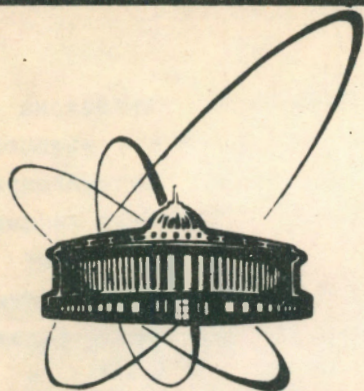


90-314



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

Д 458

P5-90-314

Н. Д. Дикусар

ДИСКРЕТНЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Направлено в журнал "Математическое моделирование"

1990

Четыре были и остались т р и .  
Я речь их смутно слышал изнутри.  
(Фауст)

Дискретные проективные преобразования (ДПП) получены в процессе поиска новых алгоритмов для решения на ЭВМ задач распознавания и обработки изображений со следами частиц ядерных взаимодействий в магнитном поле.

Термин "дискретные" указывает на то, что преобразование выполняется над отдельной точкой плоскости, заданной декартовыми координатами.

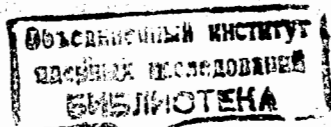
В работе дан вывод и проведен анализ ДПП (прямых и обратных), обладающих свойством оптимальной линейной классификации точек на семействе квадратичных функций и устойчивостью к ошибкам измерений, что, например, позволяет создавать быстрые и эффективные алгоритмы на всех уровнях обработки трековой информации - актуальной задачи в современных экспериментах физики элементарных частиц [4].

В своей основе ДПП построены на использовании свойства векторного произведения сохранять ортогональность по отношению к преобразованиям над векторами-сомножителями. Построение такого вектора, как и в [5], осуществляется на линейных и квадратичных элементах, вычисленных по  $x$ -координатам системы четверок точек, взятых на квадратичных параболах.

Особенностью полученных преобразований является то, что они понижают степень многочлена на две единицы и тем самым позволяют делать переход к геометрическим объектам с более простой структурой, существенно упрощая сложность исходной задачи.

Линейность ДПП, их устойчивость и свойство инвариантности по отношению к сдвигу являются теми положительными качествами, которые играют важную роль при решении не только трековых, но и многих других задач как прикладного, так и исследовательского характера.

Например, полученные в настоящей работе операторные функции



совпадают с функциями расстояний четырех коллинеарных точек  $\{1,2,3,4\}$ , определяемых двойным (ангармоническим) отношением вида  $\{13/24:23/14\}$  вместо  $\{13/14:23/24\}$ , которое, как известно, является инвариантом по отношению к проективным преобразованиям [1].

Ниже приводится вывод формул операторов прямого и обратного преобразований, рассмотрены свойства этих преобразований и на примерах показаны возможности применения полученных ДПП к решению практических задач.

\*

В действительной плоскости рассмотрим множество точек, расположенных на семействе квадратичных функций

$$M \{ (x,y) \mid y = Ax^2 + Bx + C \}, \quad (1)$$

где  $A, B, C \in K$  - любые, не равные одновременно нулю числа,  $K$  - поле действительных чисел. Для фиксированных  $A, B$  и  $C$  образуем подмножество  $Q \subset M$ , элементами которого являются четверки произвольных, несовпадающих точек вида

$$Q \{ P_j(x_j, y_j) \mid x_i \neq x_k, i, k = j, i \neq k, j = 0 \div 3 \}, Q \subset M. \quad (2)$$

На множестве точек  $Q$  рассмотрим вещественное трехмерное евклидово пространство  $E$  векторов  $\varphi \in E$  с обычным скалярным произведением двух векторов

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \psi_i, \quad \varphi, \psi \in E \quad (3)$$

и с нормой вида

$$\|\varphi\| = \left| \sum_{i=1}^3 \varphi_i \right|, \quad (4)$$

для всех  $\varphi \in E$  за исключением тех, с отличными от нуля

компонентами, для которых

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i = 0, \text{ при } \varphi_i \neq 0, (i=1 \div 3). \quad (4a)$$

С учетом (4a) выражение (4) удовлетворяет всем правилам нормы:

1.  $\|\varphi\| \geq 0$ , причем  $\|\varphi\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $\varphi = \theta$ .

2.  $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$  (неравенство треугольника) и

3.  $\|c\varphi\| = |c| \|\varphi\| = |c| \|\varphi\|$  (однородность),  $\varphi \in E, c \in K$ .

Расстояние между элементами в  $E$  определим в виде

$$\rho(\varphi, \psi) = \left| \sum_{i=1}^3 (\varphi_i - \psi_i) \right| = \|\varphi - \psi\|.$$

По четверкам точек  $P_j \in Q, (j=0 \div 3)$  образуем следующие векторы -элементы пространства  $E$ :

$$x \equiv \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ \tau \end{pmatrix}, \quad s \equiv \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ L^2 \\ \tau^2 \end{pmatrix}, \quad y \equiv \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\Delta x_i = x_i - x_0, \Delta y_i = y_i - y_0, (i=1 \div 3), x, y, s \in E$ .

С учетом условий (1) вектор  $y$  можно записать также в виде линейной комбинации векторов  $x$  и  $s$ :

$$y = As + Bx - 2x_0x, \quad A, B \in K, x, y, s \in E, x_0 \in Q \subset M. \quad (5a)$$

В соответствии с известной задачей о перпендикуляре [2], опущенном из конца вектора  $\varphi \in E$  на подпространство  $U \subset E$ , являющееся также евклидовым относительно линейных операций и скалярного произведения, в  $E$  существует однозначно определенный элемент  $\alpha$ , "ближайший" к произвольному элементу  $\varphi \in E$ , и для  $\varphi$  существует единственное разложение

$$\varphi = \alpha + \beta, \quad (6)$$

такое, что  $\alpha \in U$ , а  $\beta \perp U$ . Элемент  $\gamma = \alpha$  называется

п р о е к ц и е й элемента  $\varphi$  на подпространство  $U$  и геометрически представляет собой основание перпендикуляра, опущенного из  $\varphi$  на подпространство  $U$ , а величина

$\delta = \inf_{\alpha \in U} \|\alpha - \varphi\|$  является длиной этого перпендикуляра.

Таким образом, равенство  $\gamma = R\varphi$  определяет в пространстве  $E$  оператор проектирования (проектор), оставляющий все элементы из подпространства  $U$  неизменными.

Для того чтобы найти оператор проектирования в нашем пространстве  $E$ , рассмотрим в нем векторы  $w$ , с координатами  $w_i$  ( $i=1+3$ ), полученными по правилам векторного произведения вектора  $x$  на вектор  $s$  следующего вида:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\tau^2 - \tau L^2 \\ \lambda\tau^2 - \tau\lambda^2 \\ \lambda L^2 - L\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad w \in E. \quad (7)$$

Вектор  $w$  ортогонален векторам  $x$  и  $s$  (по определению). Тогда, с учетом (5а), он будет ортогонален и вектору  $y$ .

$$(w, y) = A(w, s) + B(w, x) - 2x_0(w, x) = 0. \quad (8)$$

С другой стороны,

$$(w, y) = (w, f) - (w, c) = 0$$

или  $(w, f) = (w, c), \quad w, f, c \in E, \quad (9)$

где  $y$  представлен в виде разности  $f - c$ , т. е.

$$y = \begin{pmatrix} f_\lambda \\ f_L \\ f_\tau \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = f - c,$$

а через  $f_\lambda$ ,  $f_L$  и  $f_\tau$  обозначены  $y_i$ , ( $i=1+3$ ).

Преобразуем выражение (9). Для этого найдем норму вектора  $w$ :

$$\|w\| = \left| \sum_{i=1}^3 w_i^2 \right| = |L\tau^2 - \tau L^2 + \lambda\tau^2 - \tau\lambda^2 + \lambda L^2 - L\lambda^2| =$$

$$= |\tau^2(L-\lambda) + \tau(\lambda^2 - L^2) + \lambda L(L-\lambda)| = |(\lambda - \tau)(L - \tau)(L - \lambda)|.$$

По условию несовпадения точек в четверке из  $Q$  ( $P_j, (j=0+3)$ ), норма  $\|w\| \neq 0$ . Разделим обе части равенства (9) на  $\|w\|$ .

Получим

$$(p, f) = (p, c) = f_0, \quad f_0 = y_0 \in Q, \quad (10)$$

где

$$p = \frac{w}{\|w\|} \text{ и } \|p\| = \left| \sum p_i^2 \right| = \left| \sum \frac{w_i^2}{\|w\|^2} \right| = \frac{\sum w_i^2}{\|w\|^2} = 1. \quad (10a)$$

После этого выражения для  $p_i$ , ( $i=1+3$ ) запишутся в виде

$$\begin{aligned} p_1(\lambda, L, \tau) &= \frac{L\tau}{(\tau - \lambda)(L - \lambda)}, \\ p_2(\lambda, L, \tau) &= \frac{-\lambda\tau}{(\tau - L)(L - \lambda)}, \\ p_3(\lambda, L, \tau) &= \frac{\lambda L}{(\tau - \lambda)(\tau - L)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Интересно отметить, что полученные таким образом функции  $p_i(\lambda, L, \tau)$  в точности совпадают с функциями сложного отношения (13/24:23/14) и для нашей четверки  $\{0, \lambda, L, \tau\}$  запишутся в виде

$$p_1 = \{0\lambda L\tau\} = \{0\lambda\tau L\}, \quad p_2 = \{0L\tau\lambda\} = \{0L\lambda\tau\} \text{ и } p_3 = \{0\tau L\lambda\} = \{0\tau\lambda L\}.$$

Рассмотрим теперь векторы

$$g = \begin{pmatrix} f_\lambda \\ f_L \\ f_0 \end{pmatrix} \text{ и } q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_\tau - f_0 \end{pmatrix}$$

и запишем разложение для вектора  $f$  в виде

$$f = g + q, \quad g \in U, \quad q \perp U, \quad f \in E. \quad (12)$$

Представление (12) удовлетворяет условиям (6) задачи о разложении элемента  $f \in E$  и поэтому существует линейный оператор  $P$  такой, что

$$Pf = g, \quad g \in U, \quad f \in E. \quad (13)$$

Теперь, с учетом (10), (12) и (13), легко запишем выражение для оператора  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}. \quad (13a)$$

Определитель этой матрицы  $\det(P) = p_3 \neq 0$ , т.к.  $\lambda L \neq 0$ . Из (11) следует, что область определения оператора (относительно  $\tau$ ) является вся числовая ось за исключением двух точек  $\tau = \lambda$  и  $\tau = L$ , в которых функции  $p_i(\lambda, L, \tau)$  терпят бесконечный разрыв.

Полученный оператор является проектором, так как

$$P^2 f = P(Pf) = Pg = g, \quad \text{т.е. } P^2 = P,$$

где

$$Pg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\lambda \\ f_L \\ f_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\lambda \\ f_L \\ (p, g) \end{pmatrix} = g,$$

$$\text{а } (p, g) = (p(\lambda, L, 0), f_{\tau=0}) = 0 + 0 + 1f_0 = f_0.$$

Выполнены и другие свойства проектора: самосопряженность, положительная полуопределенность, и норма его равна 1.

Действительно, из (12) следует:

$$\|f\| = \|g+q\| \leq \|g\| + \|q\|, \text{ откуда при } f_\tau > f_0 \text{ получим } \|f\| > \|g\| = \|Pf\|$$

и, если  $f \in U$ , то  $Pf = f$ , т.е.  $\|P\| = 1$ .

Таким образом, линейный оператор  $Pf = g$  переводит линейное пространство  $E$  в себя, так как  $g \in U, U \subset E$ , и, в силу  $\det(P) \neq 0$ , в  $U \subset E$  существует обратный оператор  $P^{-1}$  [3]:

$$P^{-1} = D = \frac{1}{p_3} \begin{pmatrix} p_3 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 \\ -p_1 & -p_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что компоненты вектора  $d = d_i (i=1+3)$  получаются из  $p_i$  таким образом, что норма  $d$  тоже равна 1, т.е.  $\|d\| = 1$ . Нетрудно убедиться, что  $PD = I$ , где  $I$  - единичный оператор.

Теперь запишем компоненты вектора  $d$  как функции переменной  $\tau$  и параметров  $\lambda, L$ :

$$d_1(\lambda, L, \tau) = -\frac{p_1}{p_3} = \frac{-1}{\lambda(L-\lambda)} \tau(\tau-L),$$

$$d_2(\lambda, L, \tau) = -\frac{p_2}{p_3} = \frac{1}{L(L-\lambda)} \tau(\tau-\lambda),$$

$$d_3(\lambda, L, \tau) = \frac{1}{p_3} = \frac{1}{\lambda L} (\tau-\lambda)(\tau-L). \quad (14)$$

Поведение и свойства функций  $p_i(\lambda, L, \tau)$  и  $d_i(\lambda, L, \tau)$  отражены в таблице, а графики их семейства приведены на рис.1(а,б).

Направление и форма ветвей функций  $p_i(\lambda, L, \tau)$  и  $d_i(\lambda, L, \tau)$  определяются значениями параметров  $\lambda$  и  $L$ , что видно на графиках семейства этих функций при фиксированном  $\lambda=1$  и различных значениях  $L$ .

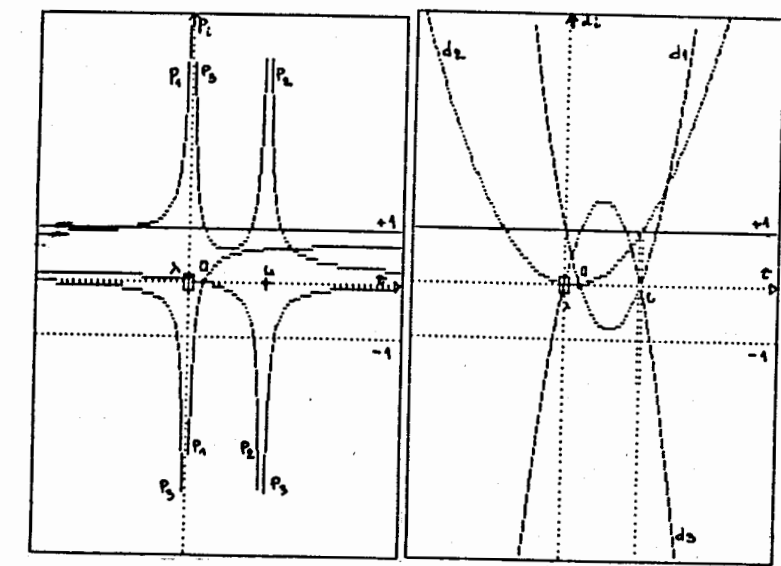
Если мы зафиксируем, например, параметр  $L$ , а  $\lambda$  и  $\tau$  рассмотрим в качестве переменных, то  $p_i(L; \lambda, \tau)$  и  $d_i(L; \lambda, \tau)$  будут описывать поверхности, на которых реализуются наши преобразования. Для каждой из компонент векторов  $p$  и  $d$  можно построить такие поверхности, фрагменты двух из них приведены на рис.2.

Теперь с помощью обратного оператора запишем представление для вектора  $f$  в виде:  $f = Dg$ ,  $g \in U, f \in E$ . (15)

Действительно,

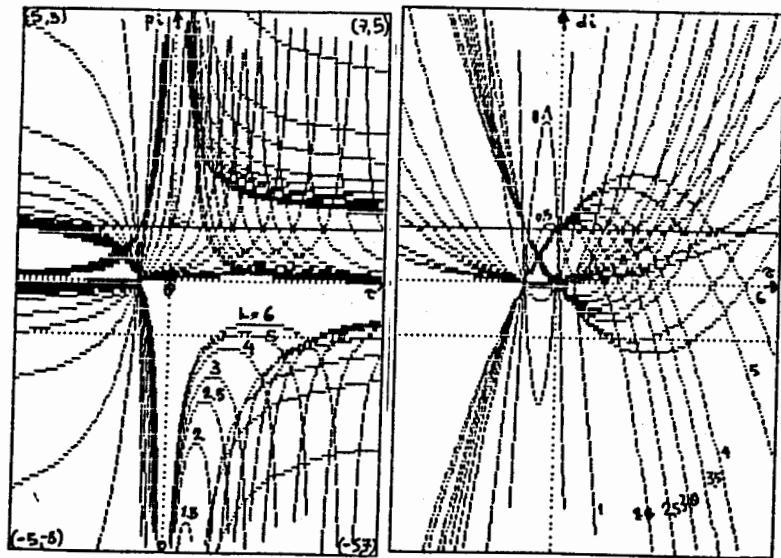
$$Dg = \begin{pmatrix} f_\lambda \\ f_L \\ (d, g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\lambda \\ f_L \\ f_\tau \end{pmatrix} = f,$$

где  $(d, g) = f_\tau = d_1 f_\lambda + d_2 f_L + d_3 f_0$  (получаем из (10)).



а

б



в

г

Таблица. Основные характеристики функций  $p_i(\lambda, L, \tau)$  и  $d_i(\lambda, L, \tau)$ .

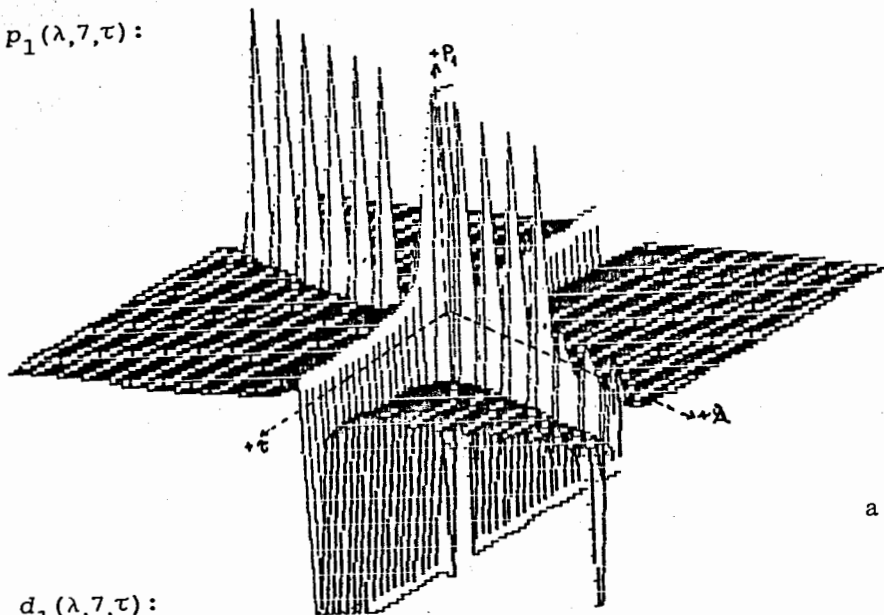
Функция	Обл.определ.	Нули	Точки экстр.	Асимптоты
$p_1(\lambda, L, \tau)$	$\tau \in (-\infty, \infty), \tau \neq \lambda$	$\tau=0$	нет	$p_1=L/(L-\lambda)$ $\tau=\lambda$
$p_2(\lambda, L, \tau)$	$\tau \in (-\infty, \infty), \tau \neq L$	$\tau=0$	нет	$p_2=-\lambda/(L-\lambda)$ $\tau=L$
$p_3(\lambda, L, \tau)$	$\tau \in (-\infty, \infty), \tau \neq \lambda, \tau \neq L$	нет	$\tau_3=(L+\lambda)/2$ $p_3=-4\lambda L/(L-\lambda)^2$	$p_3=0$ $\tau=\lambda$ $\tau=L$
$d_1(\lambda, L, \tau)$	$\tau \in (-\infty, \infty)$	$\tau=\lambda$ $\tau=L$	$\tau_3=(L+\lambda)/2$ $d_1=-(L-\lambda)^2/4\lambda L$	нет
$d_2(\lambda, L, \tau)$	$\tau \in (-\infty, \infty)$	$\tau=0$ $\tau=L$	$\tau_3=L/2$ $d_2=-L^2/4\lambda(L-\lambda)$	нет
$d_3(\lambda, L, \tau)$	$\tau \in (-\infty, \infty)$	$\tau=0$ $\tau=\lambda$	$\tau_3=\lambda/2$ $d_3=\lambda^2/4L(L-\lambda)$	нет

Таким образом, операторы  $Pf=g$  и  $Dg=f$  устанавливают взаимно однозначное соответствие точек на линии из семейства (1) (при  $A, B$  и  $C \neq 0$ ) и точек линии  $y=y_0$ , причем точка  $(x_0, y_0)$  находится на линии, принадлежащей тому же семейству (1).

Произвольно взятые на линии из семейства (1) четверки несовпадающих точек образуют подмножество  $Q \subset M$ . Установим в четверке порядок и зададим тройку  $\{P_0, P_1, P_2\}$  или  $p e p$ , в котором точку  $P_0(x_0, y_0)$  назовем **б а з и с н о й**.

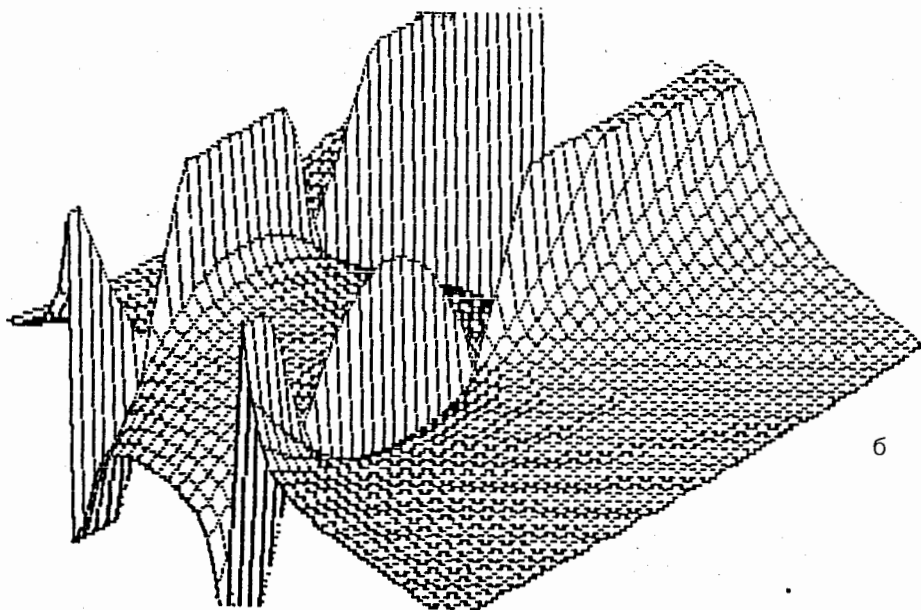
Рис.1.Фрагменты графиков функций  $p_i(\lambda, L, \tau)$  и  $d_i(\lambda, L, \tau)$  (а,б) и семейства тех же функций (в,г) для  $\lambda=1$  и  $L=0.1; 0.5; 1; \dots$

$p_1(\lambda, \tau):$



а

$d_1(\lambda, \tau):$



б

Рис. 2. Фрагменты поверхностей  $p_1(\lambda, \tau)$  (а),  $\tau \in [-45, 45]$ ,  $\lambda \in [-25, 25]$ ,  $-50 \leq p_1 \leq 50$  и  $d_1(\lambda, \tau)$  (б),  $\tau \in [-10, 10]$ ,  $\lambda \in [-10, 10]$ ,  $-10 \leq d_1 \leq 10$ .

В заданной таким образом системе координат  $x$ -координаты точек четверки относительно базисной точки будут равны соответственно  $0, \lambda, L$  и  $\tau$ . Если зафиксировать репер на данной линии  $f(x)$ , то любая точка на ней вместе с точками репера будет порождать четверку из  $Q$  и наши преобразования (ДПП) установят взаимно однозначное соответствие между точками  $P(x, y(x))$  заданной линии и точками  $H(\tau, y_0)$  на линии  $y=y_0$ .

Легко видеть, что операторные выражения преобразований  $g=Pf$  и  $f=Dg$  эквивалентны записи в виде скалярных произведений векторов из  $E$ :

$$y_0 = (p, f) = \sum_{i=1}^3 p_i(\lambda, L, \tau) y_i$$

$$\text{и } y(x) = (d, g) = \sum_{i=1}^3 d_i(\lambda, L, \tau) g_i, \quad p, d, f, g \in E, \quad (16)$$

где  $y_j = y(x_j)$ ,  $j = 0 \div 3$ ,  $p_i$  и  $d_i$  заданы формулами (11) и (14), причем  $y(x) = y(x_3)$  - ордината текущей точки, соответствующей координате  $\tau = x_3 - x_0$ , в которой и вычисляются функции  $p_i$  и  $d_i$ .\*

В символической форме выражения (16) запишутся в виде

$$y_0 = D[y(x)] \text{ и } y(x) = D^{-1}[y_0], \quad (17)$$

где через  $D[\cdot]$  и  $D^{-1}[\cdot]$  обозначены операции прямого и обратного дискретных преобразований в точке  $\tau = x - x_0$ .

\*) Таким образом, формулы (16) представляют точки  $(\tau, y_0)$  и  $(\tau, y(x_0 + \tau))$  через барицентрические координаты [1]  $p_i$  и  $d_i$ , заданные в остальных трех точках четверки из  $Q \subset M$ , так как  $\sum p_i = 1$  и  $\sum d_i = 1$ .

Перейдем теперь к рассмотрению свойств ДПП. Пусть  $y = f(x)$  - любая непрерывная на  $[a, b]$  функция в действительной плоскости. Зададим на  $f(x)$  репер по трем произвольным в  $[a, b]$  точкам. Тогда из ординат реперных точек и текущей точки на  $f(x)$  составим векторы  $F = (f_\lambda, f_L, f(x))'$  и  $H = (f_\lambda, f_L, h(\tau))'$ , где ' - символ транспонирования и при  $\tau=0$  (базисная точка)  $h(0) = h_0 = f(x_0)$ .

Перемещая текущую точку вдоль линии  $f(x)$ , потребуем, чтобы система из двух фиксированных точек ( $P_\lambda$  и  $P_L$ ) и двух подвижных ( $P_0$  и  $P_\tau$ ) точек образовывала четверку, каждый раз лежащую на некоторой линии из семейства (1). В этом случае ДПП примут вид

$$h(\tau) = D[f(x)] = (p, F) \quad (18)$$

$$и \quad f(x) = D^{-1}[h(\tau)] = (d, H), \quad (19)$$

где  $(\tau, h(\tau))$  - точка на линии  $h(\tau)$ , ордината которой совпадает с ординатой параболы (проведенной по трем точкам  $f_\lambda, f_L$  и  $f_\tau$ ) в точке  $x_0$ . Следовательно, точка  $H(\tau, h_0)$  опишет некоторую траекторию (образ) или характеристику  $h(\tau)$  в то время, когда текущая точка  $P(x, f(x))$  будет перемещаться вдоль линии (прообраза)  $y = f(x)$ .

Особенно интересным с точки зрения полученных преобразований является семейство функций вида  $f(x) = x^n$ . Рассмотрим более подробно применение ДПП к точкам этих функций:

1)  $n = 0$ .  $f = c$ ,  $c = const$ . Тогда  $F = (c, c, c)'$  и

$$h(\tau) = (p, F) = c \sum p_i = c1 = c$$

и для обратного преобразования получим также  $f = c$ , т.к.

$$H = F, \text{ а } \sum d_i = 1.$$

2)  $n = 1$ .  $f(x) = x$  и  $F = (x_0 + \lambda, x_0 + L, x_0 + \tau)' = x_0 e + x$ ,  $e = (1, 1, 1)'$

$$и \quad h(\tau) = D[x] = (p, F) = x_0 \sum p_i + (p, x) = x_0 + 0 = x_0.$$

$$\text{Наоборот: } H = (x_0 + \lambda, x_0 + L, x_0 + \tau)' = x_0 e + x,$$

$$\text{где } x_0 = (\lambda, L, 0)'$$

Тогда

$$f(x) = D^{-1}[x_0] = (d, H) = x_0 + (d, x_0) =$$

$$= x_0 - \frac{1}{\lambda(L-\lambda)} \tau(\tau-L)\lambda + \frac{1}{L(L-\lambda)} \tau(\tau-L)L + \frac{1}{\lambda L} (\tau-L)(\tau-L)0 =$$

$$= x_0 + \frac{-\lambda L \tau(\tau-L) + \lambda L \tau(\tau-L)}{\lambda L(L-\lambda)} = x_0 + \frac{(L-\lambda)\lambda L \tau}{\lambda L(L-\lambda)} = x_0 + \tau =$$

$$= x_0 + (x - x_0) = x, \text{ т.е. } f(x) = x.$$

3)  $n=2$ .  $f(x) = x^2$ . Построим вектор  $F$  по координатам  $x_\lambda, x_L$  и  $x_\tau$ :

$$F = x_0^2 e + 2x_0 x + s. \text{ Тогда, в силу } (p, x) = (p, s) = 0, \text{ имеем}$$

$$h(\tau) = D[x^2] = (p, F) = (p, x_0^2 e) = x_0^2 \sum p_i = x_0^2 1 = f(x_0).$$

Для выполнения обратного преобразования найдем вектор  $H$ :

$$H = (f(x_\lambda), f(x_L), h(\tau))' = ((x_0 + \lambda)^2, (x_0 + L)^2, x_0^2)' = x_0^2 e + 2x_0 x_0 + s_0, \text{ где } s_0 = (\lambda^2, L^2, 0)'$$

Тогда

$$f(x) = D^{-1}[x_0^2] = (d, H) = x_0^2 (d, e) + 2x_0 (d, x_0) + (d, s_0) =$$

$$= x_0^2 \sum d_i + 2x_0 \frac{-\lambda L \tau(\tau-L) + \lambda L \tau(\tau-L)}{\lambda L(L-\lambda)} + \frac{-\lambda^2 L \tau(\tau-L) + \lambda L^2 \tau(\tau-L)}{\lambda L(L-\lambda)} =$$

$$= x_0^2 + 2x_0 \tau + \tau^2 = (x_0 + \tau)^2 = x^2.$$

Примечание: Из п.1-3 следует, что  $Ax^2 + Bx + C = d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_0 = -y_1 \tau(\tau-L)/\lambda(L-\lambda) + y_2 \tau(\tau-L)/L(L-\lambda) + y_0 (\tau-L)(\tau-L)/\lambda L$ . Отсюда, приравнивая коэффициенты при  $x^2$  и  $\tau^2$ , получим полезную формулу



для определения коэффициента А параболы по ординатам трех точек и параметрам  $\lambda$  и  $L$ :

$$A = -y_1/\lambda(L-\lambda) + y_2/L(L-\lambda) + y_0/\lambda L.$$

Легко видеть, что оценка коэффициента А по измеренным точкам будет тем лучше, чем больше расстояние между реперными точками по оси абсцисс ( $\lambda \geq 1, L \gg \lambda$ ).

$$4) n = 3, f(x) = x^3. F = ((x_0 + \lambda)^3, (x_0 + L)^3, (x_0 + \tau)^3)' =$$

$$= x_0^3 e + 3x_0^2 x + 3x_0 s + t, \text{ где } t' = (\lambda^3, L^3, \tau^3)' \text{ и тогда}$$

$$h(\tau) = (p, F) = x_0^3 \cdot 1 + 0 + 0 + (p, t) = x_0^3 + \lambda L \tau,$$

где  $\lambda L \tau = (p, t) = \sum p_i t_i$  (проверяется непосредственной подстановкой компонент  $p_i$  и  $t_i$ ).

Теперь можем записать выражение  $h(\tau)$  для кубической параболы общего вида  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , где  $a, b, c, d$  - коэффициенты.  $D[ax^3 + bx^2 + cx + d] = a(x_0^3 + \lambda L \tau) + bx_0^2 + cx_0 + d = a \lambda L \tau + f(x_0) = h(\tau)$ , откуда находим при  $\tau \neq 0$ :

$$a = (h(\tau) - f(x_0)) / \lambda L \tau.$$

Для обратного преобразования найдем вектор  $H$ :

$$H = ((x_0 + \lambda)^3, (x_0 + L)^3, x_0^3 + \lambda L \tau)'$$

$$= x_0^3 e + 3x_0^2 x_0 + 3x_0 s_0 + t_\tau, \text{ где } t_\tau = (\lambda^3, L^3, \lambda L \tau)'$$

Тогда

$$f(x) = D^{-1}[x_0^3 + \lambda L \tau] = (d, H) = x_0^3 (d, e) + 3x_0^2 (d, x_0) + 3x_0 (d, s_0) + (d, t_\tau) =$$

$$= x_0^3 + 3x_0^2 \tau + 3x_0 \tau^2 + \tau^3 = (x_0 + \tau)^3 = x^3, \text{ где}$$

$$(d, e) = 1, (d, x_0) = \tau, (d, s_0) = \tau^2, \text{ а } (d, t_\tau) = \tau^3.$$

Действительно,

$$(d, t_\tau) = -\frac{1}{\lambda(L-\lambda)} \tau(\tau-L)\lambda^3 + \frac{1}{L(L-\lambda)} \tau(\tau-L)L^3 +$$

$$+ \frac{1}{\lambda L} (\tau-\lambda)(\tau-L)\lambda L \tau = \frac{\tau}{(L-\lambda)} \{ (L-\lambda)(\tau^2 - (L+\lambda)\tau + \lambda L) - \lambda^2(\tau-L) + L^2(\tau-\lambda) \} =$$

$$= \tau \{ \tau^2 - (L+\lambda)\tau + (L+\lambda)\tau \} = \tau^3.$$

Продолжая этот процесс для  $n = 4, 5, \dots$ , найдем, что операция  $D[x^n]$  понижает степень  $f(x)$  на две единицы ( $n \rightarrow n-2$ ).

Докажем это для случая  $x_0 = 0$ . В этом случае  $F = (\lambda^n, L^n, \tau^n)'$  и  $h(\tau) = D[x^n] = (p, F) = \phi(\lambda, L, \tau) \{ (L-\lambda)\tau^{n-1} - (L^{n-1} - \lambda^{n-1})\tau + \lambda L(L^{n-2} - \lambda^{n-2}) \} = \phi(\lambda, L, \tau) \{ \dots \}$ , где  $\phi(\lambda, L, \tau) = \lambda L \tau / (\tau-\lambda)(\tau-L)(L-\lambda)$ . (20)

С помощью разложения

$$L^n - \lambda^n = (L-\lambda) \sum_{k=1}^n L^{n-k} \lambda^{k-1}$$

выражение в фигурных скобках приводится к виду

$\{ \dots \} = (\tau-\lambda)(\tau-L)(L-\lambda) P_{n-3}(\lambda, L, \tau)$ , где  $P_{n-3}(\lambda, L, \tau)$  - многочлен степени  $n-3$  относительно  $\lambda, L$  и  $\tau$ . После подстановки в (20) и сокращения общих членов получим

$$h(\tau) = D[x^n] = \lambda L \tau \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{i-1} \sum_{k=1}^{n-1-i} \tau^{n-1-i-k} L^{k-1} \right\}, \quad (21)$$

откуда видно, что  $h$  является однородной функцией от  $\lambda, L$  и  $\tau$ .

Теперь, полагая  $n=4, 5$ , с помощью формулы (21) найдем

$$h_4(\tau) = D[x^4] = \lambda L \tau (\tau + L + \lambda) = \lambda L \tau^2 + (\lambda L^2 + \lambda^2 L) \tau$$

$$\text{и } h_5(\tau) = D[x^5] = \lambda L \tau (\lambda^2 + \tau^2 + L^2 + (L+\lambda)\tau + \lambda L).$$

При выполнении обратных преобразований векторы  $H$  будут равны

$$H = (\lambda^4, L^4, h_4(\tau))' \text{ для } x^4 \text{ и } H = (\lambda^5, L^5, h_5(\tau))' \text{ для } x^5.$$

Воспользовавшись линейностью преобразования, можем применить его для многочленов  $n$ -й степени общего вида

$$P_n(x) = \sum_k a_k x^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

В этом случае запишем вектор  $\Phi_{n-k} = \sum_{k=1}^n a_k F_{n-k}$  и тогда получим

$$\begin{aligned} D [P_n(x)] &= (p, \Phi_{n-k}) = (p, \sum_k a_k F_{n-k}) = \sum_k a_k (p, F_{n-k}) = \\ &= \sum_k a_k h_{n-k}(\tau^{n-2}) = p_{n-2}(\tau). \end{aligned}$$

Запись преобразований для общего вида функции  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  также будет содержать значения этой функции в точках репера и в текущей точке, а результат их применения приведет к понижению на две единицы степени многочлена, которым может быть аппроксимирована на  $[a, b]$  функция  $f(x)$  (теорема Вейерштрасса, разложение  $f(x)$  в степенной ряд или другие преобразования над  $f(x)$ ).

\*

Весьма важным для практического применения ДПП является вопрос устойчивости этих преобразований к ошибкам в исходных данных.

Пусть  $\tilde{F} = F + \varepsilon$ , где  $\tilde{F} = (f_{\lambda}^{\sim}, f_L^{\sim}, f_{\tau}^{\sim})'$ -вектор измеренных точек, а  $\varepsilon = (\varepsilon_{\lambda}, \varepsilon_L, \varepsilon_{\tau})'$ -вектор ошибок в соответствующих точках.

Тогда

$$\tilde{h}(\tau) = D[f(\tilde{x})] = (p, \tilde{F}) = (p, F) + (p, \varepsilon) = h(\tau) + \varepsilon(\tau), \quad \text{где } \varepsilon(\tau) = (p, \varepsilon).$$

Исследуем поведение ошибки  $\varepsilon(\tau)$  в точке  $\tau = x - x_0$ :

$\varepsilon(\tau) = (p, \varepsilon) = p_1 \varepsilon_{\lambda} + p_2 \varepsilon_L + p_3 \varepsilon_{\tau}$ , где  $\varepsilon_{\lambda}$  и  $\varepsilon_L$ - фиксированные ошибки реперных точек, а  $\varepsilon_{\tau}$ - случайная ошибка в текущей точке. Из последнего равенства следует, что ошибка в

$\tilde{h}(\tau)$  определяется линейной комбинацией операторных функций  $p_i(\lambda, L, \tau)$  и ошибок в исходных точках. Оператор  $P$  ограничен всюду за исключением двух реперных точек, т.е.

$$\sum_{i=1}^3 |p_i(\lambda, L, \tau)| < \infty, \quad \tau \neq \lambda, \tau \neq L,$$

и поэтому  $\tilde{h}(\tau)$  будет также ограничена, если ограничены  $f_{\lambda}, f_L$  и  $f_{\tau}$ .

Вид функций  $p_i(\lambda, L, \tau)$  позволяет заранее оценить коридор ошибок по их горизонтальным асимптотам, а именно:

$$p_1 \rightarrow L/(L-\lambda), \quad p_2 \rightarrow -\lambda/(L-\lambda) \quad \text{и} \quad p_3 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \pm\infty.$$

В этом случае  $\varepsilon(\tau)$  определяется значениями  $\lambda, L$  и  $\varepsilon_{\lambda}, \varepsilon_L$ , так как  $\varepsilon_{\tau}$  будет подавляться функцией  $p_3$ . Причем, если  $\varepsilon_{\lambda} \sim \varepsilon_L$ , то  $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$ , а если, при этом, они имеют разные знаки, то  $|\varepsilon(\tau)| \leq |\varepsilon_0 (L+\lambda)/(L-\lambda)|$ , где  $\varepsilon_0 = \max\{\varepsilon_{\lambda}, \varepsilon_L\}$ . И, таким образом, при  $|L| \gg |\lambda|, \lambda L > 0$  получим  $p_1 \rightarrow 1, p_2 \rightarrow -\lambda/L \rightarrow 0$  и  $p_3 \rightarrow 0$ , и тогда  $\varepsilon(\tau) \sim \varepsilon_{\lambda}$ . В случае, если  $L \sim \lambda$  и  $\tau \rightarrow \infty$ , то при  $\varepsilon_{\lambda} \sim \varepsilon_L$  слагаемые  $p_1 \varepsilon_{\lambda}$  и  $p_2 \varepsilon_L$  компенсируют друг друга из-за разных знаков, а  $\varepsilon(\tau) \rightarrow p_3 \varepsilon_{\tau} \rightarrow 0$ . При этом ошибка будет резко возрастать, если  $\varepsilon_{\lambda} \sim -\varepsilon_L$ , так как отношение  $(L+\lambda)/(L-\lambda)$  становится большим при  $(L-\lambda) \rightarrow 0$ .

Наконец, рассмотрим поведение ошибок на характеристике  $\tilde{h}(\tau)$  в окрестности "шумовых" точек  $\tau = \lambda$  и  $\tau = L$ . В этих точках  $p_i(\lambda, L, \tau)$  имеют вертикальные асимптоты ( $\tau = \lambda$  - для  $p_1$ ,  $\tau = L$  - для  $p_2$  и  $\tau = \lambda, \tau = L$  - для  $p_3$ ) и поэтому ветви функций  $p_i(\lambda, L, \tau)$  в окрестностях этих точек изменяются тем больше, чем ближе к ним подходит точка  $\tau$ . В результате их вклад в ошибку  $\varepsilon(\tau)$  становится определяющим, и поэтому величина ошибки

коррелирует с поведением соответствующей функции вблизи своей асимптоты, что и подтверждается "тенью" на графике (рис. 4б, г). Если  $\tau \in (\lambda, L)$ , то в этом промежутке функция  $p_3(\lambda, L, \tau)$  достигает экстремума в точке  $\tau_3 = (L + \lambda)/2$ , т.е.  $p_3^3(\tau_3) = -4\lambda L / (L - \lambda)^2$ , откуда видно, что  $\varepsilon(\tau_3 \pm \delta)$  может резко возрасти при  $\lambda L > 0$  и, наоборот, уменьшиться при  $\lambda L < 0$  (где  $\delta$ -окрестность точки  $\tau_3$ ). Таким образом, подбирая параметры  $L$  и  $\lambda$ , можно "настраивать" операторные функции на подходящий режим, например, при распознавании линий или фильтрации от шумов.

Как и можно было предполагать, устойчивость оператора к ошибкам тем больше, чем больше "база" ( $|L - \lambda|$ ) для всех  $\tau$ , кроме  $\lambda - \delta < \tau < \lambda + \delta$  и  $L - \delta < \tau < L + \delta$ , где  $\delta(\lambda, L)$  - окрестность точек  $\tau = \lambda$  и  $\tau = L$ , а вблизи точки экстремума  $p_3(\lambda, L, \tau)$  она зависит также от знака  $\lambda L$ .

\*

В заключение покажем на примерах возможность применения полученных преобразований для решения прикладных задач. Среди них есть задача распознавания прямых и квадратичных траекторий по координатам точек, расположенных вдоль линий прямоугольного раstra. В плоскости изображения (рис. 3\*) на модели параболических траекторий брались искаженные ошибками (разброс точек на линии составляет до  $\pm 250$  отсчетов или 1% от полной ширины поля изображения) точки. Затем по выбранному реперу (три строки раstra) были отобраны

\*) Графическое представление результатов преобразований получено по программе PARASCOPE (язык Turbo Pascal, v. 3.0) при участии Тхай Ле Тханга.

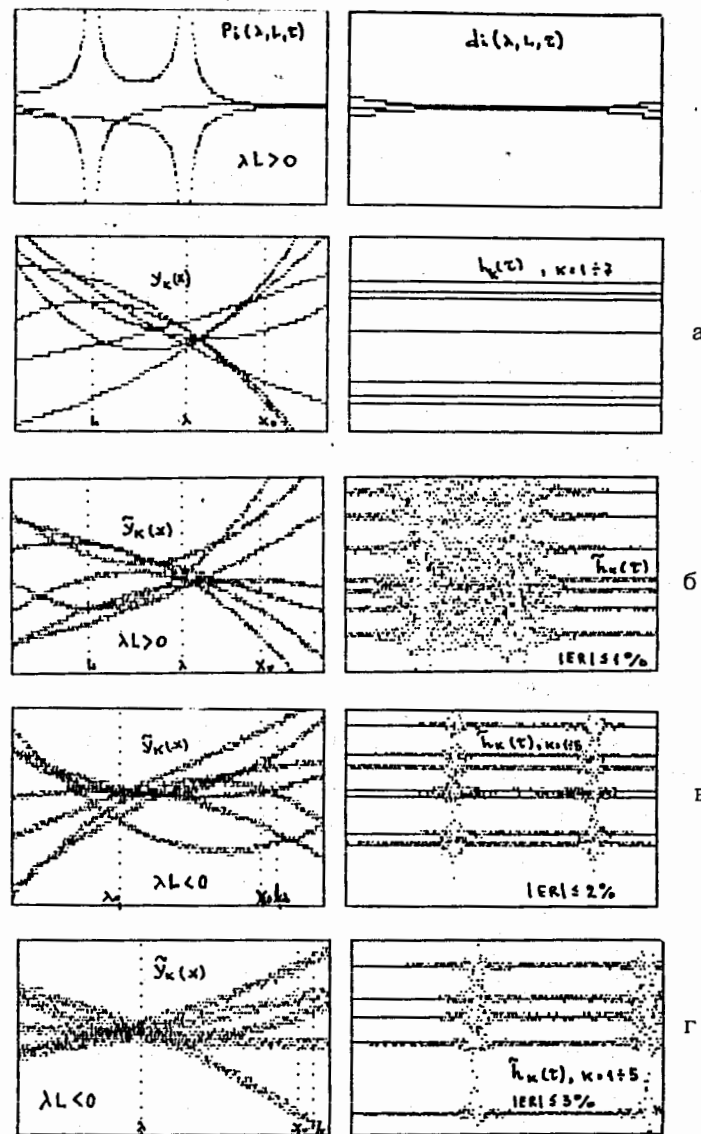


Рис. 3. Примеры преобразования параболических траекторий, заданных на координатной сетке  $x_i \in [1, 20000]$ ,  $y_i \in [1, 25000]$ ,  $\Delta x = 50$ , (а - без ошибок, б, в и г - с ошибками в исходных данных).

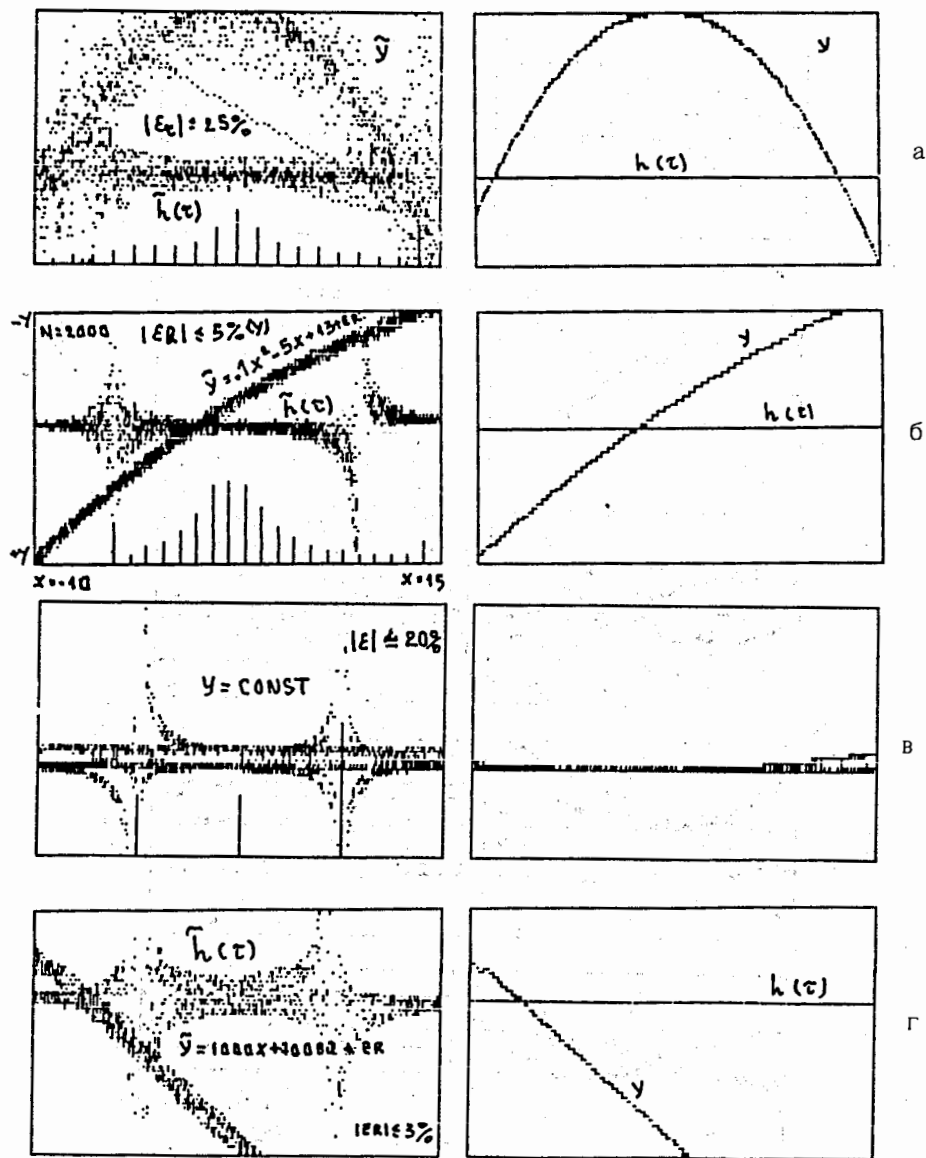


Рис.4. Применение ДПП для фильтрации точек на прямой и параболе: (а, б – участки парабол; в –  $y = \text{const}$  и г – участок прямой).

ординаты реперных точек на каждой траектории, а все остальные точки траекторий подвергались преобразованию  $\mathcal{D}[\bar{Y}_k(x_1)]$  ( $k$ -индекс кривой,  $l$ -индекс строки). В результате получено семейство характеристик  $\bar{h}_k(\tau)$  в виде искаженных ошибками прямых, параллельных оси  $ox$  с увеличением ошибок в зоне "шумовых" точек, которые теперь могут быть легко исключены гистограммированием.

На рис.4 приведены результаты применения ДПП для фильтрации точек на прямой и параболе с ошибками в ординатах точек, достигающими 3–25%. В нижней части графиков показаны спектры "частотного" повторения значений ошибок на характеристиках  $\bar{h}(\tau)$ . Отобранные по максимальному пику точки  $(\tau_0, h_0)$  с минимальным шумом, обратным оператором  $\mathcal{D}^{-1}[h_0]$  восстановлены на исходных кривых. Пример преобразования синусоиды приведен на рис.5, из которого видно, что ее образ имеет на заданном промежутке на два пика меньше, чем прообраз (эффект понижения степени многочлена на два).

Свойство устойчивости преобразований к измерительным ошибкам и приведенные примеры показывают, что с помощью этих ДПП можно создавать гибкие алгоритмы для автоматического отбора промежутков на оси  $ox$ , в которых некоторая гладкая на  $[a, b]$  функция  $f(x)$  может быть приближена с известной степенью точности параболой и тем самым представлена в виде суммы квадратичных сплайнов на всем промежутке  $[a, b]$ .

Сравнительно небольшое число арифметических операций, на которых осуществляются ДПП, и возможность прогноза точки с применением обратного преобразования могут служить основой

для создания быстрых алгоритмов поиска траекторий сложной, по сравнению с прямой или параболой, формы.

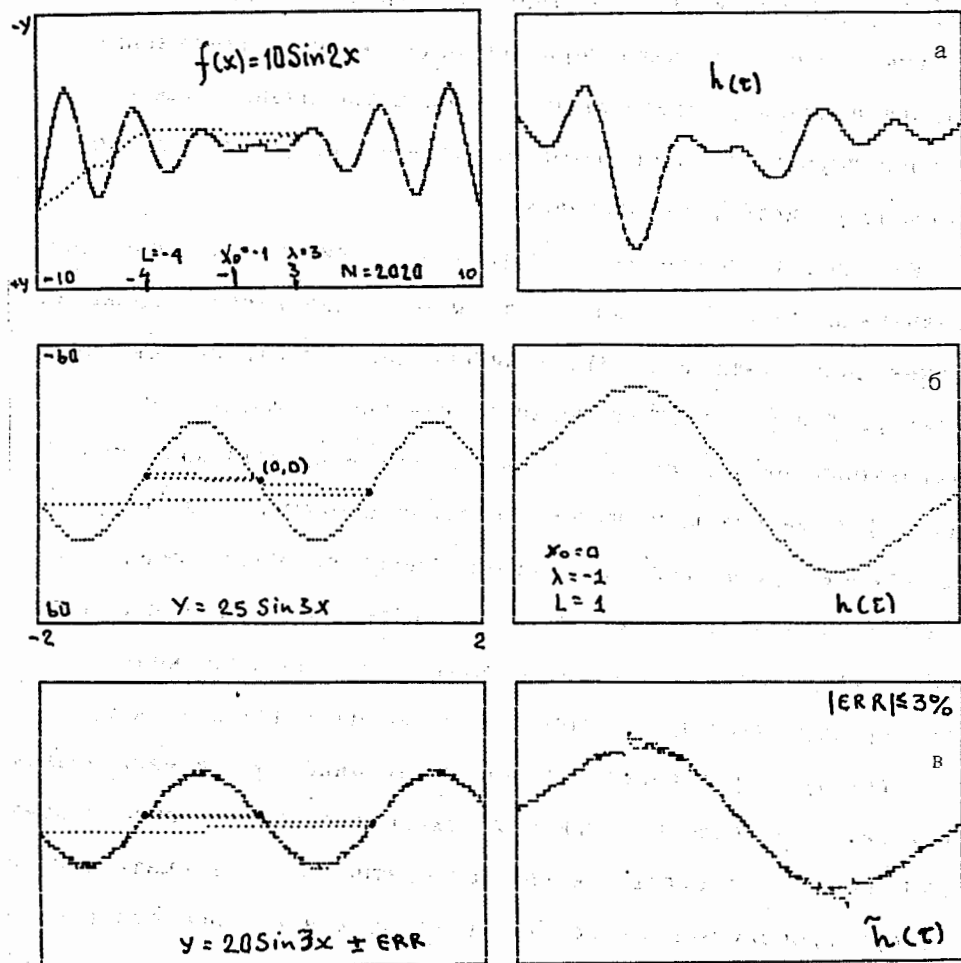


Рис.5. Графики исходных траекторий и полученных характеристик (а, б - без искажений, в - с ошибками в точках до  $\pm 3\%$ ).

Существует также много других задач, где ДПП могут быть полезными. Например, с помощью понижения степени многочлена на два можно сравнительно быстро оценивать по экспериментальным

точкам степень аппроксимирующего многочлена, не определяя его коэффициентов.

Литература

1. Клейн Ф. - Высшая геометрия. М.- Л. ГОНТИ, 1939.
2. Шилов Г.Е. - Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969.
3. Коллатц Л. - Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.
4. Saxon D.H. - The Tasks of Tracking and Vertex Location at Future Hadron Colliders. In: Proc. ECFA Study Week on Instrumentation Technology for High-Luminosity Hadron Colliders, vol.1, CERN 89-10, ECFA 89-10, 24 nov. 1989.
5. Дикусар Н.Д. - Метод определения параметров кривой второго порядка с помощью антисимметричного тензора. ОИЯИ, Р10-86-385, Дубна, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел 7 мая 1990 г.

Дикусар Н.Д.

P5-90-314

Дискретные проективные преобразования  
на координатной плоскости

Дан вывод и проведен анализ дискретных проективных преобразований /ДПП/, основанных на использовании известных свойств векторного произведения, компоненты которого определяются линейными и квадратичными элементами, вычисленными по абсциссам четверок точек. ДПП обладают свойством оптимальной линейной классификации точек на семействе квадратичных функций, понижают степень многочлена на две единицы, инвариантны относительно сдвига и устойчивы к ошибкам измерений всюду, за исключением двух "шумовых" точек. Приведены примеры использования ДПП в решении ряда практических задач обработки экспериментальных данных /распознавание и фильтрация трековой информации и др./.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1990

Перевод автора

Dikusar N.D.

P5-90-314

The Discrete Projective Transformations  
on the Coordinate Plane

The discrete projective transformations (DPT) have been found and analyzed. The transformations are based on the known properties of the vector production, the components of which are defined by linear and quadratic elements calculated on x-coordinates of fours of points. The properties of DPT are: optimal linear classification of points on the family of quadratic functions, decrease of the power of the multinomial on two, invariant with respect to the shift and stable to errors of measurements everywhere, except two "noise" points. The examples of using DPT on solving some practical problems of the experimental data processing are given (pattern recognition and filtration of points on the samples of tracks and so on).

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1990