89-90

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-90

П.Е.Жидков

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Направлено в журнал
"Дифференциальные уравнения"

1989

1^{0}. Пристальное внимание исследователей в последние годы приковано к уравнениям, обладающим специальными частными решениями – солитонами. Многие их важные свойства могут быть выяснены с помощью метода обратной задачи теории рассеяния /1,2/. К указанному классу принадлежит и уравнение Кортевега-де Фриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

а также модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \tag{2}$$

Как указывается в монографии /1/, важным для физики является также более общее уравнение

$$u_t + f'(u) u_x + u_{xxx} = 0, \tag{3}$$

к которому для произвольной функции f метод обратной задачи рассеяния неприменим.

В дальнейшем будем рассматривать задачу Коши для уравнения (3):

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{4}$$

Ранее эта задача рассматривалась в ряде работ, из которых отметим /3-10, 13-15/. Случай периодической функции u_0 изучался в работах /13-15/. Наиболее общий результат (для задачи (1),(4)) получен в /14/ (доказано существование решения класса $\mathcal{L}^\infty(0,T;\, H^s_{loc}(R))$, $s \geq 2$.

В настоящей работе рассматривается периодическая функция u_0 класса C^∞. Доказано существование глобального решения класса C^∞, периодического по x. Метод исследования близок к описанному в /10/.

2^{0}. Введем следующие обозначения. Положим $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_x^\ell = \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell}$. Обозначим через H_A множество функций аргумента x, периодических с периодом A класса $C^\infty(R)$, через $C^\infty([0,T],\, H_A(R))$ множество функций переменных t и x, определенных для всех $t \in [0,T]$, $x \in R$, периодических с периодом A по x класса $C^\infty_{loc}([0,T] \times R)$. Положим

$$(f,g) = \int_0^A [f(x) g(x) + D_x^\ell f \cdot D_x^\ell g]\, dx, \quad \|f\|_\ell = (f,f)_\ell^{1/2}, \quad \|f\| = \|f\|_0.$$

Наряду с задачей (3)-(4) рассмотрим регуляризованную задачу Коши

$$v_t + f'(v)v_x + D_x^3 v + \varepsilon D_x^4 v = 0, \quad x \in R, \ t > 0, \tag{5}$$

$$v(x,0) = u_0(x). \tag{6}$$

Пусть $u_0 \in H_A$. Метод доказательства решения задачи (3)-(4) - метод параболической регуляризации. Сначала будет доказано существование решения задачи (5)-(6) для $\varepsilon > 0$ (3^0.), а затем будет совершен предельный переход при $\varepsilon \to +0$ (п.4^0).

3^0. В этом пункте рассмотрим задачу (5)-(6).

Введем итерационный процесс

$$D_t v_n + D_x^3 v_n + \varepsilon D_x^4 v_n = -f'(v_{n-1}) D_x v_{n-1}, x \in R, t > 0, \tag{7}$$

$$v_n(x,0) = u_0(x), \tag{8}$$

причем $v_1(t,x) \equiv u_0(x)$. С помощью метода разложения решения в ряд Фурье нетрудно доказать, что, если $v_{n-1} \in C^\infty([0,T]; H_A)$ и $f \in C^\infty_{loc}(R)$, то и $v_n \in C^\infty([0,T]; H_A)$. Условимся в дальнейшем через C, C', C_1, C_2, ... обозначать положительные постоянные.

<u>Лемма I.</u>

Пусть $f \in C^\infty_{loc}(R)$, существуют такие $\alpha > 0$, $p \in (0,4)$, что $|f'(u)| \leq \alpha(1 + |u|^p)$, пусть $u_0 \in H_A$. Тогда существует $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$, такое, что существует единственное решение задачи (5)-(6) класса $C^\infty([0,t_0]; H_A)$.

<u>Доказательство</u>

Для доказательства существования получим следующие оценки:

$$\| D_x^l v_n(t,x) \| \leq C(l,\varepsilon), \tag{9}$$

где $t \in [0,t_0]$, $C(l,\varepsilon)$ - не зависит от n.

Положим $|||g|||^2 = \|g\|^2 + \|D_x^2 g\|^2$. Умножим уравнение (7) на $v_n + D_x^4 v_n$ и проинтегрируем по $[0,A]$. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|||v_n|||^2 = \int_0^A f'(v_{n-1}) D_x v_{n-1} D_x^4 v_n \, dx - \varepsilon \| D_x^2 v_n\|^2 - \varepsilon \|D_x^4 v_n\|^2 \leq$$

$$\left\{\int_0^A [f'(v_{n-1}) D_x v_{n-1}]^2 dx\right\}^{1/2} \left\{\int_0^A (D_x^4 v_n)^2 dx\right\}^{1/2} - \varepsilon \|D_x^2 v_n\|^2 - \varepsilon \|D_x^4 v_n\|^2 \leq$$

$$C(\varepsilon)\int_0^A [f'(v_{n-1})D_x v_{n-1}]^2 dx - \varepsilon \| D_x^2 v_n \|^2 \leq$$

$$C_1(\varepsilon)\Big[(1+\max_{x\in[0,A]} |v_{n-1}|^{2p}) \int_0^A (D_x v_{n-1})^2 dx\Big] \leq$$

$$\leq C_2(\varepsilon)\,[\, |||v_{n-1}|||^{2(p+1)} + 1]. \qquad (10)$$

Из (10) следует, что существует $t_1 = t_1(\varepsilon)\in(0,T]$, такое, что для любого n при $0\leq t\leq t_1$

$$|||v_n(t,x)|||^2 \leq 2|||u_0(x)|||^2 . \qquad (11)$$

Далее, применяя индукцию по ℓ, выводим, что для любого целого $\ell\geq 3$ при $0\leq t\leq t_1$

$$\| D_x^\ell v_n\| \leq C(\varepsilon,\ell). \qquad (12)$$

Действительно, продифференцируем (7) $(\ell-2)$ раз по x, умножим на $D_x^{\ell+2}v_n$ и проинтегрируем по $[0,A]$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D_x^\ell v_n\|^2 = -\varepsilon\|D_x^{\ell+2}v_n\|^2 - \int_0^A D_x^{\ell-2}[f'(v_{n-1})D_x v_{n-1}]D_x^{\ell+2}v_n dx$$

$$\leq -\varepsilon\|D_x^{\ell+2}v_n\|^2 + \|D_x^{\ell-2}[f'(v_{n-1})D_x v_{n-1}]\|\cdot\|D_x^{\ell+2}v_n\| \leq$$

$$C(\varepsilon)\|D_x^{\ell-2}[f'(v_{n-1})D_x v_{n-1}]\|^2,$$

откуда, с учетом индуктивного предположения, вытекает неравенство (12).

Из неравенств (11),(12) вытекает, что множество $\{v_n(t,x)\}$ предкомпактно в пространстве $C^\infty([0,t_1];H_A)$, т.е. из любой его последовательности можно выделить подпоследовательность, которая сходится вместе со всеми своими частными производными к некоторой функции из указанного пространства. Докажем, что сходится сама последовательность $\{v_n(t,x)\}$ в пространстве $C^\infty([0,t_2];H_A)$, где $t_2>0$, вообще говоря, меньше, чем t_1. Положим $w_n(t,x) = v_{n+1}(t,x) - v_n(t,x)$. Умножим уравнение для $w_n(t,x)$ на w_n и проинтегрируем по $[0,A]$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_n\|^2 + \varepsilon\|D_x^2 w_n\|^2 =$$

$$-\int_0^A \{[f'(v_n) - f'(v_{n-1})] D_x v_n + f'(v_{n-1}) D_x w_{n-1}\} w_n\, dx =$$

$$-\int_0^A \{f''(v_{n-1} + \theta(x,t)(v_n - v_{n-1})) w_{n-1} D_x v_n + f'(v_{n-1}) D_x w_{n-1}\} w_n\, dx \le$$

$$C(\varepsilon)\int_0^A (w_{n-1}^2 + w_n^2)\, dx - \int_0^A f'(v_{n-1}) D_x w_{n-1} w_n\, dx =$$

$$C(\varepsilon)\int_0^A (w_{n-1}^2 + w_n^2)\, dx + \int_0^A f''(v_{n-1}) D_x v_{n-1}\, w_{n-1} w_n\, dx + \int_0^A f'(v_{n-1}) w_{n-1} D_x w_n\, dx$$

$$\le C'(\varepsilon)\int_0^A (w_{n-1}^2 + w_n^2)\, dx + \varepsilon\int_0^A (D_x^2 w_n)^2\, dx$$

и, таким образом,

$$\frac{d}{dt}\|w_n\|^2 \le C(\varepsilon)(\|w_{n-1}\|^2 + \|w_n\|^2). \tag{I3}$$

Докажем, что существует $t_2 : 0 < t_2 \le t_1$ такое, что $\sup_{0\le t\le t_2}\|w_n(t,\cdot)\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого достаточно доказать, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ $\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le t_2}\|w_n\|^2 \le \varepsilon_1$. Выберем t_2 так, что $C(\varepsilon)t_2 < 1/2$, и зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$. В силу (I3) и компактности в $C^\infty([0,t_1]; H_A)$ имеем: существует номер n' такой, что $\sup_{0\le t\le t_2}\|w_{n'-1}\|^2 < \varepsilon_1$. Тогда в силу (I3)

$$\max_{0\le t\le t_2}\|w_{n'}\|^2 \le C(\varepsilon)\left(\varepsilon_1 t_2 + t_2 \max_{0\le t\le t_2}\|w_{n'}\|^2\right),$$

откуда

$$\max_{0\le t\le t_2}\|w_{n'}\|^2 \le \frac{\varepsilon_1 t_2 C(\varepsilon)}{1 - C(\varepsilon)t_2} < \varepsilon_1 .$$

По индукции можно доказать, что $\max_{0\le t\le t_2}\|w_n\|^2 < \varepsilon_1$ для всех $n \ge n'$.

В силу предкомпактности отсюда вытекает сходимость последовательности $\{v_n\}$ в $C^\infty([0,t_2]; H_A)$. Переходя по этой последовательности к пределу, получим решение задачи Коши (5)-(6) того же класса.

Докажем единственность этого решения. Предположим, что существует два различных решения v_1 и v_2 класса $C^\infty([0,T]; H_A)$. Так же, как (I3), получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\|w^2(t,\cdot)\|^2 \leq C\|w(t,\cdot)\|^2,$$

где $w(t,x)= v_1(t,x) - v_2(t,x)$, из которого следует, что $w(t,x)\equiv 0$, т.е. $v_1 = v_2$, и приходим к противоречию.

Лемма I доказана.

4^0. Для обоснования возможности перехода к пределу при $\varepsilon \to +0$ для решения $u_\varepsilon(t,x)$ задачи (5)-(6) установим некоторые равномерные по ε априорные оценки.

<u>Лемма 2.</u>

Для всех $t>0$ имеет место неравенство

$$\|u_\varepsilon(t,x)\|^2 \leq \|u_\varepsilon(0,\cdot)\|^2.$$

<u>Доказательство</u>

$$\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^2 = 2\int_0^A u_{\varepsilon t} u_\varepsilon\, dx = 2\int_0^A u_\varepsilon(-f'(u_\varepsilon)D_x u_\varepsilon - D_x^3 u_\varepsilon - \varepsilon D_x^4 u_\varepsilon)dx$$

$$= -2\varepsilon\|D_x^2 u_\varepsilon\|^2 < 0 .$$

Лемма 2 доказана.

<u>Лемма 3.</u>

Пусть выполнены условия леммы I при некотором $T>0$. Пусть при некотором T' : $0<T'\leq T$ $u(t,x)\in C^\infty([0,T'];H_A)$ – решение задачи (5)-(6) при некотором $\varepsilon\in[0,1]$. Тогда при $t\in[0,T']$.

$$\|D_x u(t,\cdot)\| \leq C(T;\|u_0\|).$$

<u>Доказательство</u>

Умножим уравнение (5) на $-D_x^2 u - f(u)$ и проинтегрируем по $[0,A]$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D_x u\|^2 + \varepsilon\|D_x^3 u\|^2 = \frac{d}{dt}\int_0^A F(u)\,dx + \varepsilon\int_0^A f(u) D_x^4 u\, dx, \qquad (I4)$$

где $F(u)=\int_0^u f(s)ds$. Далее, $\left|\int_0^A F(u)dx\right| \leq$

$$C(1+\max_{x\in[0,A]}|u|^p)\|u\|^2 \leq C[1+(\int_0^A (D_x u)^2 dx)^{p/4}] \leq C' + \frac{1}{4}\|D_x u\|^2. \qquad (I5)$$

(воспользовались известным неравенством /II/

$$\max_{x\in[0,A]} |u| \leq C \|u\|^{1/2} \|D_x u\|^{1/2}).$$

(I6)

Рассмотрим $\varepsilon \int_0^A f(u) D_x^4 u\, dx = -\varepsilon \int_0^A f'(u) D_x u\, D_x^3 u\, dx \leq$

$$C\varepsilon (1 + \max_{x\in[0,A]} |u|^p) \int_0^A |D_x u|\,|D_x^3 u|\, dx \leq$$

$$C_1 \varepsilon [1 + \|D_x^3 u\|^{4/3 + p/6}] \leq \varepsilon \int_0^A (D_x^3 u)^2 dx + C_2 \varepsilon. \tag{I7}$$

(Воспользовались неравенством, аналогичным (I6) (см. /II/) и леммой 2).

В силу (I4,I5,I7) имеем

$$\frac{d}{dt} \|D_x u\|^2 \leq C_1 + C_2 \|D_x u\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^A (D_x u)^2 dx,$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 4.

Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для любого $\ell \geq 2$ при $0 \leq t \leq T'$

$$\|D_x^\ell u\| \leq C(\ell).$$

Доказательство.

Применим метод математической индукции по ℓ. Пусть $\ell \geq 2$. Предположим, что для всех неотрицательных целых чисел, меньших ℓ, оценка выполнена. Продифференцируем уравнение (5) ℓ раз по x, умножим на $D_x^\ell u$ и проинтегрируем по $[0,A]$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_x^\ell u\|^2 + \varepsilon \|D_x^{\ell+2} u\|^2 = \int_0^A D_x^\ell [f'(u) D_x u]\, D_x^\ell u\, dx. \tag{I8}$$

Оценим $I_\ell(t) = \int_0^A D_x^\ell [f'(u) D_x u]\, D_x^\ell u\, dx$. Интегрируя по частям, получаем

$$I_\ell(t) = \int_0^A [P_\ell D_x^\ell u - \frac{1}{2} f''(u) D_x u\, (D_x^\ell u)^2]\, dx, \tag{I9}$$

где $P_\ell(t,x) = D_x^\ell [f'(u) D_x u] - f'(u) D_x^{\ell+1} u$.

Сначала рассмотрим случай $\ell = 2$. Тогда в силу лемм 2 и 3

$$P_2 \leq C |D_x u|^3 + 3 f''(u) D_x u\, D_x^2 u,$$

и из (I9) следует, что

$$I_2(t) \le \frac{5}{2}\int_0^A f''(u)\,D_x u\,(D_x^2 u)^2 dx + C_1 \| D_x^2 u \|^2 + C_2 . \tag{20}$$

Из (I8)-(20) выводим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D_x^{\ell} u\|^2 + \varepsilon \|D_x^{\ell+2} u\|^2 \le C_1 \|D_x^2 u\|^2 + C_2 + $$
$$+ \frac{5}{2}\int_0^A f''(u)\,D_x u\,(D_x^2 u)^2 dx. \tag{21}$$

Положим $\mathcal{Y}(t,x) = -\frac{5}{6}[f''(u)(D_x u)^2 + 2 f'(u)\,D_x^2 u]$.

Умножим (5) на $\mathcal{Y}$ и проинтегрируем по $[0, A]$. Тогда, замечая, что $\mathcal{Y}(t,x) = -\frac{5}{6} D_x^2 f(u) - \frac{5}{6} f'(u)\,D_x^2 u$, получаем следующее неравенство:

$$-\frac{5}{6}\frac{d}{dt}\int_0^A f(u)\,D_x^2 u\,dx + \int_0^A D_x^3 u\,\mathcal{Y}\,dx = -\varepsilon\int_0^A D_x^4 u\,\mathcal{Y}\,dx - \int_0^A f'(u) D_x u\,\mathcal{Y}\,dx. \tag{22}$$

Применяя интегрирование по частям, находим, что

$$\int_0^A D_x^3 u\,\mathcal{Y}\,dx = \frac{5}{6}\int_0^A D_x^2 u\,[f^{(3)}(u)(D_x u)^3 + 2 f''(u)\,D_x u\,D_x^2 u + f''\,D_x u\,D_x^2 u]dx =$$

$$\frac{5}{2}\int_0^A f''(u)\,D_x u\,(D_x^2 u)^2 dx + \frac{5}{6}\int_0^A f^{(3)}(u)\,(D_x u)^3\,D_x^2 u\,dx \le$$

$$\frac{5}{2}\int_0^A f''(u)\,D_x u\,(D_x^2 u)^2 dx + C \max_{x\in[0,A]} |D_x u|^3 \Big\{\int_0^A (D_x^2 u)^2 dx\Big\}^{1/2} \le$$

$$\le \frac{5}{2}\int_0^A f''(u)\,D_x u\,(D_x^2 u)^2 dx - C_1 \|D_x^2 u\|^2 - C_2 .$$

С учетом этой оценки из (22) выводим

$$-\frac{5}{6}\frac{d}{dt}\int_0^A f(u)\,D_x^2 u\,dx + \frac{5}{2}\int_0^A f''(u)\,D_x u\,(D_x^2 u)^2 dx \le$$
$$\varepsilon\int_0^A (D_x^4 u)^2 dx + C_1 \|D_x^2 u\|^2 + C_2. \tag{23}$$

Складывая (2I) и (23), получаем

$$\frac{d}{dt}\int_0^A (D_x^2 u)^2 dx \le C\int_0^A (D_x^2 u)^2 dx + \frac{5}{3}\int_0^A f(u)\,D_x^2 u\,dx + C',$$

откуда следует оценка из утверждения леммы для $\ell = 2$, так как

$$\left|\frac{5}{3}\int_0^A f(u)\,D_x^2 u\,dx\right| \le \frac{1}{4}\|D_x^2 u\|^2 + C .$$

Пусть $\ell \geq 3$. Воспользуемся методом математической индукции. Пусть оценка из утверждения леммы справедлива для 2,3, ..., $\ell-1$. Докажем её для ℓ. Из теорем вложения /II/ вытекает следующая оценка:

$$P_\ell \leq C(\ell)\left[|D_x^\ell u| + |D_x^2 u|\cdot|D_x^{\ell-1} u| + 1\right].$$

Тогда в силу (I9)

$$I_\ell(t) \leq C(\ell)\left[\int_0^A (D_x^\ell u)^2 dx + \int_0^A |D_x^2 u|\cdot|D_x^{\ell-1} u|\, dx + \int_0^A |D_x^\ell u|\, dx\right] \leq$$

$$C(\ell)\left[\|D_x^\ell u\|^2 + \|D_x^2 u\|\left(\int_0^A (D_x^{\ell-1} u)^2 (D_x^\ell u)^2 dx\right)^{1/2}\right] \leq$$

$$C(\ell)\left[\|D_x^\ell u\|^2 + \max_{x\in[0,A]} |D_x^{\ell-1} u|\cdot\left(\int_0^A (D_x^\ell u)^2 dx\right)^{1/2}\right] \leq$$

$$C(\ell)\left[\|D_x^\ell u\|^\lambda + 1\right].$$

Отсюда и из (I8) вытекает утверждение леммы 4.

<u>Теорема I.</u>

Пусть выполнены условия леммы I. Тогда для любого $T>0$ существует единственное решение задачи Коши (5)-(6) класса $C^\infty([0,T]; H_A)$.

<u>Доказательство</u>

Из лемм 2-4 и локальной разрешимости задачи (5)-(6) выводится результат о ее глобальной разрешимости.

<u>Теорема 2.</u>

Пусть $u_0 \in H_A$, $f \in C^\infty_{loc}(R)$ и пусть существуют $\alpha>0$, $p\in(0,4)$ такие, что $|f'(u)| \leq \alpha(1+|u|^p)$. Тогда для любого $T>0$ существует единственное решение задачи Коши (3)-(4) для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза класса $C^\infty([0,T]; H_A)$.

<u>Доказательство</u>.

Существование получается предельным переходом при $\varepsilon \to +0$ в задаче (5)-(6) с учетом теоремы I и лемм 2-4.

Докажем единственность этого решения. Воспользуемся методом работы /I2/. Предположим, что есть два различных решения u_1 и u_2. Рассмотрим уравнение для $w = u_1 - u_2$:

$$w_t + f'(u_1) w_x + \left[f'(u_1) - f'(u_2)\right] u_{2x} + w_{xxx} = 0.$$

Умножим это уравнение на w и проинтегрируем по $[0,A]$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 \leq C\,\|w\|^2,$$

откуда вытекает, что $w \equiv 0$, так как $w(0,x)=0$. Следовательно, решение единственно, и теорема 2 доказана.

Замечание I.

Нетрудно убедиться в том, что для доказательства локальной разрешимости задач Коши (5)-(6) и (3)-(4) нет необходимости в условии $|f(u)| \leq \alpha(1+|u|^p)$ (см. лемму I и теорему 2).

Замечание 2.

Так же, как в работе /I0/, можно рассмотреть обобщенные решения задачи (3)-(4).

Литература

I. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., Наука, I980.
2. Тахтаджян А.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов М., Наука, I986.
3. Кружков С.Н., Фаминский А.В. Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега- де Фриза.- Матем. сб., I983, т. I20, № 3, стр. 396-425.
4. Якупов В.М. О задаче Коши для уравнения Кортевега- де Фриза.- Диффер. уравн.,I975, т. II, № 3, стр. 556-56I.
5. Bona T.L., Smith R. The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation.-Phyl. Trans. R. Soc. Lond. Ser.A., I975, v. 278, No I287, p. 555-604.
6. Kato T. On the Korteweg-de Vries equation-Manusc. Math., I979, v. 28, No I-3, p. 88-99.
7. Kato T. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg- de Vries equation.- Studies in Appl. Meth., I983, v. 8, p.93-I28.
8. Tsutsumi M. Weighted Sobolev spaces and repeadly decreasing solutions of some nonlinear dispersive wave equations.- J. Differ Equat., I98I, vol. 42, No 2, p. 260-28I.
9. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки.- Сиб. матем. ж., I984, т. 25, № 5, с. 30-4I.
I0. Фаминский.- Труды семинара им. И.Г. Петровского, I988, М., МГУ, вып. I3, стр. 56-I05.

II. Успенский С.В., Г.В. Демиденко Г.В., Перепелкин В.Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям.- Новосибирск, Наука, I984.

I2. Лакс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединение волны - Математика, I969 г., Мир, т. I3, № I3, стр. I28-I48.

I3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.-М., Мир., I972.

I4. J.C.Saut, R.Temam. Remarns On the Korteweg- de Vries equation - Israel J. of Math., I976, vol. 24, No I, p. 78-87.

I5. Dushane T.E. Generalizations of the Korteweg-de Vries equation.- in : Proc. of Symposia in pure Math., vol. XXIII (I973), Amer. Math. Soc., p. 303-307.

Рукопись поступила в издательский отдел
I4 февраля I989 года.