СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 8969

А.Б.Жижченко

О ГОМОЛОГИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАССЛОЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В СЛОЯХ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

1975

P5 - 8969

А.Б.Жижченко

О ГОМОЛОГИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАССЛОЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В СЛОЯХ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

I. Рассматривается неособое проективное комплексное алгебраическое многообразие W, $\dim_{\mathbb{C}} W = n$. Исследуем собственное отображение $f: W \to P^1$, где P^1 – комплексная проективная прямая. Прообразы точек $t \in P^1$ назовем слоями расслоения f: $F_t = f^{-1}(t)$. Предположим, что почти все слои расслоения f будут неособыми неприводимыми многообразиями размерности $n-1$. Имеется лишь конечное число особых слоев, соответствующих точкам $t_1, \ldots, t_s$, $t_i \in P^1$, которые мы будем называть критическими точками прямой P^1. Слои $F_i = F_{t_i} = f^{-1}(t_i)$, $i = 1, \ldots, s$ могут иметь, вообще говоря, произвольные особенности. Можно рассмотреть отображение $f': \{W - \cup F_i\} \to \{P^1 - \cup t_i\}$; очевидно, это регулярное гладкое собственное отображение. Теория Х.Хиронаки позволяет свести описанную картину к так называемой стандартной ситуации.

Лемма I. Существует неособое проективное алгебратческое многообразие $\widetilde{W}$, $\dim_{\mathbb{C}} \widetilde{W} = n$, и собственное регулярное отображение $\tilde{f}: \widetilde{W} \to P^1$ такое, что

I. все слои расслоения $\tilde{f}$, за исключением слоев $\tilde{F}_1 = \tilde{f}^{-1}(t_1), \ldots, \tilde{F}_s = \tilde{f}^{-1}(t_s)$, где $t_1, \ldots, t_s$ – те же точки прямой P^1, что и раньше, являются неособыми неприводимыми под многообразиями $\widetilde{W}$;
2. особые слои $\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_s$ связны и имеют лишь особенности типа нормальных пересечений;
3. имеется регулярный собственный морфизм $\varphi: \widetilde{W} \to W$, ограничение которого является бирегулярным морфизмом
$$\varphi': \{\widetilde{W} - \cup \tilde{F}_i\} \to \{W - \cup F_i\};$$
4. морфизм $\tilde{f}': \{\widetilde{W} - \cup \tilde{F}_i\} \to \{P^1 - \cup t_i\}$ является

собственным гладким;

5. квадрат отображений

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{W} - \cup \widetilde{\mathcal{F}}_i & \longrightarrow & W - \cup \mathcal{F}_i \\ \tilde{f}' \downarrow & & f' \downarrow \\ P^1 - \cup t_i & \longleftrightarrow & P^1 - \cup t_i \end{array}$$

является коммутативным;

6. отображение φ таково, что особый слой $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ многообразия $\widetilde{W}$ отображается на особый слой $\mathcal{F}_i$ многообразия W, причем эти отображения $\varphi_i' : \widetilde{\mathcal{F}}_i \to \mathcal{F}_i$, $i = 1, \ldots, s$, являются собственными регулярными отображениями, обратные к которым являются моноидальными преобразованиями вдоль подмногообразий $\mathcal{F}_i$.

Доказательство леммы прямо следует из теоремы Хиронака о разрешении особенностей [1]. Существенным при этом является возможность установить связь между группами гомологий многообразий W и $\widetilde{W}$; гомологии $\widetilde{W}$ выражаются в явной форме через гомологии W, а также гомологии подмногообразий особых слоев $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_s$, вдоль которых мы производим моноидальные преобразования. Действительно, если в многообразии W произвести моноидальное преобразование вдоль некоторого неприводимого подмногообразия M, $\dim_c M = r$, $M \subset \mathcal{F}_i$, то мы получим многообразие W', бирационально эквивалентное W и такое, что будет существовать всюду регулярный морфизм $d: W' \to W$, причем в W' лежит подмногообразие DM; ограничение $d': W' \setminus DM \to W \setminus M$ будет бирегулярным морфизмом, а морфизм $d: DM \to M$ будет расслоением над M со слоем комплексным проективным пространством размерности $n - r - 1$. При этом, очевидно,

$$\operatorname{rank} H_p(DM) = \sum_{j=0}^{[p/2]} \operatorname{rank} H_{p-2j}(M),$$

$$\operatorname{rank} H_p(W') = \operatorname{rank} H_p(W) + \sum_{j=0}^{[p/2]} \operatorname{rank} H_{p-2j}(M)$$

(смотри, например [9], [10]).

Таким образом, задача о гомологическом строении расслоения W в известном смысле сводится к задаче о гомологическом строении расслоения $\widetilde{W}$, особенности слоев которого имеют тип нормального пересечения.

Рассмотрим некоторую точку $t_0 \in P^1$, близкую к сингулярной точке t_i. Тогда, как известно [8], можно построить отображение

$$\tilde{r}^i : \widetilde{\mathcal{F}}_0 \to \widetilde{\mathcal{F}}_i,$$

называемое ретракцией неособого слоя не особый, и отображение

$$\tilde{\theta}^i : \widetilde{\mathcal{F}}_0 \to \widetilde{\mathcal{F}}_0$$

неособого слоя на себя, соответствующее обходу точки t_0 по окружности с центром в t_i против часовой стрелки. Этим отображениям соответствуют морфизмы групп гомологий:

$$\tilde{r}^i_* : H_*(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \longrightarrow H_*(\widetilde{\mathcal{F}}_i),$$

$$\tilde{\theta}^i_* : H_*(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \longrightarrow H_*(\widetilde{\mathcal{F}}_0)$$

Ядро отображения $\tilde{r}^i_*$ называется обычно локальной (соответствующей точке t_i) группой исчезающих циклов, или локальным модулем Лефшетца: $L^i_* = \operatorname{Ker} \tilde{r}^i_*$; $L^i_p = \operatorname{Ker} \tilde{r}^i_p \subset H_p(\widetilde{\mathcal{F}}_0)$.

Можно дать геометрическое описание локальных исчезающих циклов, следуя С.Клеменсу [7], [8]. Особый слой $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ является объединением компактных неособых подмногообразий $\widetilde{W}$, пересекающихся трансверсально:

$$\tilde{\tilde{F}}_i = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{a_i}, \quad a_i \le n,$$

причем подмногообразие X_j имеет кратность m_j в $\tilde{\tilde{F}}_i$. Рассмотрим какую-нибудь точку $z \in X_J$, где $X_J = \bigcap_{j \in J} X_j$, $J \subset \{1, \ldots, a_i\}$. Можно выбрать локальную голоморфную систему координат $(z_1, \ldots, z_n)$ в окрестности $\mathcal{U}_z$ этой точки на $\tilde{W}$, таким образом, что уравнение $\tilde{\tilde{F}}_i \cap \mathcal{U}_z$ будет иметь вид $\prod_{j \in J} z_j^{m_j} = 0$, а уравнение $\tilde{\tilde{F}}_0 \cap \mathcal{U}_z$ вид $\prod_{j \in J} z_j^{m_j} = t_0 - t_i$. Отсюда $\tilde{\tilde{F}}_0 \cap \mathcal{U}_z \simeq T_J \times R^{q-1}$, где

$$T_J = \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \tilde{\tilde{F}}_0 \cap \mathcal{U}_z \mid |z_j|^{m_j} = |z_k|^{m_k}, \ j, k \in J \},$$

а R^{q-1} – изоморфно $(q-1)$-мерной клетке, где $q = |J|$, т.е. равно числу компонент особого слоя, пересекающихся в точке z. Если обозначить через m_J наибольший общий делитель чисел m_j, $j \in J$, то, как легко проверить, T_J будет состоять из m_J непересекающихся торов, каждый из которых имеет вещественную размерность $q-1$. При отображении ретракции $\tilde{\tilde{F}}_0 \to \tilde{\tilde{F}}_i$ эти торы стягиваются к z и порождают подгруппу L^i_* локальных исчезающих циклов. Строение этой подгруппы может быть, вообще говоря, достаточно сложным, о чем свидетельствуют уже простейшие примеры расслоений трехмерных многообразий, разобранные А.Ландманом [6]. Коядро морфизма $\tilde{\tau}^i_*$ обозначим через S^i_*, $S^i_p \subset H_p(\tilde{\tilde{F}}_i)$. Если рассмотреть спектральную последовательность Лере (в гомологиях) отображения $\tilde{\tau}^i$, то можно показать, что элементы подгруппы S^i_* будут являться трансгрессивными гомологическими классами $\tilde{\tilde{F}}_i$. Элементы $\alpha \in H_*(\tilde{\tilde{F}}_0)$, такие, что $\tilde{\theta}^i_*(\alpha) = \alpha$, или $(\tilde{\theta}^i_* - 1)\alpha = 0$, называются локально инвариантными, они образуют подгруппу $Inv^i_* \subset H_*(\tilde{\tilde{F}}_0)$,

$Inv^i_p \subset H_p(\tilde{\tilde{F}}_0)$, называемую локально инвариантно подгруппой (соответствующей точке t_i). Если обозначить через $\pi_1(P^1 - \cup t_i)$ гомотопическую группу прямой P^1 с выколотыми точками $t_1, \ldots, t_s$, а через Inv_* – подгруппу группы $H_*(\tilde{\tilde{F}}_0)$, инвариантную относительно действия π_1, $Inv_p \subset H_p(\tilde{\tilde{F}}_0)$, то очевидно, что $Inv_* = \bigcap_i Inv^i_*$, $Inv_p = \bigcap_i Inv^i_p$; подгруппу Inv_* будем называть (глобально) инвариантной подгруппой. Через L_* обозначим (глобальный) модуль Лефшетца, порожденный локальными подгруппами L^i_*, т.е. $L_* = \{L^1_*, \ldots, L^s_*\}$, $L_p = \{L^1_p, \ldots, L^s_p\}$, $L_* \subset H_*(\tilde{\tilde{F}}_0)$, $L_p \subset H_p(\tilde{\tilde{F}}_0)$. Через S_* обозначим глобальную подгруппу, $S_* \subset H_*(\tilde{\tilde{F}}_0)$, порожденную локальными подгруппами $S^i_* \subset H_*(\tilde{\tilde{F}}_i)$, $S_p = \{S^1_p, \ldots, S^s_p\}$.

2. Рассмотрим теперь критическую точку $t_i \in P^1$ и окружность малого радиуса O_i с центром в точке t_i; замкнутый диск с границей O_i обозначим через $\bar{\mathcal{D}}_i$, открытый через $\mathcal{D}_i$. Можно построить ретракцию τ_i пространства $\tilde{f}^{-1}\bar{\mathcal{D}}_i$ на особый слой $\tilde{\tilde{F}}_i$, которая будет накрывать стандартную ретракцию $\bar{\mathcal{D}}_i$ в точку t_i и будет коммутировать с диффеомерфизмами, порожденными обходами вокруг критической точки. Точнее, имеет место

Лемма 2 (С.Клеменс [7], [8]).

Существует диффеоморфное отображение

$$\psi : R \times \tilde{f}^{-1}\bar{\mathcal{D}}_i \to \tilde{f}^{-1}\bar{\mathcal{D}}_i,$$

удовлетворяющее условиям:

1) $\psi(\theta, \ )|_{\tilde{\tilde{F}}_i}$ = тождественному отображению;

2) $\psi(\theta_2, \ ) \circ \psi(\theta_1, \ ) = \psi(\theta_1 + \theta_2, \ )$;

3) $\tilde{f} \circ \psi(\theta, \ ) = e^{2\pi i \theta} \circ \tilde{f}$

Из этой леммы, в частности, сразу вытекает, что $\tilde{\tau}^i \tilde{\theta}^i = \tilde{\tau}^i$, откуда следует, что для любого элемента $\alpha \in H_*(\tilde{\mathcal{F}}_0)$ справедливо условие $\tilde{\theta}^i_* \alpha - \alpha \in L^i_*$ или $(\tilde{\theta}^i_* - 1)\alpha \in L^i_*$.

В диске $\mathcal{D}_i$ проведем радиус $\bar{R}_i$ (включающий точку t_i, центр диска) и рассмотрим следующую точную последовательность групп гомологий:

$$\ldots \to H_{p+1}(\tilde{f}^{-1}\mathcal{D}_i) \xrightarrow{\tau_{p+1}} H_{p+1}(\tilde{f}^{-1}(\mathcal{D}_i \setminus \bar{R}_i)) \xrightarrow{\mathcal{D}^i_p} H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i) \to \ldots \quad (1)$$

Заметим, что $\tilde{f}^{-1}(\mathcal{D}_i \setminus R_i)$ есть расслоение над односвязной областью – диском $\mathcal{D}_i$ с проведенным разрезом $\bar{R}_i$; это расслоение будет тривиальным и поэтому $H_{p+1}(\tilde{f}^{-1}(\mathcal{D}_i \setminus \bar{R}_i)) \approx H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_0)$. Нетрудно определить группы $H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i)$. Действительно, в точной последовательности

$$\ldots \to H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i) \to H_p(\tilde{f}^{-1}R_i) \xrightarrow{\partial_p} H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_i) \to \ldots \quad (2)$$

пространство $R_i = \bar{R}_i \setminus t_i$, а $\tilde{f}^{-1}R_i \approx R_i \times \mathcal{F}_0$, откуда $H_p(\tilde{f}^{-1}R_i) \approx H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_0)$. Можно сразу увидеть, что морфизм ∂_p совпадает с морфизмом, определенным ретракцией $\tilde{\tau}^i_{p-1}$: $H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_0) \to H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_i)$. Поэтому рассматриваемый отрезок точной последовательности (2) может быть переписан в виде

$$0 \to S^i_p \to H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i) \to L^i_{p-1} \to 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает равенство

$$\operatorname{rank} H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i) = \operatorname{rank} S^i_p + \operatorname{rank} L^i_{p-1}.$$

Ясна геометрическая картина строения $H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i)$: p-мерные циклы в пространстве $\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i$ порождаются p-мерными циклами, лежащими в особом слое $\tilde{\mathcal{F}}_i$ (подгруппа S^i_p) и $(p-1)$-мерными

исчезающими циклами неособого слоя $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_c$ (подгруппа L^i_{p-1}), разнесенными вдоль радиуса $\bar{R}_i$. Подгруппу классов p-мерных циклов в $\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i$, получающихся таким разнесением, обозначим через $\Lambda^i_p \subset H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i)$, $p = 1, \ldots, 2n-1$; очевидно существование канонических изоморфизмов $\sigma^i_p : L^i_{p-1} \approx \Lambda^i_p$, $p = 1, \ldots, 2n-1$. Таким образом, можно представить группу $H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i)$ в виде прямой суммы $H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i) = \Lambda^i_p \oplus S^i_p$.

Возвращаясь к точной последовательности (1), можно установить, что морфизм $\mathcal{D}^i_p : H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_0) \to H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i)$ строится следующим образом: $\mathcal{D}^i_p(\alpha) = \sigma^i_p(\tilde{\theta}^i_{p-1}\alpha - \alpha)$, где $\alpha \in H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_c)$. При этом используется, естественно, что $\theta^i_{p-1}\alpha - \alpha \in L^i_{p-1}$ (лемма 2). Доказательство проводится аналогично проведенному в работе автора [5]. Таким образом, морфизм $\mathcal{D}^i_p$ является морфизмом в прямое слагаемое Λ^i_p группы $H_p(\tilde{f}^{-1}\bar{R}_i)$. Ядром морфизма $\mathcal{D}^i_p$ является подгруппа Inv^i_{p-1}. Морфизм τ_{p+1} в точной последовательности (1) естественно отождествляется с морфизмом, порожденным пересечением циклов на $\tilde{f}^{-1}\mathcal{D}_i$ с общим слоем $\tilde{\mathcal{F}}_c$:

$$s_{p+1} : H_{p+1}(\tilde{f}^{-1}\mathcal{D}_i) \longrightarrow H_{p-1}(\check{\mathcal{F}}_c), \quad p = 1, \ldots, 2n-2.$$

Обычно эти морфизмы определяются через двойственность с группами когомологий и морфизмы ограничения в этих группах:

$$\begin{tikzcd}
H_{p+1}(\tilde{f}^{-1}\mathcal{D}_i) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "D"'] & H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_0) \arrow[d, leftrightarrow, "D"'] \\
H^{2n-p-1}(\tilde{f}^{-1}\mathcal{D}_i) \arrow[r] & H^{2n-p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_0),
\end{tikzcd}$$

учитывая, естественно, что $\dim_R(\tilde f^{-1}\mathcal{D}_i) = 2n$, $\dim_R(\tilde{\mathcal{F}}_i) = 2n-2$.

Из приведенных выше рассуждений вытекает

Лемма 3. Образ морфизма $s_{p+1}: H_{p+1}(\tilde f^{-1}\mathcal{D}_i) \to H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_0)$ является подгруппой локально инвариантных циклов: $Im\, s_{p+1} = Inv^i_{p-1}$ (так называемая проблема локально инвариантных циклов); существует точная последовательность

$$0 \to Im\,\mathcal{D}^i_{p+1} \to \Lambda^i_{p+1} \oplus S^i_{p+1} \to H_{p+1}(\tilde f^{-1}\mathcal{D}_i) \to$$
$$\xrightarrow{s_{p+1}} H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_0), \text{ где } Im\,\mathcal{D}^i_{p+1} \subset \Lambda^i_{p+1}.$$

3. Исследуем теперь связь групп гомологий многообразия $\tilde W$ с группами гомологий общего неособого слоя, а также с введенными локальными группами L^i_*, S^i_* и группами L_* и S_*. Пусть t_0 – общая точка прямой P^1, соединим ее простыми непересекающимися дугами с критическими точками $t_1, \dots, t_s$. Открытую дугу, соединяющую точку t_0 с t_i, обозначим через K_i, $K_i \cup t_i = \bar K_i$, $K = \cup \bar K_i \cup t_0$. Очевидно, что $P^1 \setminus K$ будет односвязной областью (диском), а расслоение $\tilde f': \tilde W \setminus \tilde f^{-1}K \to P^1 \setminus K$ будет изоморфно тривиальному расслоению над открытым диском со слоем $\tilde{\mathcal{F}}_0$.

Вычислим группы гомологий пространства $\tilde f^{-1}K$. Поскольку $\cup \bar K_i = K \setminus t_0$ есть несвязное объединение s дуг,

$$H_p(\tilde f^{-1}(\cup \bar K_i)) = \bigoplus_i H_p(\tilde f^{-1}\bar K_i), \quad p = 1, \dots, 2n-1.$$

Ввиду этого необходимо, во-первых, выяснить гомологическое строение $\tilde f^{-1}\bar K_i$, $i = 1, \dots, s$. Очевидно, мы можем считать, что $K_i \cap \mathcal{D}_i = R_i$, $\bar K_i \cap \mathcal{D}_i = \bar R_i$; при этом, как легко видеть, $H_p(\tilde f^{-1}\bar K_i) = H_p(\tilde f^{-1}\bar R_i)$. Последние группы нами были определены ранее, а также был выяснен геометрический смысл образующих циклов. Отсюда

$$H_p(\tilde f^{-1}(\cup_i \bar K_i)) = \bigoplus_i \Lambda^i_p \bigoplus_i S^i_p.$$

Для вычисления групп гомологий $H_p(\tilde f^{-1}K)$ необходимо определить морфизмы в точной последовательности групп гомологий

$$\dots \to H_p(\tilde f^{-1}K) \to H_p(\tilde f^{-1}(\cup \bar K_i)) \xrightarrow{\partial_p} H_{p-1}(\tilde{\mathcal{F}}_0) \to \dots$$

Очевидно, что морфизм ∂_p на прямом слагаемом $\bigoplus S^i_p \subset H_p(\tilde f^{-1}(\cup \bar K_i))$ равен нулю, так как циклы, порождающие подгруппы S^i_p лежат в особом слое $\tilde{\mathcal{F}}_i$; таким образом, задача вычисления морфизма ∂_p сводится к определению его на прямом слагаемом $\bigoplus \Lambda^i_p \subset H_p(\tilde f^{-1}(\cup \bar K_i))$. Существует канонический изоморфизм $\sigma_p: \bigoplus \Lambda^i_p \to \bigoplus L^i_{p-1}$, порожденный локальными изоморфизмами σ^i_p. Если элемент $U \in \bigoplus \Lambda^i_p$, то $\sigma_p(U) = (u^1, \dots, u^s) \in \bigoplus L^i_{p-1}$ и $\partial_p(U) = \partial'_p\,\sigma_p(U) = \sum_i u^i \subset L_{p-1}$,

где L_{p-1} – глобальный модуль Лефшетца. Ясно, что $Im\,\partial_p = L_{p-1}$, поскольку L_{p-1} порождается локальными модулями L^i_{p-1}, а для любого элемента $u^i \in L^i_{p-1}$ найдется элемент $U^i \in \bigoplus \Lambda^i_p$, такой, что $\sigma_p(U^i) = (0, \dots, 0, u^i, 0, \dots, 0)$, и $\partial_p\,\sigma_p(U^i) = u^i$. Из этих вычислений следует, что ядром морфизма ∂_p является подгруппа $\bigoplus S^i_p$ и такая подгруппа $\Lambda_p \subset \bigoplus \Lambda^i_p$, что для любого $U \in \Lambda_p$ выполнено условие $\partial_p(U) = \partial'_p\,\sigma_p(U) = \sum_i u^i = 0$, где $\sigma_p(U) = (u^1, \dots, u^s)$. Таким образом, Λ_p можно отождествить с подгруппой $\sigma_p(\Lambda_p) \subset \bigoplus_i L^i_{p-1}$, состоящей из последовательностей элементов локальных модулей Лефшетца, сумма которых, принадлежащая глобальному модулю Лефшетца, равна 0. Этот факт имеет совершенно ясный геометрический смысл : только те классы циклов из группы $\oplus \Lambda_p^i$, которые получаются разнесением вдоль дуг $\overline{K}_i$ исчезающих циклов неособого слоя и имеют гомологичное нулю сечение на слое $\widetilde{\mathcal{F}}_0$, образуют цикл в пространстве $\tilde{f}^{-1}K$.

Итак, доказана следующая

Лемма 4. Группа $H_p(\tilde{f}^{-1}K)$ определяется точной последовательностью

$$0 \to L_p \to H_p(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \to H_p(\tilde{f}^{-1}K) \to \Lambda_p \oplus S_p \to 0$$

В частности, справедливо равенство

$$\operatorname{rank} H_p(\tilde{f}^{-1}K) = \operatorname{rank} H_p(\widetilde{\mathcal{F}}_0) + \operatorname{rank} \Lambda_p + \operatorname{rank} S_p - \operatorname{rank} L_p,$$

или, вследствие того, что $\operatorname{rank} \Lambda_p = \sum \operatorname{rank} L_{p-1}^i - \operatorname{rank} L_{p-1}$ имеет место равенство

$$\operatorname{rank} H_p(\tilde{f}^{-1}K) = \operatorname{rank} H_p(\widetilde{\mathcal{F}}_0) + \sum \operatorname{rank} L_{p-1}^i + \operatorname{rank} S_p - \operatorname{rank} L_{p-1} - \operatorname{rank} L_p.$$

4. Рассмотрим теперь следующую точную последовательность групп гомологий:

$$\ldots \to H_{p+1}(\tilde{f}^{-1}K) \to H_{p+1}(\widetilde{W}) \xrightarrow{\partial_{p+1}} H_{p+1}(\widetilde{W} \setminus \tilde{f}^{-1}K) \xrightarrow{\partial_p} H_p(\tilde{f}^{-1}K) \to .$$

В этой последовательности $H_{p+1}(\widetilde{W} \setminus \tilde{f}^{-1}K) \simeq H_{p-1}(\widetilde{\mathcal{F}}_0)$, поскольку $\widetilde{W} \setminus \tilde{f}^{-1}K$ изоморфно тривиальному расслоению над открытым диском со слоем $\widetilde{\mathcal{F}}_0$. Группы $H_{p+1}(\tilde{f}^{-1}K)$, $p = 0, \ldots, 2n-1$ определены в лемме 4; для нахождения групп $H_{p+1}(\widetilde{W})$,

$p = 0, \ldots, 2n-1$ необходимо вычислить морфизмы ∂_p , $p = 1, \ldots, 2n$. Рассмотрим морфизм $\widetilde{\mathcal{D}}_* : H_*(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \to \oplus_i L_*^i$, определяемый по формуле

$$\widetilde{\mathcal{D}}_*(\alpha) = (\widetilde{\Theta}_*^1 \alpha - \alpha, \ldots, \widetilde{\Theta}_*^s \alpha - \alpha).$$

Нетрудно проверить, что этот морфизм порождает морфизмы

$$\mathcal{D}_p : H_{p-1}(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \longrightarrow \Lambda_p,$$

причем $\mathcal{D}_p = \sigma_p \widetilde{\mathcal{D}}_p$. Исследуем теперь следующую коммутативную диаграмму, точную в вертикальных столбцах:

$$\begin{tikzcd}
 & H_p(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \arrow[d] \arrow[r, leftrightarrow] & H_p(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \arrow[d] \\
 & H_p(\tilde{f}^{-1}K) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & H_p(\widetilde{\mathcal{F}}_0)/L_p + \Lambda_p + S_p \arrow[d] \\
H_{p-1}(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \simeq H_{p+1}(\widetilde{W} \setminus \tilde{f}^{-1}K) \arrow[ur, "\partial_p"] \arrow[r, "\partial_p'"'] & H_p(\tilde{f}^{-1}(\cup \overline{K}_i)) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \oplus \Lambda_p^i + S_p \arrow[d] \\
 & H_p(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \arrow[r, leftrightarrow] & H_{p-1}(\widetilde{\mathcal{F}}_0)
\end{tikzcd} .$$

Морфизм ∂_p' в этой диаграмме является граничным морфизмом в точной последовательности

$$\ldots \to H_{p+1}(\widetilde{W} \setminus \widetilde{\mathcal{F}}_0) \to H_{p+1}(\widetilde{W} \setminus \tilde{f}^{-1}K) \xrightarrow{\partial'} H_p(\tilde{f}^{-1}(\cup \overline{K}_i)) \to$$

Морфизм ∂_p' сводится к введенным ранее морфизмам $\mathcal{D}_p'$, а именно: $\partial_p' \alpha = \sigma_p(\widetilde{\Theta}_{p-1}^1 \alpha - 1, \ldots, \widetilde{\Theta}_{p-1}^s \alpha - \alpha)$, т.е. $\partial_p' = \mathcal{D}_p$. При этом, поскольку $\mathcal{D}_p(\alpha) \in \Lambda_p$, то $\partial_p = \mathcal{D}_p$. Очевидно, что $\partial_p(\alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Theta_{p-1}^i \alpha = \alpha$ для всех $i = 1, \ldots, s$, т.е. $\operatorname{Ker} \partial_p = \operatorname{Inv}_{p-1} \subset H_{p-1}(\widetilde{\mathcal{F}}_0)$. Большой интерес представляет геометрическое истолкование морфизма ∂_{p+1}: $H_{p+1}(\widetilde{W}) \longrightarrow H_{p+1}(\widetilde{W} \setminus \tilde{f}^{-1}K)$. Как и в указанном ранее случае, этот морфизм может быть описан как пересечение циклов на $\widetilde{W}$ с общим слоем $\widetilde{F}_c$: $H_{p+1}(\widetilde{W}) \longrightarrow H_{p-1}(\widetilde{F}_c)$, или, через двойственность в когомологиях и морфизм ограничения

$$\begin{array}{ccc} H_{p+1}(\widetilde{W}) & \xrightarrow{s_{p+1}} & H_{p-1}(\widetilde{F}_c) \\ D \updownarrow & & \updownarrow D \\ H^{2n-p-1}(\widetilde{W}) & \xrightarrow{z} & H^{2n-p-1}(\widetilde{F}_c), \end{array}$$

учитывая, что $\dim_R(\widetilde{W}) = 2n$, $\dim_R \widetilde{F}_c = 2n-2$. Из приведенных выше рассуждений следует, в частности, что $Ker\, \partial_p = Im\, s_{p+1} = Inv_{p-1}$, т.е. вытекает так называемая глобальная проблема инвариантных циклов. Полученные факты позволяют выяснить гомологическое строение многообразия $\widetilde{W}$.

Теорема. Существует точная последовательность групп:

$$H_{p+1}(\widetilde{F}_c) \xrightarrow{\partial_p} H_p(\widetilde{F}_c)/L_p \oplus \Lambda_p \oplus S_p \longrightarrow H_p(\widetilde{W}) \xrightarrow{s_p} Inv_{p-2} \longrightarrow 0,$$

в которой морфизмы ∂_p и s_p описаны выше, причем морфизм ∂_p является морфизмом во второе прямое слагаемое второго члена последовательности.

Ранг группы $H_p(\widetilde{W})$ вычисляется по формуле:

$$rank\, H_p(\widetilde{W}) = rank\,(H_p(\widetilde{F}_c)/L_p) + rank\,(\Lambda_p/Im\, \partial_p) +$$
$$+ rank\, S_p + rank\, Inv_{p-2}$$

Эта теорема позволяет провести вычисления групп гомологий в ряде полезных частных случаев, в частности, когда особые слои устранены как объединения гладких подмногообразий $X_1 \cup \ldots \cup X_k$,

каждое из которых имеет кратность 1 и пересекается трансверсально по неособым подмногообразиям.

Можно отметить, что в данной работе так называемые локальная и глобальная проблемы инвариантных циклов (лемма 3 и теорема) доказываются чисто топологическим способом без обращения к теории Ходжа (смотри, например, [2], [3], [4]). Это достигнуто, очевидно, благодаря тому, что базой расслоения является проективная прямая; вместе с тем доказательство проливает свет на то, что локальная проблема инвариантных циклов может оказаться топологическим фактом и в общем случае.

Полученные результаты допускают широкие обобщения как на случай особых алгебраических многообразий (что тривиально), так и на случай расслоения комплексных пространств с особенностями типа нормальных пересечений в слоях.

Литература

I. H.Hironaka "Resolutions of Singularities", Annals of Math., т. 79, 1964.6

2. P.Deligne "Theorie de Hodge", I, II, III, Publications Mathematiques, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1970, 1971, 1972.

3. Ф.А.Гриффитс "Доклад о вариации структур Ходжа", УМН, т. XXУ вып. 3, 1970.

4. Ph. Griffiths "Periods of Integrals on Algebraic Manifolds, III" Publications Mathematiques, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1970.

5. А.Б.Жижченко "О группах гомологий алгебраических многообразий", Известия АН СССР, сер. матем., т. 25, 1961.

6. A. Landman "On the Picard - Lefschetz Transformations", Thesis Ph. O., University of California, Berkleley, 1966.

7. C.H.Clemens "Picard - Lefschetz for Families of Nonsingular Algebraic Varieties Acquiring Ordinary Singularities", Trans. Amer. Math. Soc., т. 136, 1969.

8. Seminar on Degeneration of Algebraic Varieties, Institute for Advanced Stydy, Princeton, 1970.

9. B.Segre "Corrispondenze birazionali e topologia di varietà algebriche", Annali di Mat., т. 43, 1957.

IO. H.Guggenheimer "On the Topology of the Exceptional Varieties in Birational Transformations", Annali di Mat., т. 52, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
II июня 1975 года.