминая определение оператора $\Psi(v)$ (I.I2), последнее равенство запишем в виде

$$\Psi(v+h) - \Psi(v) - (I+\Gamma)(I+P)h = D\Omega(v,h;x),$$

что вместе с оценкой (3.42) дает

$$\|h\|^{-1}_X \|\Psi(v+h) - \Psi(v) - (I+\Gamma)(I+P)h\|_X = O(\|h\|_X). \qquad (3.44)$$

Из лемм 3.I и 3.3 следует, что оператор $(I+\Gamma)(I+P)$ в (3.44) является ограниченным оператором из X в X. Следовательно, (3.44) показывает, что оператор $\Psi(v)$ дифференцируем в точке $v \in \Omega_v$, и его производной является (3.35). Доказательство обратимости этого оператора и (3.36) вытекают из доказанной в следующем параграфе теоремы 4.I. (см. (4.6)). Теорема доказана.

§ 4. Формулы обращения

Основным содержанием этого параграфа является доказательство следующей теоремы 4.I о полноте квадратов решений краевой задачи (0.I)-(0.2) в случае отсутствия собственных чисел. Полнота квадратов решений задачи Штурма-Лиувилля на конечном интервале была доказана Б.М. Левитаном[6].

Теорема 4.I. Пусть $v(x) \in \Omega_v$ и $\varphi_v(x,k)$ – решение (0.5) уравнения (0.I), тогда уравнение

$$k\int_0^{\infty} h(x)\varphi_v^2(x,k)\,dx = F(k), \quad -\infty<k<\infty, \qquad (4.I)$$

с любой правой частью вида

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(x)\sin 2kx\,dx, \quad f(x) \in Y_+ \qquad (4.2)$$

имеет единственное решение $h(x) \in X$, которое дается формулой

$$h(x) = \frac{d}{dx}\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\frac{f_v^2(x,k)}{f_v^2(k)}\,dk, \quad 0<x<\infty, \qquad (4.3)$$

где $f_v(x,k)$ и $f_v(k)$ определяются (0.4), (0.6).

Покажем сначала, что эта теорема допускает следующую эквивалентную формулировку.

Теорема 4.I'. Пусть операторы P, G и Γ построены по $v(x) \in \Omega_v$ формулами (3.25), (3.28), (3.3I), тогда в пространстве X (§ I) справедливы тождества

$$(I+G)(I+\Gamma)(I+P) = I, \qquad (4.4)$$

$$(I+P)(I+\dot G)(I+\Gamma) = I \qquad (4.5)$$

и отсюда

$$\left[(I+\Gamma)(I+P)\right]^{-1}=I+G. \qquad (4.6)$$

<u>Доказательство</u>: Из (3.37) и определения оператора $I+P$ (3.25) следует, что уравнение (4.I) эквивалентно интегральному уравнению Волтера второго рода

$$(I+P)h=g\ , \quad g(x)=f'(x)\in X. \qquad (4.7)$$

Запишем в операторной форме равенство (4.3). Из (3.I0), (3.I5) и теоремы о свертке получаем, что для любой функции $F(k)$ вида (4.2) справедливо тождество

$$-\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)f_v^{-2}(k)f_v^{2}(x,k)\,dk=-\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}(I+\Gamma)f(x)e^{-2ikx}dx\Big\}\times$$
$$\times\Big\{e^{2ikx}+\int_x^{\infty}N(x,t)e^{2ikt}dt\Big\}dk=(I+F)(I+\Gamma)f\ ,\ 0<x<\infty, \qquad (4.8)$$

где операторы $I+F$ и $I+\Gamma$ определяются (3.27), (3.3I). Отметим, что здесь можно применить формулу обращения для интегралов Фурье, так как из леммы 3.3 вытекает, что функция $(I+\Gamma)f(x)$ абсолютно непрерывна при $x>0$. Замена порядка интегрирования оправдывается обычным образом с помощью оценок, полученных в § 3.

Последнее равенство показывает, что (4.3) эквивалентно равенству

$$h(x)=D(I+F)(I+\Gamma)f(x),\qquad f\in Y_+.$$

Подставляя в правую часть $f(x)=JDf(x)$ и учитывая, что $J(I+\Gamma)=(I+\Gamma)J$, имеем

$$h(x)=(I+G)(I+\Gamma)g(x),\quad g(x)=f'(x)\in X. \qquad (4.9)$$

Сравнивая (4.7) и (4.9), получаем (4.4), (4.5), что вместе с обратимостью $I+\Gamma$ (лемма 3.3) дает и (4.6). Теорема доказана.

<u>Доказательство теоремы 4.I</u>. Из леммы I.I вытекает, что оператор $\Psi(v)$ (I,II) на множестве Ω_v имеет обратный $\chi=\Psi^{-1}$, определенный на множестве $\Omega_\chi=\Psi(\Omega_v)\subset X$. Следовательно, для любых $v\in\Omega_v$ и $f\in\Omega_\chi$ выполнены равенства $\chi(\Psi(v))=v$ и $\Psi(\chi(f))=f$. Отсюда в предположении, что оператор χ сильно дифференцируем, и уже доказанной в теореме 3.I дифференцируемости Ψ, получаем для любых $v\in\Omega_v$ и $f=\Psi(v)$ равенства

$$\chi'(f)\Psi'(v)h=h\ ,\quad \Psi'(v)\chi'(f)h=h\ ,\quad h\in X, \qquad (4.10)$$

т.е. $\chi'(f)=[\Psi'(v)]^{-1},(f=\Psi(v))$. Таким образом, остается найти оператор χ'. Ниже ограничимся нахождением (слабой) производной по Гато оператора χ, а равенства (4.I0) проверим непосредственно.

Получим сначала с помощью уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко разложение разности потенциалов $v_2(x)-v_1(x)$ посредством разности $\Psi(v_2)-\Psi(v_1)$. Рассмотрим две краевые задачи (0.I), (0.2) с потенциалами v_j $(j=1,2)$ из Ω_v. Пусть $K_{1,2}(x,y)$ – ядро оператора преобразования

$$f_{v_2}(x,k)=f_{v_1}(x,k)+\int_x^{\infty}K_{1,2}(x,t)f_{v_1}(t,k)\,dt, \qquad (4.11)$$

где $f_{v_j}(x,k)$, $(j=1,2)$ определяется (0.4), и пусть по функциям рассеяния $S_{v_j}(k)$ $(j=1,2)$ построена функция

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_{v_1}(k)-S_{v_2}(k)\}f_{v_1}(x,k)f_{v_1}(y,k)\,dk. \qquad (4.12)$$

Тогда из равенства Парсеваля для граничной задачи (0.I), (0.2) с v_j $(j=1,2)\in\Omega_v$ следует тождество /3/

$$K_{1,2}(x,y)+f(x,y)+\int_x^{\infty}K_{1,2}(x,t)f(t,y)\,dt=0,(x<y) \qquad (4.13)$$

Отсюда, учитывая, что $-2\,{}^{d}\!/_{dx} K_{12}(x,x) = v_2(x) - v_1(x)$, получаем при $x=y$ следующее представление для разности любых двух потенциалов из Ω_v (§ I):

$$v_2(x) - v_1(x) = 2\frac{d}{dx} f(x,x) + 2\frac{d}{dx}\int_x^\infty K_{12}(x,t) f(t,x)\,dt. \qquad (4.14)$$

Из представления (I.9) для $S_{v_j}(k)\ (j=1,2)$ и (3.4) для $f_v(x,k)$ получаем для $f(x,y)$ (4.13) выражение

$$f(x,y) = F_{12}(x+y) + \int_{x+y}^\infty L(x,y;t) F_{12}(t)\,dt, \qquad (4.15)$$

где

$$F_{12}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \{S_{v_1}(k) - S_{v_2}(k)\} e^{ikx}\, dk \in Y, \qquad (4.16)$$

$$L(x,y;t) = L(x,t-y) + L(y,t-x) + \int_x^{t-y} L(x,s)L(y,t-s)\,ds. \qquad (4.17)$$

Рассматривая (4.13) при фиксированном x как уравнение относительно $K_{12}(x,y), (x\le y<\infty)$, получаем из оценок (3.6), (3.30′) что при любом $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $\|F_{12}(x)\|_{Y_+} < \delta$, то $\|v_1 - v_2\|_X < \varepsilon$ и

$$v_2(x) - v_1(x) = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{d}{dx} F_n(x), \quad (0<x<\infty), \qquad (4.18)$$

где ряд сходится по норме пространства X, а его члены определяются по функции $f(x,y)$ (4.15)-(4.17) формулами

$$F_0(x) = f(x,x), \quad F_1(x) = \int_x^\infty f(x,t_1) f(t_1,x)\,dt_1,$$
$$F_n(x) = \int_x^\infty f(x,t_n)\,dt_n \int_x^\infty f(t_n,t_{n-1})\,dt_{n-1}\cdots\int_x^\infty f(t_2,t_1)f(t_1,x)\,dt_1, \quad (n=2,3,\ldots). \qquad (4.19)$$

Пусть теперь в (4.18) потенциал $v_1(x) = v(x) \in \Omega_v$ фиксирован, $h(x)$ – произвольный элемент из X и $v_2(x) = v(x) + t h(x)$, где t – вещественный параметр. Тогда при всех достаточно малых t для разности $S_{v+th}(k) - S_v(k)$ справедливо разложение (2.6) ($h(x) \to t h(x)$). Подставляя его в правую часть (4.18) и дифференцируя полученное разложение один раз по t, получаем при $t=0$ тождество

$$h(x) = \frac{d}{dx}\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\Big\{k\int_0^\infty h(t)\varphi_v^2(t,k)\,dt\Big\}\frac{f_v^2(x,k)}{f_v^2(k)}\,dk, \qquad (4.20)$$

справедливое для любого $h(x)\in X$. Аналогично, подставляя разложение (4.18) в правую часть (2.6), полагая в так полученном равенстве

$$S_{v_1} = S_v = \exp\{-2i\delta_v(k)\}, \quad S_{v_2} = \exp\Big\{-2i\Big(\delta_v(k) + t\frac{\gamma(k)}{|f_v(k)|^2}\Big)\Big\}, \qquad (4.21)$$

где $\gamma(k) = \int_0^\infty f(x)\sin 2kx\,dx$, $f\in Y_+$, и дифференцируя по t, находим при $t=0$ тождество

$$\gamma(k) = k\int_0^\infty\Big\{\frac{d}{dx}\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \gamma(\varkappa)\frac{f_v^2(x,\varkappa)}{f_v^2(\varkappa)}\,d\varkappa\Big\}\varphi_v^2(x,k)\,dx, \qquad (4.22)$$

где $f_v(k) = |f_v(k)|\exp\{i\delta_v(k)\}$. Комбинируя тождества (3.37), (4.8) и (4.9), получаем, что (4.20), (4.22) эквивалентны (4.4), (4.5). Теорема доказана.

Следствие I. Пусть операторы P_Z^+ и $\Phi'(v)$ определены (I.6), (2.I), тогда уравнение

$$P_Z^+[\Phi'(v)h] = \int_0^\infty f(x)e^{-2ikx}\,dx, \quad f(x)\in Y_+ \qquad (4.23)$$

имеет единственное решение

$$h(x) = (I+G)Df(x) = [\Psi'(v)]^{-1}Df(x) \in X. \qquad (4.24)$$

Доказательство: Из представления (3.39) следует, что уравнение (4.23) эквивалентно уравнению

$$(I+\Gamma)Ah = f \quad , \quad f \in Y_+,$$

где операторы A и Γ определяются (3.24), (3.3I).

Следовательно, в силу (3.32), $Ah=(I+\Pi)f$, а отсюда $(I+P)h=(I+\Pi)D\dot{f}$, что вместе с (4.5) дает (4.24).

§ 5. Восстановление потенциала по $S(k)$ и начальному приближению

Теорема 5.I. Пусть задана функция $S_*(k)$, принадлежащая множеству Ω_S (§ I), тогда всегда существует начальное приближение $v_0(x) \in \Omega_v$, такое, что последовательность

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) - \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_*(k)-S_n(k)\}f^2_{v_0}(x,k)dk, \quad (n=0,1,\ldots) \qquad (5.I)$$

где $f_{v_0}(x,k)$ решение (0.4) уравнения (0.I) с $v(x)=v_0(x)$, а $S_{v_n}(k)$ определяются по $v_n(x)$ формулой (0.7), сходится по норме пространства X (§ I) к потенциалу $v_*(x) \in \Omega_v$ для которого функция рассеяния $S_{v_*}(k)$ равна заданной функции $S_*(k)$.

Доказательство. Построим в Ω_v оператор

$$Q(v) = -\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_v(k)-S_*(k)\}e^{2ikx}dk, \quad 0<x<\infty, \qquad (5.2)$$

где $S_*(k)$ – заданная функция из Ω_S , а $S_v(k)$ определяется (0.7). Так как функции $S_v(k)$ и $S_*(k)$ принадлежат Ω_S (первая, по определению, а вторая по условию теоремы), то разность $S_v - S_* \in Z$ (§ I). Следовательно, область значения оператора $Q(v)$ содержится в пространстве X .

Из определения оператора $\tilde{\Psi}(v)$ (I.I2) получаем для $Q(v)$ представление

$$Q(v) = \tilde{\Psi}(v) - 4F'_*(2x) = 4\{F'_v(2x) - F'_*(2x)\}, \qquad (5.3),$$

где $4F'_*(2x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-S_*(k))e^{2ikx}dk, \ (0<x<\infty).$

Доказательство теоремы проведем, применяя модифицированный метод Ньютона-Канторовича [2] к операторному уравнению

$$Q(v) = 0 \qquad (5.4)$$

Покажем сначала, что последовательность $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ (5.I) совпадает с последовательностью

$$v_{n+1} = v_n - [Q'(v_0)]^{-1}Q(v_n), \quad n=0,1,2\ldots, \qquad (5.5)$$

которая получается, если применить названный метод к решению уравнения (5.4). Отметим, что из леммы I.I вытекает, что (5.4) имеет в пространстве X единственное решение $v_* \in \Omega_v$, для которого $S_{v_*}(k) = S_*(k)$. Из этого замечания следует, что $Q(v)$ представим в виде

$$Q(v) = \tilde{\Psi}(v) - \tilde{\Psi}(v_*). \qquad (5.6)$$

Остается доказать лишь сходимость последовательности $v_n(x)$ к этому решению.

Так как $\tilde{\Psi}(v_*)$ – фиксированный элемент из X , то

$$Q'(v) = \Psi'(v), \quad Q''(v) = \tilde{\Psi}''(v). \qquad (5.7)$$

Следовательно, последовательность (5.5) приводится к виду

$$v_{n+1} = v_n - [\tilde{\Psi}'(v_0)]^{-1}Q(v_n), \quad n=0,1,\ldots \qquad (5.8)$$

где оператор $[\Psi'(v_0)]^{-1}$ дается (3.35). Отсюда и равенство

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_*(k)-S_{v_n}(k)\}f_{v_0}^2(x,k)\,dk=[I+G(v_0)]Q(v_n), \quad (5.9)$$

которое вытекает из определения операторов G (3,28) и $Q(v)$ (5.6), получаем, что (5.I) есть лишь иная запись (5.8). Из теоремы 3.I следует, что в окрестности каждой точки $v\in\Omega_v$ норма $\|[\Psi'(v)]^{-1}\|_X$ ограничена (см. также оценку (3.30), что вместе с ограниченностью второй производной $\Psi''(v)$ и непрерывностью самого оператора $\Psi(v)$ показывает, в силу (5.6) и (5.7), что за счет выбора начального приближения $v_0\in\Omega_v$ достаточно близко к искомому потенциалу v_* (Ω_v– открытое), всегда можно обеспечить сходимость последовательности $v_n(x)$ (5.I) к $v_*(x)$ (см./2/) теоремы 6 (I,ХУШ) и 5(2,УШ). Эти условия обеспечивают также сжимаемость оператора (5.8) в некоторой окрестности начального приближения $v_0(x)$. Это со своей стороны приводит к тому, что $v_n\in\Omega_v$ для всех n =0,I,2... ($v_0\in\Omega_v$ по построению). Следовательно, функции рассеяния $S_{v_n}(k)$ $(n=0,1,2..)$ принадлежат Ω_S, откуда вместе с $S_*\in\Omega_S$ и $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=v_*$ получаем,в силу леммы I.I, что функция рассеяния $S_{v_*}(k)$ совпадает с заданной $S_*(k)$. Теорема доказана.

<u>Следствие I</u>. При условиях теоремы 5,1 последовательность

$$v_{n+1}(x)=v_n(x)-\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_*(k)-S_{v_n}(k)\}f_{v_n}^2(x,k)\,dk, \quad (5.10)$$

где $v_0(x)$ – начальное приближение, а $S_{v_n}(k)$ $(n=0,1,..)$ определяются по $v_n(x)$ формулами (0.4), (0.7), сходится к потенциалу $v_*(x)\in\Omega_v$, для которого $S_{v_*}(k)=S_*(k)$

<u>Доказательство</u> вытекает из условия сходимости основного процесса Ньютона (/2/, теорема 5 (I.ХУШ)).

<u>Следствие 2</u>. Для любой функции $S_*\in\Omega_S$ существует в Ω_v сфера $U:\|v-v_*\|_X\le\varepsilon$, такая, что инерационные процессы (5.I) и (5.10) сходятся к v_* для любого начального приближения $v_0\in U$,

<u>Доказательство</u> следует из теоремы об устойчивости процесса Ньютона (/2/, теорема 3 (2,ХУШ)).

Рассмотрим в заключении параграфа непрерывный аналог/10/ итерационного процесса Ньютона-Канторовича для решения обратной задачи рассеяния,изложенный в теореме 5.I и следствии I. Из теоремы о сходимости непрерывного аналога метода Ньютона при условии существования изолированного решения уравнения (5.4)/11/ и теоремы 5.I следует утверждение.

<u>Теорема 5.2.</u> Пусть $S_*(k)\in\Omega_S$ и $v_*\in\Omega_v$ – решение уравнения (5.4), тогда в Ω_v существует сфера $U:\|v-v_*\|\le\varepsilon$, такая что дифференциально уравнение в пространстве X

$$\frac{dv}{dt}=-(I+G(v))Q(v)\equiv-[\Psi'(v)]^{-1}Q(v), \quad 0\le t<\infty, \quad (5.11)$$

где $G(v)$, $Q(v)$ определяются (3.28), (5.6), с начальным условием $v(0)=v_0\in U$ имеет решение $v(t)\in\Omega_v$, $(0\le t<\infty)$, для которого $\lim\limits_{t\to\infty}\|v(t)-v_*\|_X=0$.

<u>Замечание</u>. Из (5.10) следует, что уравнение (5.11) можно записать в виде

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_*(k)-S_{v(t)}(k)\}f_{v(t)}^2(x,k)\,dk, \quad (5.12)$$
$$(0\le t<\infty).$$

§ 6. Результаты численных экспериментов на ЭВМ

Здесь на основе работ /I/ и утверждении предыдущих параграфов предложена расчетная схема восстановления потенциала по фазе рассеяния. Счет велся на ЭВМ СДС-6000. Пусть $\delta_*(k)$ – фаза рассеяния некоторой функции $S_*(k) \in \Omega_S$, определяемой по последней формуле

$$\delta_*(k) = -2i \ln S_*(k), \quad -\infty < k < \infty. \qquad (6.I)$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$R(v) \equiv Q(v) - \delta_*(k) = 0, \qquad (6.2)$$

где оператор $Q(v)$ определяется (2.2I). Применяя модифицированный метод Ньютона /2/ к решению (6.2), приходим с учетом (2.22) к уравнению,

$$\frac{k}{|f_{v_0}(k)|^2} \int_0^\infty h_n(x) \varphi_{v_0}^2(x,k)\,dx = -(\delta_{v_n}(k) - \delta_*(k)), \qquad (6.3)$$

где $v_0(x)$ – начальное приближение, а $v_n(x)$ при $n = 1, 2, \ldots$ определяется формулой

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) + h_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (6.4)$$

где $h_n(x), (n = 0, 1, \ldots)$ – решение уравнения (6.3). Из тождества (3.37) получаем, что уравнение (6.3) эквивалентно уравнению Волтера первого рода

$$\int_x^\infty M(t,x) h_n(t)\,dt = -\frac{8}{2\pi} \int_0^\infty |f_{v_0}(k)|^2 (\delta_{v_n}(k) - \delta_*(k)) \times \sin 2kx\,dk. \qquad (6.5)$$

Сходимость интеграла в правой части (6.5) обеспечим за счет выбора начального приближения v_0. Для этого отметим, что если $v(x) \in L^1(0,\infty)$, то фаза рассеяния $\delta_v(k)$ при $k \to +\infty$ имеет асимптотику /I2/

$$\delta_v(k) = \frac{1}{2k} \int_0^\infty v(x)\,dx + o\left(\frac{1}{k}\right). \qquad (6.6)$$

Отсюда начальное приближение $v_0(x)$ выберем из условия

$$\int_0^\infty v_0(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} 2k\,\delta_*(k), \qquad (6.7)$$

где предел справа существует, если искомый потенциал $v_* \in L^1(0,\infty)$. Так выбранное $v_0(x)$ обеспечивает абсолютную сходимость в силу (6.6), интеграла в правой части (6.5) при $n = 0$. Полагая $x = 0$ в (6.5), получаем с учетом (3.I3), что $\int_0^\infty h_0(x)\,dx = 0$, что вместе с (6.4) дает

$$\int_0^\infty v_1(x)\,dx = \int_0^\infty v_0(x)\,dx. \qquad (6.8)$$

Следовательно, если (6.7) выполняется для $v_0(x)$, то выполняется и для всех следующих приближений $v_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Дифференцируя по x обе стороны (6.5), с учетом (3.I5), получаем, для h_n, $n = 0, 1, \ldots$ интегральное уравнение Волтера второго рода

$$h_n(x) - \int_x^\infty P_{v_0}(x,t) h_n(t)\,dt = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty |f_{v_0}(k)|^2 k \{\delta_{v_n}(k) - \delta_*(k)\} \cos 2kx\,dk, \qquad (6.9)$$

где $P_{v_0}(x,t)$ дается (3.20), а сходимость интеграла справа в (6.9) можно оправдать с помощью асимптотики (6.6). При численном счете сначала по $v_n(x)$ находим фазовую функцию

$$\delta'_{v_n}(x,k) = \frac{1}{k} v_n(x) \sin^2(kx - \delta_{v_n}(x,k)), \quad \delta_{v_n}(0,k) = 0. \qquad (6.10)$$

Тогда[12]

$$\delta_{v_n}(k) = \lim_{x\to\infty} \delta_{v_n}(x,k), \quad \delta_{v_n}(0) = 0, \qquad (6.11)$$

а

$$|f_{v_0}(k)|^2 = \exp\left\{ \frac{1}{k} \int_0^\infty v_0(x) \sin(2kx - 2\delta_{v_0}(x,k))\,dx \right\}. \qquad (6.12)$$

Ядро $P_{v_0}(x,t)$ уравнения (6.9) определяем по (3.20), где $K_{v_0}(x,t)$ находим из уравнения

$$K_{v_0}(x,t) = \frac{1}{2} \int_{(x-t)/2}^{(x+t)/2} v_0(s)\,ds + \int_{(x-t)/2}^{(x+t)/2} ds \int_0^{(x-t)/2} v_0(s+\xi) K_{v_0}(s+\xi, s-\xi)\,d\xi, \qquad (6.13)$$

которое решается методом последовательных приближений[3]. Для вычисления правой части (6.9) применяем метод регуляризации, аналогичный предложенному А.А.Тихоновым и Арсениным для вычисления рядов Фурье[13,14]. Идея метода состоит в том, что вместо интеграла $\int_0^\infty F_n(k) \cos 2kx\,dk$ в правой части (6.9) считаем интеграл $\int_0^\infty F_n(k)(1+\alpha k^3)^{-1} \cos 2kx\,dk$, α – параметр регуляризации.

Предложенная выше расчетная схема проверялась на модельных задачах. Для начального приближения брали потенциалы вида $v_0^{(1)}(x) = 2\cos(x/2) - 0{,}5 \sin 2x, (0 \le x \le \pi)$, $v_0^{(1)}(x) \equiv 0, (x \ge \pi)$ и $v_0^{(2)}(x) = 2\cos(x/2) - \sin 2x, (0 \le x \le \pi)$, $v_0^{(2)}(x) \equiv 0, (x \ge \pi)$.
В качестве $\delta_*(k)$ полагали в обоих случаях фазу рассеяния потенциала $v_*(x) = 2\cos(x/2), (0 \le x \le \pi)$, $v_*(x) \equiv 0, (x \ge \pi)$.
Параметр регуляризации α =0,002. Значение регуляризованной

правой части (6.9) в точке $x=0$ вычисляли экстраполяцией по значениям предыдущих трех точек формулой $F(0) = F(3) - 3(F(2) - F(1))$. Рассматривали также случай $v_0(x) = \sin x + 0{,}5 \sin 2x, (0 \le x \le \pi)$, $v_0(x) \equiv 0, (x \ge \pi)$, $v_*(x) = \sin x \ (0 \le x \le \pi)$, $v_*(x) \equiv 0 (x \ge \pi)$. Результаты численного счета показывают, что расчетный потенциал совпадает с искомым, с точностью до третьего знака, притом если продолжить число итерации, эту точность можно увеличить.

На таблице Iа приведены результаты счета с регуляризацией и экстраполяцией в нуле, а на Iб-для сравнения результаты счета без регуляризации. Эти данные наглядно показывают эффективность применяемой здесь регуляризации при решении обратной задачи рассеяния.

Таблица I.

υ_* – искомый потенциал $2\cos(x/2)$, $(0 \le x \le \pi)$

$\upsilon_0^{(\omega)}$ – начальное приближение $2\cos(x/2) - 0{,}5\sin 2x$ $(0 \le x \le \pi)$

$\upsilon_n^{(\omega)}$ – n-ая итерация.

υ_*	$\upsilon_0^{(\omega)}$	$\upsilon_6^{(1)}$	$\upsilon_{13}^{(1)}$	$\upsilon_{16}^{(1)}$	$\upsilon_6^{(1)}$
2,000	2,000	2,638	2,I49	2,092	-3I,534
I,997	I,898	2,I52	2,008	I,999	- I,642
I,990	I,795	I,96I	I,974	I,982	0,588
I,977	I,695	I,972	I,894	I,983	2,505
I,960	I,60I	I,968	I,96I	I,959	2,908
I,937	I,5I7	I,945	I,938	I,937	2,I67
I,9I0	I,444	I,9I4	I,9I2	I,9I2	I,409
I,878	I,386	I,886	I,880	I,879	I,396
I,842	I,342	I,840	I,840	I,84I	I,906
I,800	I,I3I	I,808	I,803	I,802	2,227
I,755	I,300	I,749	I,752	I,753	2,006
I,705	I,300	I,707	I,706	I,705	I,56I
I,650	I,3I2	I,648	I,650	I,650	I,402
I,592	I,334	I,590	I,590	I,59I	I,59I
I,529	I,362	I,529	I,530	I,529	I,53I
I,463	I,392	I,45I	I,465	I,464	I,467
I,393	I,422	I,387	I,390	I,39I	I,395
I,3I9	I,447	I,348	I,323	I,322	I,3I8
I,243	I,464	I,245	I,244	I,243	I,240
I,I63	I,469	I,II6	I,I62	I,I6I	I,I64
I,080	I,459	I,089	I,082	I,08I	I,082
0,955	I,430	0,997	0,993	0,993	0,994
0,907	I,382	0,904	0,906	0,907	0,906
0,8I6	I,3I3	0,8II	0,8I4	0,8I3	0,8I5
0,724	I,222	0,7I9	0,727	0,729	0,722
0,630	I,II0	0,608	0,6I8	0,620	0,629
0,534	0,976	0,537	0,550	0,546	0,535
0,438	0,824	0,425	0,427	0,429	0,44I
0,339	0,655	0,347	0,346	0,345	0,346
0,24I	0,473	0,246	0,245	0,243	0,247
0,I4I	0,28I	0,I45	0,I44	0,I52	0,I43
0,04I	0,083	0,023	0,006	0,0I0	0,708
0					

1а 1б

Литература

I. а) Визнер Я., Жидков Е.П., Лелек В. Препринт ОИЯИ Р5-3895(I968)

б) Жидков Е.П. и др. Препринт ОИЯИ Р5-5306 (I970).

в) Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ т.4, вып. I I27-I66 (I973).

2. Канторович Л.В, Акалов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах М., Физматгиз (I959).

3. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Наукова Думка, Киев, I972.

4. Crum M.M. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford 6, 2, 121-128 (1955).

5. Крейн М.Г. ДАН СССР, II3, 970-973 (I957).

6. Левитан Б.М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. Физматгиз М., I962.

7. Левин Б.Я. ДАН СССР I06, I87-I90 (I956).

8. Л.Д.Фаддеев УМН I4, № 4, 57-II9 (I959).

9. Крейн М.Г. УМН I3, № 5, 3-I20 (I958).

I0. Гавурин М.К. Изв. вузов. Серия математическая 5(6) I8 (I958).

I2. Жидков Е.П., Пузынин И.В. ДАН СССР I80, I8-2I (I968),

I2. Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М., "Мир", I972.

I3. Тихонов А.Н. ДАН СССР I56, I (I964).

I4. Арсенин В.Я. ДАН СССР I83, 2 (I968).

Рукопись поступила в издательский отдел
I4 июля I975 года.