90-170

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-90-170

П.Е.Жидков

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОЛЯРОНА

Направлено в журнал "Математический сборник"

1990

I$^{\circ}$. В работах [I–4] в связи с изучением одной из актуальных задач современной физики – проблемы полярона – была получена следующая система уравнений, моделирующая его поведение в предельном случае сильной связи:

$$u'' + \frac{2}{x}u' = m_1 u - \frac{m_2}{x}u - m_3 u v, \qquad (I)$$

$$v'' + \frac{2}{x}v' = -u^2, \qquad x>0 \qquad (2)$$

с краевыми условиями

$$2u'(0) + m_2 u(0) = v'(0) = u(+\infty) = v(+\infty) = 0, \qquad (3)$$

где m_i – параметры.

После замены $y = xu$, $z = xv$ система (I)–(2) преобразуется к виду

$$y'' = m_1 y - \frac{m_2}{x}y - \frac{m_3}{x}yz, \qquad x>0, \qquad (4)$$

$$z'' = -\frac{y^2}{x}. \qquad (5)$$

Дополним систему (4)–(5) граничными условиями

$$y(0) = z(0) = y(+\infty) = 0, \qquad |z(+\infty)| < \infty. \qquad (6)$$

Заметим, что заменой $\bar{x} = tx$, $\bar{y} = ky$, $\bar{z} = k^2 z$ можно добиться того, что $|m_2| = 2$. Кроме того, нижеследующие результаты справедливы для любого $m_3 > 0$, поэтому будем рассматривать систему уравнений

$$y'' = m_1 y - \frac{2m_2}{x}y - \frac{yz}{x}, \qquad x>0, \qquad (4^{I})$$

$$z'' = -\frac{y^2}{x} \qquad (5^{I})$$

при граничных условиях

$$y(0) = z(0) = y(+\infty) = 0, \qquad |z(+\infty)| < \infty, \qquad (6^{I})$$

предполагая, что $|m_2| = 1$.

Формально из уравнения (5^{I}) получим

$$z(x) = \int_0^{\infty} G_1(x,s)\, y^2(s)\, ds, \qquad (7)$$

где $G_1(x,s)=\min\{1;\frac{x}{s}\}$, следовательно, приходим к одному интегродифференциальному уравнению

$$y'' = m_1 y - 2\frac{m_2}{x} y - y(x)\int_0^\infty G(x,s)\, y^2(s)\, ds,\ x>0, \quad (8)$$

$$y(0)=y(+\infty)=0,\quad G(x,s)=\frac{1}{x}G_1(x,s)=\min\left\{\frac{1}{x};\frac{1}{s}\right\}. \quad (9)$$

Отметим еще, что к задаче (8)-(9) приводится уравнение Хартри-Фока самосогласованного поля для систем многих частиц, следующее из метода вторичного квантования [5,6], для потенциалов специального вида. Уравнение, подобное (8)-(9), изучалось в работах [7,8]. В работе [7] доказано существование счетного множества решений, если $m_2=0$, но метод отличается от приводимого здесь, а в работе [8] для задачи (8)-(9) с $m_2=0$ доказано существование положительного решения.

Рассмотрим еще функционал

$$J(y)=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}y'^2+\frac{m_1}{2}y^2-\frac{m_2}{x}y^2-\frac{1}{4}y^2(x)\int_0^\infty G(x,s)\,y^2(s)\,ds\right\}dx,$$

критические точки которого формально являются решениями уравнения (8). Введем пространство $X=\{y \mid y\in W_2^1(0,\infty),\ y(0)=0\}$. В дальнейшем увидим, что J определен на X.

Сформулируем результаты настоящей работы.

Теорема I

Пусть $m_1 \begin{cases} > 1, & \text{если } m_2 = 1, \\ > 0, & \text{если } m_2 = -1. \end{cases}$

Тогда существует $(\bar{y},\bar{z})$ -решение (4')-(6'), причем $\bar{y}(x)\not\equiv 0$, $\bar{y}(x)\geqslant 0$, $\bar{z}(x)>0$.

Теорема 2

Пусть $m_1>0$. Тогда при любом m_2 задача (8)-(9) имеет счетное множество различных решений $\{y_n(x)\}_{n=1,2,\dots}\subset X$, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} J(y_n)=+\infty$. Каждому y_n соответствует решение (4')-(6').

Идейно методы доказательства близки к методу сферического расслоения пространства С.И. Похожаева /9/.

2^0. Здесь докажем некоторые вспомогательные результаты. Положим $J(y)=J_1(y)-J_2(y)-J_3(y)$, где

$$J_1(y)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\{y'^2(x)+m_1 y^2(x)\}\,dx,\quad J_2(y)=m_2\int_0^\infty\frac{y^2(x)}{x}\,dx,$$

$$J_3(y)=\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,y)\,y^2(x)\,y^2(s)\,dx\,ds.$$

Норму в X введем так: $\|y\|^2 = \int_0^\infty \{y'^2(x) + my^2(x)\} dx$.
Хорошо известно, что любая $y \in X$ принадлежит $C^{1/2}(0,\infty)$, причем

$$|y(x_1) - y(x_2)| \le \|y\| \cdot |x_1 - x_2|^{1/2} \qquad (10)$$

для любых $x_1, x_2 \geq 0$.

Лемма I

Функционал $J_2(y)$ слабо непрерывен на X.

Доказательство

Пусть $y_n \to y_0$ слабо в X. Тогда $\{y_n\}$ ограничена в X [10]. Рассмотрим $J(y_n) - J(y_0) = m_2 \int_0^\infty \frac{[y_n^2(x) - y_0^2(x)]}{x} dx.$
В силу ограниченности в X и вложения X в $C(0,\infty)$ существует $M>0$ такое, что $2\|y_n\| + |y_n(x)| \le M$, $x \in (0,\infty)$, $n = 1,2,3, \dots$

Для произвольных a, b: $0 < a < b < +\infty$, имеем

$$|J_2(y_n) - J_2(y_0)| \le |m_2| \int_0^a \frac{|y_n(x)|^2 + |y_0(x)|^2}{x} dx +$$

$$+ C_1(a,b) \|y_n - y_0\|_{C(a,b)} + \frac{|m_2|}{b} (\|y_n\|^2 + \|y_0\|^2),$$

где $C_1 > 0$ не зависит от n. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Выберем $a>0$ из условия $\frac{|m_2| Ma}{2} < \frac{\varepsilon}{3}$, $b > a$ выберем из условия $\frac{M|m_2|}{b} < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда в силу теоремы вложения найдется номер $N>0$ такой, что

$$C_1(a,b) \|y_n - y_0\|_{C(a,b)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

при $n \geq N$, откуда при $n \geq N$ (с учетом (10))

$$|J_2(y_n) - J_2(y_0)| < \varepsilon.$$

Лемма I доказана.

Лемма 2

Функционал $J_2(y) \in C^1(X)$, $J_2'(y)\varphi = m_2 \int_0^\infty \frac{y(x)\varphi(x)}{x} dx$ для любого $\varphi \in X$. Функционал $J_2'(y)\varphi$ слабо непрерывен по y при любом фиксированном φ.

Доказательство

Имеем $\frac{1}{t}[J_2(y+t\varphi) - J_2(y)] = m_2 \int_0^\infty \left\{ \frac{y\varphi}{x} + \frac{t\varphi^2}{2x} \right\} dx.$

Те же рассуждения, что и в доказательстве леммы I , показывают, что $\int_0^\infty \frac{y\varphi}{x}\,dx$ и $\int_0^\infty \frac{\varphi^2}{2x}\,dx$ определены, причем последний из этих интегралов может быть оценен постоянной, зависящей лишь от $\|\varphi\|$, поэтому

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[J_2(y+t\varphi) - J_2(y)\right] = m_2 \int_0^\infty \frac{y\varphi}{x}\,dx ,$$

причем сходимость равномерная по любому шару $\|\varphi\| \le const$, следовательно, $J_2(y)$ дифференцируем на X .

Докажем, что $J_2'(y) \in C(X)$. Рассмотрим

$$\| J_2'(y_1) - J_2'(y_2)\| = |m_2| \sup_{\|\varphi\|=1} |J_2'(y_1)\varphi - J_2'(y_2)\varphi| \le$$

$$\le |m_2| \sup_{\|\varphi\|=1} \int_0^\infty \frac{|y_1(x) - y_2(x)|\,|\varphi(x)|}{x}\,dx.$$

Отсюда методами из доказательства леммы I получаем, что $\lim_{y_2\to y_1} \|J_2'(y_2) - J_2'(y_1)\| = 0$, т.е. непрерывность $J_2'(y)$. Методом леммы 1 доказывается слабая непрерывность $J_2'(y)\varphi$ по y .

Лемма 2 доказана.

Лемма 3

Функционал $J_3(y)$ определен и слабо непрерывен на X.

Доказательство

Поскольку $G(x,s) = \min\left\{\frac{1}{x}; \frac{1}{s}\right\}$, функционал $J_3(y)$ определен в силу леммы I :

$$J_3(y) \le \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{y^2(x)}{x}\,dx \int_0^\infty y^2(s)\,ds . \qquad \text{(II)}$$

Пусть $y_n \to y_0$ слабо в X . Рассмотрим

$$|J_3(y_n) - J_3(y_0)| = \frac{1}{4}\left| \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,s)\left[y_n^2(x) y_n^2(s) - y_0^2(x)\, y_0^2(s)\right] dx\,ds\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left| \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,s)\left\{ y_n^2(x)\left[y_n^2(s) - y_0^2(s)\right] + y_0^2(s)\left[y_n^2(x) - y_0^2(x)\right]\right\} dx\,ds\right| \le$$

$$\leq \frac{1}{4}\int_0^\infty y_n^2(x)\,dx \left|\int_0^\infty \frac{y_n^2(s)-y_0^2(s)}{s}\,ds\right| + \frac{1}{4}\int_0^\infty y_0^2(s)\,ds \left|\int_0^\infty \frac{[y_n^2(x)-y_0^2(x)]}{x}\,dx\right| \to$$

$\longrightarrow 0$

в силу леммы I.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4

Функционал $J_3(y) \in C^1(X)$, $J_3'(y)\varphi = \int_0^\infty y(x)\varphi(x)\int_0^\infty G(x,s)\,y^2(s)\,ds\,dx$ для любого $\varphi \in X$. Функционал $J_3'(y)\varphi$ слабо непрерывен по y при любом фиксированном φ.

Доказательство

Рассмотрим $\frac{1}{t}\left[J_3(y+t\varphi) - J_3(y)\right] =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,s)\left[y(x)\varphi(x)y^2(s) + y^2(x)\varphi(s)y(s)\right]dx\,ds \; + \qquad (12)$$

$$+ \frac{1}{4}t\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,s)\left[\varphi^2(x)y^2(s) + \varphi^2(s)y^2(x)\right]dx\,ds + t\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,s)\varphi(x)\varphi(s)y(x)y(s)\,dx\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2}t^2\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,s)\left[\varphi(x)y(x)\varphi^2(s) + \varphi(s)y(s)\varphi^2(x)\right]dx\,ds + \frac{t^3}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,s)\varphi^2(x)\varphi^2(s)\,dx\,ds$$

Первый интеграл справа в этом равенстве в силу симметричности G_∞: $G(x,s) = G(s,x)$ приводится к виду $\int_0^\infty y(x)\varphi(x)\,dx \cdot \int_0^\infty G(x,s)\,y^2(s)\,ds$, а для остальных легко устанавливается (так же, как неравенство (II)), что они определены, поэтому слабая производная $J_3(y)$ равна

$$J_3'(y)\varphi = \int_0^\infty y(x)\varphi(x)\left[\int_0^\infty G(x,s)\,y^2(s)\,ds\right]dx.$$

Рассмотрим

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,s)\,\varphi(x)\varphi(s)\,y(x)y(s)\,dx\,ds\right| \leq$$

$$\int_0^\infty \frac{|y(x)\varphi(x)|}{x}\,dx \int_0^\infty |y(s)\varphi(s)|\,ds \leq$$

[в силу леммы I]

$C\|\varphi\|^2\ \|y\|^2$, где $C = \mathrm{const} > 0$ – не зависит от φ.

Аналогично рассматривая остальные слагаемые в правой части (I2), получаем, что функционал $J_3(y)$ сильно дифференцируем.

Докажем непрерывность $J_3'(y)$. Рассмотрим

$$\|\mathcal{I}_3'(y_1)-\mathcal{I}_3'(y_2)\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\mathcal{I}_3'(y_1) - \mathcal{I}_3'(y_2)| =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|=1} \left| \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,s)\,\varphi(x)\left[y_1(x)\, y_1^2(s) - y_2(x)\, y_2^2(s)\right] dx\, ds \right| \le$$

$$\le \sup_{\|\varphi\|=1} \left\{ \left| \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,s)\,\varphi(x)\, y_1(x)\left[y_1^2(s) - y_2^2(s)\right] dx\, ds \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,s)\,\varphi(x)\, y_2^2(s)\left[y_1(x) - y_2(x)\right] dx\, ds \right| \right\} \le$$

$$\le \sup_{\|\varphi\|=1} \int_0^\infty |\varphi(x)|\, |y_1(x)|\, dx \left| \int_0^\infty \frac{[y_1^2(s) - y_2^2(s)]}{s}\, ds \right| +$$

$$+ \sup_{\|\varphi\|=1} \int_0^\infty |\varphi(x)|\, |y_1(x) - y_2(x)|\, dx \int_0^\infty \frac{y_2^2(s)}{s}\, ds \to 0$$

при $y_2 \to y_1$ в силу леммы I.
Слабая непрерывность функционала $\mathcal{I}_3'(y)\varphi$ по y доказывается методами леммы 3.

Лемма 4 доказана.

3°. В дальнейшем потребуются сведения из теории критических точек гладкого функционала в банаховом пространстве. Итак, пусть $I \in C^1(E, R)$, E – банахово пространство с нормой $\|u\|$. Положим $B_r = \{u \in E \mid \|u\| < r\}$, $S_r = \partial B_r$, B_1 и S_1 обозначим через B и S соответственно.

Пусть $u \in S$.

Рассмотрим уравнение

$$I_2'(\tau u) = 0. \qquad (13)$$

Следующая теорема является вариантом теории критических точек в форме Похожаева.

Теорема 3 [9]

Пусть для $u \in S$ из некоторой окрестности точки $u_0 \in S$ уравнение (13) относительно τ имеет изолированное гладкое решение $\tau = \tau(u) > 0$. Пусть точка u_0 является локальным экстремумом функционала $I(\tau(u)u)$, рассматриваемого на S. Тогда $\tau(u_0)u_0$ – критическая точка I на E.

Эта теорема является аналогом леммы о горном перевале [11].

Для дальнейшего нам потребуется еще одна теорема. Пусть Σ –множество замкнутых, симметричных относительно нуля подмножеств $E - \{0\}$. Определим отображение $\gamma : \Sigma \to N$: $\gamma(A) = n$, если существует нечетное $\varphi \in C(A, R^n - \{0\})$ и n –минимальное целое неотрицательное, обладающее этим свойством.

Лемма 5 [12]

Пусть $A, B \in \Sigma$. Тогда справедливы свойства:

1. Если существует нечетное $f \in C(A, B)$, то $\gamma(A) \le \gamma(B)$.
2. Если существует нечетное гомеоморфное отображение A на B, то $\gamma(A) = \gamma(B)$.
3. $\gamma(A \cup B) \le \gamma(A) + \gamma(B)$.
4. Если $\gamma(B) > 0$, то $\gamma(\overline{A - B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.
5. Если A – компакт, то $\gamma(A) < \infty$ и существует $\delta > 0$ такое, что $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$, где $N_\delta(A) = \{u \in E \mid dist(u, A) \le \delta\}$.
6. Если $\gamma(A) = k$, то для всех $j < k$ существуют $A_j \subset A$ такие, что $\gamma(A_j) = j$.
7. Пусть E_n, E_{n+1} – n –мерное и $(n+1)$ –мерное подпространства пространства E, $E_n \subset E_{n+1}$. Пусть $A \subset E_n$, $\gamma(A) = j$. Тогда существует $B \in \Sigma$, причем $B \subset E_{n+1}$, такое, что $A \subset B$ и $\gamma(B) = j+1$.
8. Если A является образом при нечетном гомеоморфном отображении сферы, ограничивающей единичный шар с центром в нуле из R^n, то $\gamma(A) = n$.

Теорема 4 [12]

Пусть $I \in C^1(E, R)$, $I(0) = 0$, выполнено условие Пале – Смейла:

(I) произвольная последовательность $\{u_m\} \subset E$ такая, что $0 < I(u_m) < M = const$, $I'(u_m) \to 0$ при $m \to \infty$ компактна.

Пусть

$$d_i = \sup_{A\in\Sigma,\ \gamma(A)\geq i}\ \inf_{u\in A} I(u)$$

и пусть $K_d = \{u\in E \mid I(u)=d,\ \ I'(u)=0\}$. Тогда, если $0<d_i<\infty$, то K_{d_i} непусто и компактно. Кроме того, если $0 = d=d_i=\ldots=d_{i+r}<\infty$, то $\gamma(K_d)\geq r+1$.

4^0. Докажем, используя теорему 3, теорему I. Легко убедиться, что на S уравнение $J'_r(ry)=0$ имеет единственное положительное решение

$$r=r(y)=\left\{\frac{\int_0^\infty\left[y'^2(x)+m_1y^2(x)-\frac{2m_2}{x}y^2(x)\right]dx}{\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,s)\ y^2(x)\,y^2(s)\,dx\,ds}\right\}^{1/2},$$

которое гладко зависит от $y\in S$. Умножая тождество $J'_r(r(y)y)=0$ на $r(y)$, получим

$$\int_0^\infty\left[u'^2(x)+m_1u^2(x)-\frac{2m_2}{x}u^2(x)\right]dx=\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,s)\,u^2(x)\,u^2(s)\,dx\,ds, \quad (I4)$$

где $u=r(y)y$. Обозначим через M множество функций $u\in\Lambda$, $u\not\equiv 0$, удовлетворяющих (I4). Из (I4) вытекает, что для $y\in M$

$$J(y)=J_3(y)=\frac{1}{2}\left[J_1(y)-J_2(y)\right]. \quad (I5)$$

Для любого $y\in\Lambda$ имеет место неравенство

$$J_1(y)-J_2(y)\geq C\,\|y\|^2, \quad (I6)$$

где $C=\mathrm{const}>0$. Действительно, при $m_2=-1$ это неравенство очевидно, а при $m_2=1$ минимальным собственным значением оператора $-\frac{d^2}{dx^2}-\frac{2}{x}$ является $\lambda=-1$, а поскольку $m_1>1$, опять справедливо (I6).

В силу леммы 3, выражения для $r(y)$, $y\in S$ и неравенства (I6) получаем, что существует $C_1=\mathrm{const}>0$ такое, что

$$\|y\|\geq C_1$$

для всех $y\in M$.

Пусть $\{y_n\}$ – минимизирующая последовательность для $J(y)$ на M. В силу последнего неравенства и (I5)

$$0 < C_1 \leq \|y_n\| \leq C_2,$$

где $C_2 = const > 0$. Обозначим ее слабо сходящуюся подпоследовательность снова через $\{y_n\}$. Не ограничивая общности распределений, можем считать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| > 0$. Обозначим через y_0 слабый предел последовательности $\{y_n\}$. Хорошо известно [I0], что $\|y_0\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|$. В силу лемм I и 3 $\lim\limits_{n\to\infty} J_2(y_n) = J_2(y_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} J_3(y_n) = J_3(y_0)$. Предположим, что $\|y_0\| < \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|$. Тогда, очевидно, существует $\tau \in (0,1)$ такое, что $\tau y_0 \in M$. С другой стороны, в силу (I5) $J(\tau y_0) = J_3(\tau y_0) < J_3(y_0) = \lim\limits_{n\to\infty} J_3(y_n) = \inf\limits_{y\in M} J(y)$. Но $\tau y_0 \in M$ и получаем противоречие. Таким образом, $y_0 \in M$ и $J(y_0) = \inf\limits_{y\in M} J(y)$.

Заметим, что $|y_0| \in M$ и $J(|y_0|) = J(y_0)$. Поэтому $J(|y_0|) = \min\limits_{y\in M} J(y)$ и по теореме 3 $|y_0|$ – критическая точка функционала на X.

Поскольку $|y_0| \in X$, $|y_0| \in C^{1/2}(0,\infty)$, поэтому $|y_0|$ – классическое решение задачи (8)-(9). Кроме того, для $z(x)$ из (7) имеем $|z(+\infty)| < \infty$.

Теорема I доказана.

5°. Используя теорему 4, докажем теорему 2. Пусть $\{e_n\}$ – ортонормированный базис в X. Рассмотрим $X_n = span\{e_1, \ldots, e_n\}$. Положим $J|_{X_n} = J_n$. Для J_n выполнены условия теоремы 4 ((I) следует из ограниченности множества $\{y \in X_n \mid J_n(y) > 0\}$). Положим

$$C_{kn} = \sup_{A \subset X_n,\ \gamma(A) \geq n-k+1} \ \inf_{y\in A} J_n(y).$$

<u>Лемма 6</u>

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $C_{k,n+1} \leq C_{kn}$.

<u>Доказательство</u>

Нетрудно проверить, что если $A \in \Sigma$, $A \subset X_{n+1}$ и $\gamma(A) \geq n-k+2$, то $A \cap X_n$ – допустимое для J_n в силу леммы 5, $\gamma(A \cap X_n) \geq n-k+1$. Отсюда

$$\inf_{y\in A} J_{n+1}(y) \leq \inf_{y \in A\cap X_n} J_{n+1}(y) = \inf_{y\in A\cap X_n} J_n(y).$$

Любое $B \subset X_n$, $\gamma(B) \geqslant n-k+1$ может быть расширено до $B_1 \subset X_{n+1}$: $\gamma(B_1) \geqslant n-k+2$.

Лемма 6 доказана.

Положим $c_k = \lim\limits_{n\to\infty} c_{kn}$.

Лемма 7

Имеет место неравенство $c_k \leq c_{k+1}$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = +\infty$.

Доказательство

Неравенство $c_k \leq c_{k+1}$ сразу следует из очевидного неравенства $c_{kn} \geqslant c_{k-1,n}$. Докажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = +\infty$.

Рассмотрим последовательность $B_{kn} = \{y \in \operatorname{span}\{e_{k},\dots,e_n\} \mid \|y\| \leq 1\}$, $S_{kn} = \partial B_{kn}$. В силу лемм I и 3

$$\max_{y \in B_{kn}} \{|J_2(y)| + |J_3(y)|\} \to 0 \qquad (k, n \to \infty). \tag{I7}$$

Поэтому существует номер $K>0$ такой, что при $k \geqslant K$, $n \geqslant k+1$ $c_{kn} > 0$. Кроме того,

$$c_{kn} = \sup_{A \subset X_n, \gamma(A) \geqslant n-k+1} \inf_{y \in A} J_n(y) \geqslant \inf_{y \in A_{kn}} J_n(y), \tag{I8}$$

где

$$A_{kn} = \{\bar{y} \mid J(\bar{y}) = \max_{\tau > 0} J(\tau y), \quad y \in \operatorname{span}\{e_k, \dots, e_n\}\}.$$

В силу (I7) и (I8) $\inf\limits_{y \in A_{kn}} J_n(y) \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $k \geqslant K$, $n \geqslant k+1$.

Лемма 7 доказана.

Из доказательства леммы следует, что $c_{kn} > 0$ для достаточно больших номеров k , n , т.е. $K_{c_{kn}}$ непусто. Обозначим y_{kn} критическую точку J_n : $y_{kn} \in K_{c_{kn}}$, $J_n(y_{kn}) = 0$.

Докажем, что при $k \geqslant K$ (K – тот номер, о котором говорилось в доказательстве леммы 7), последовательности $\{y_{kn}\}_{n=k+1,k+2,\dots}$ сходятся в X . Сначала докажем их ограниченность $\|y_{kn}\| \leq D_k$.

Лемма 8

Для любого $\mathcal{D}_1>0$ существует $\mathcal{D}_2>0$ такое, что
$J_2(y)\le \mathcal{D}_2\,[J_3(y)]^{1/2}+\mathcal{D}_1\|y\|^2$ для всех $y\in X$.

Доказательство

Для любого $a>0$, $y\in X$ имеем

$$\frac{1}{|m_2|}J_2(y)=\int_0^a\frac{y^2(x)}{x}dx+\int_a^{+\infty}\frac{y^2(x)}{x}dx\le a\|y\|^2+\int_a^{+\infty}\frac{y^2(x)}{x}dx\le$$

$$\le a\|y\|^2+\left\{\int_a^{+\infty}\frac{y^2(x)}{x}dx\int_a^{+\infty}\frac{y^2(s)}{s}ds\right\}^{1/2}\le$$

$$\le a\|y\|+\left\{\frac{1}{a}\int_a^{+\infty}\int_a^{+\infty}\min\left\{\frac{1}{x};\frac{1}{s}\right\}y^2(x)\,y^2(s)\,dx\,ds\right\}^{1/2}\le$$

$$\le a\|y\|^2+\frac{1}{a^{1/2}}\left[J_3(y)\right]^{1/2}.$$

Положим $\mathcal{D}_1=a$, $\mathcal{D}_2=\frac{1}{a^{1/2}}$, тогда

Лемма 8 доказана.

Докажем, что последовательности $\{y_{kn}\}_{n=k+1,k+2,k+3,\dots}$ ограничены для $k\ge k$. Рассмотрим $J'_n(y_{kn})\,y_{kn}=$

$$=\int_0^{\infty}\left\{y'^2_{kn}+m_1y^2_{kn}-\frac{2m_2}{x}y^2_{kn}-y^2_{kn}(x)\int_0^{\infty}G(x,s)\,y^2_{kn}(s)\,ds\right\}dx=0.\qquad (19)$$

В силу леммы 6 $0<J_n(y_{kn})<C_k$, где $C_k=\mathrm{const}>0$, $k\ge k$, k достаточно велико. Из этого неравенства и (19) получаем

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}G(x,s)\,y^2_{kn}(x)\,y^2_{kn}(s)\,dx\,ds\le C'_k,\qquad (20)$$

где $C'_k=\mathrm{const}>0$. Далее, $|J_2(y_{kn})|\le\mathcal{D}_2J_3^{1/2}(y_{kn})+\mathcal{D}_1\|y_{kn}\|^2$, причем в силу леммы 8 $\mathcal{D}_1>0$ можно выбрать сколь угодно малым. Возьмем $\mathcal{D}_1<\min\{1,m_1\}$, тогда из неравенства (20) и ограниченности $J(y_{kn})$ получим:

$$\|y_{kn}\|\le C''_k$$

для $k\ge k$, где $C''_k=\mathrm{const}>0$ – не зависит от n.

Таким образом, при $k\ge k$ последовательности $\{y_{kn}\}$ $(n=k+1,k+2,\dots)$ слабо компактны. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать их слабо сходящимися, пусть y_k – их слабые пределы. Положим $l(u,v) = \int_0^\infty \{ u'(x) v'(x) + m_1 u(x) v(x) \} dx$, тогда для любого $\varphi \in X_n$ в силу того, что y_{kn} – критическая точка

$$l(y_{kn}, \varphi) = \int_0^\infty y_{kn}(x)\varphi(x)\int_0^\infty G(x,s) y^2(s) ds\, dx + 2m_2 \int_0^\infty \frac{y_{kn}(x)\varphi(x)}{x} dx. \quad (2I)$$

В силу лемм 5 и 6, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$l(y_k, \varphi) = \int_0^\infty y_k(x)\varphi(x)\left(\int_0^\infty G(x,s) y_k^2(s) ds\right) dx + 2m_2 \int_0^\infty \frac{y_k(x)\varphi(x)}{x} dx. \quad (22)$$

Таким образом, y_k – слабые решения задачи (8)-(9). При $\varphi = y_k$ из (22) получаем

$$\|y_k\|^2 = l(y_k, y_k) = \int_0^\infty y_k^2(x) \int_0^\infty G(x,s) y_k^2(s) ds\, dx + 2m_2 \int_0^\infty \frac{y_k^2(x)}{x} dx.$$

Докажем, что $y_{kn} \to y_k$ сильно $(k \geq K)$. Имеем в силу (2I)

$$0 \leq \| y_{kn} - y_k \|^2 = \|y_{kn}\|^2 + \|y_k\|^2 - 2l(y_{kn}, y_k) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,s)\, y_{kn}^2(x)\, y_{kn}^2(s)\, dx\, ds + 2m_2 \int_0^\infty \frac{y_{kn}^2(x)}{x} dx + \|y_k\|^2 -$$

$$- 2l(y_{kn}, y_k).$$

В силу лемм I и 3 и слабой непрерывности $l(u,v)$ по каждому переменному выражение в правой части стремится к нулю при $n \to \infty$, следовательно, $\lim_{n\to\infty} y_{kn} = y_k$ при $k \geq K$. Следовательно, $C_k = J(y_k)$. Как и при доказательстве теоремы I, доказывается, что y_k соответствует сильное решение системы (4^I) – (6^I).

Теорема 2 доказана.

В заключение докажем, что решению (y, z), $y \in X$ системы (4)-(6) соответствует решение (u, v) системы (I)-(3). Во-первых, поскольку $|z(+\infty)| < \infty$, получаем $v(+\infty) = 0$. Далее, $|y(x)| \leq C x^{1/2}$, $|z(x)| \leq C x$ для $x \in [0,1]$, где $C = \mathrm{const} > 0$, поэтому в силу уравнения (4) $|y''(x)| \leq C x^{-1/2}$ при $x \in [0,1]$, где $C = \mathrm{const} > 0$. Отсюда, учитывая, что $y(0) = 0$, получаем: $|y(x)| \leq C x$ при $x \in [0,1]$, $C = \mathrm{const} > 0$.

Используя опять уравнения (4),(5), получаем из указанных оценок: $|y''(x)|\le C$, $|z''(x)|\le C$ при $x\in(0,1]$, $C=const>0$. Отсюда следует, что существуют пределы $y'(0)=\lim\limits_{x\to+0} y'(x)$, $z'(0)=\lim\limits_{x\to+0} z'(x)$. Опять из уравнений (4),(5) получаем, что существуют $y''(0)=\lim\limits_{x\to+0} y''(x)$ и $z''(0)=\lim\limits_{x\to+0} z''(x)$.

Обратимся к системе уравнений (I) – (3). Функции $u(x)=\frac{y(x)}{x}$, $v(x)=\frac{z(x)}{x}$, очевидно, удовлетворяют ей при $x>0$. Кроме того, $u(+\infty)=v(+\infty)=0$. Проверим граничные условия (3). По правилу Лопиталя существуют $u(0)=\lim\limits_{x\to+0} u(x)=y'(0)$ и $v(0)=\lim\limits_{x\to+0} v(x)=z'(0)$.

Дифференцируя и разлагая по формуле Тейлора, получаем

$$u'(x)=-\frac{y(x)}{x^2}+\frac{y'(x)}{x}=y''(\xi_1)-\frac{1}{2}y''(\xi_2),\quad v'(x)=z''(\xi_1')-\frac{1}{2}z''(\xi_2'),$$

где $0<\xi_1,\xi_2,\xi_1',\xi_2'<x$, поэтому существуют пределы $u'(0)=\lim\limits_{x\to+0} u'(x)$ и $v'(0)=\lim\limits_{x\to+0} v'(x)$.

Таким образом, определено $A=2u'(0)+m_2u(0)$. Предположим, что $A\ne0$. Тогда из уравнения (I) следует, что $u''(x)\sim-\frac{A}{x}$ при $x\to+0$, поэтому $u'(0)$ не определено, т.е. получаем противоречие. Поэтому $A=0$. Аналогично проверяется, что $v'(0)=0$.

Автор выражает благодарность В.Д. Лахно за постановку задачи и И.В. Амирханову за полезные обсуждения.

Литература

I. С.Н. Горшков, В.Д. Лахно, К. Родригес, В.К. Федянин – Об обобщенном функциональном подходе к проблеме полярона. Докл. АН СССР, 1984, т. 278, № 6, с. 1343-1347.

2. Лахно В.Д.–Обобщенный функциональный подход в теории F – центров . Препринт ОНТИ НЦБИ, Пущино, 1985.

3. Лахно В.Д., Чуев Г.Н.–Связанные состояния фононов в адиабатической теории полярона и F – центра . Препринт ОНТИ НЦБИ, Пущино, 1987.

4. Амирханов И.В. и др.–Численное исследование одной спектральной задачи в оптической модели полярона. Препринт ОИЯИ Р5-85-445, Дубна, ОИЯИ, 1985.

5. Боголюбов Н.Н.–Лекции по квантовой статистике. Собрание трудов. т. 2, Киев: Наукова думка, 1970.

6. Блохинцев Д.И.–Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.

7. Lions P.L.–Choquard equation and related questions // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. 1980. vol.4. No 6, p.1063-1072.

8. Lieb E.H.–Existence and uniqueness of minimizing solution of the Choquard's nonlinear equation // Stud. in Appl.Math. 1977. vol.57. No.2, p.93-105.

9. Похожаев С.И.–Об одном подходе к нелинейным уравнениям. Докл. АН СССР, 1973, т. 247, № 6, с. 1327-1331.

10. Люстерник Л.А., Соболев В.И.–Элементы функционального анализа. М.:Наука, 1965.

11. Ambrosetti A., Rabinowitz P.H.–Dual variational methods in critical point theory and applications // J.of Funct.Anal. 1973. vol. 14. p.349-381.

12. Clark D.C.–A variant of the Lusternik-Schnirelman theory // Indiana Univ.Math.J. 1972. vol.22. No 1. p.65-74.

13. Титчмарш Э.Ч.–Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. ч. I, М.:ИЛ, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 марта 1990 года.