89-80

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-80

В.И.Юкалов

ГРУППА РЕНОРМИРОВОК ПРИ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ

Направлено в Оргкомитет Школы-семинара
"Представление групп в физике", Тамбов,
январь 1989

1989

Существует давняя проблема: если некоторая задача не решается точно, а решается только с помощью метода последовательных приближений, то как можно на основе нескольких приближенных значений восстановить всю искомую функцию? Если используется теория возмущений по малому параметру и известно достаточно много членов ряда по степеням этого параметра, то несмотря на расходимость таких рядов их можно формально просуммировать, применяя методы Паде, Бореля, конформных отображений и их комбинации. Точность подобных методов суммирования асимптотических рядов значительно возрастает, когда удается узнать поведение членов ряда теории возмущений при больших степенях параметра разложения. Однако если известны лишь несколько начальных членов ряда, а поведение коэффициентов при больших степенях параметра разложения неизвестно вовсе, то точность упомянутых методов катастрофически снижается. В большинстве случаев реалистических моделей вообще не удается получить аналитические выражения более чем для второго порядка теории возмущений. В такой ситуации упомянутые методы формального суммирования совсем неприменимы.

В данной работе формулируется новый метод, позволяющий восстановить функцию всего по двум ее приближениям. Метод анализируется на примере ангармонического осциллятора. Точность метода оказывается исключительно высокой, максимальная ошибка при вычислении энергии основного состояния не превышает 0,1%.

Допустим, необходимо найти функцию $f(g)$ при $g \in G$. Для того чтобы последовательность приближений сходилась к искомой функции $f(g)$ максимально быстро, введем дополнительную последовательность $\{z_n(g)\}$ $/n = 0,1,2.../$. Функции $z_n(g)$ выбираются так, чтобы обеспечить наибыстрейшую сходимость основной последовательности $\{f_n(g, z_n(g))\}$ к $f(g)$ равномерно на G. Поэтому $z_n(g)$ можно назвать управляющими функциями. Для сходящейся последовательности можно указать такой номер $n = s$, начиная с которого $f_n(g, z_n(g))$ с заданной степенью точности в смысле Коши перестает отличаться от искомой точной функции $f(g)$. Подразумевая сказанное, будем далее писать $f_s(g, z_s(g)) = f(g)$. Значение $n = s$ будем называть точкой насыщения.

На языке динамической теории набор функций $f_n(g)$ при $n = 0,1,2...$ описывает движение по дискретной переменной n. Последовательность $\{f_n(g)\}$ соответствует пути движения. Искомая

функция $f(g)$, к которой сходятся различные пути, играет роль аттрактора. При движении вблизи точки насыщения s форма приближений меняется слабо, то есть движение вблизи точки насыщения приблизительно автомодельно /1/.

Для формулировки условия автомодельности определим функцию $g(f)$ уравнением

$$f_0(g, z_0(f)) = f. \qquad /1/$$

Введем обозначение

$$\bar f_n(f) \equiv f_n(g(f), z_n(g(f))). \qquad /2/$$

По построению функции /2/ выполняются следующие граничные условия:

$$\bar f_0(f) = f, \quad \bar f_s(f) = f(g),$$

где $g = g(f)$. Используем простейшую форму записи функциональной автомодельности:

$$\bar f_{m+n}(f) = \bar f_m(\bar f_n(f)). \qquad /3/$$

Для дальнейшего удобно перейти к непрерывному представлению итерационной процедуры. Введем переменную $t_n \equiv e^n$ и функции

$$z_n(t_n, g) \equiv z_n(g),$$

$$/4/$$

$$f(t_n, g, z(t_n, g)) \equiv f_n(g, z_n(g)).$$

Продолжим аналитически все функции, зависящие от номера итерации, на область непрерывной переменной $t \geq 1$ и определим

$$\bar f(t, f) \equiv f(t, g(f), z(t, g(f))). \qquad /5/$$

Согласно предыдущему, для функции /5/ выполняются граничные условия

$$\bar f(1, f) = f, \quad \bar f(t_s, f) = f(g).$$

В непрерывном представлении свойство автомодельности /3/ принимает вид

$$\bar f(bt, f) = \bar f(t, \bar f(b, f)). \qquad /6/$$

Заметим, что условие автомодельности в форме /6/ выполняется для многих физических задач /2,3/. Из /6/ легко получить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \bar{f}(t,f)}{\partial \ln t} = \gamma(\bar{f}(t,f)) \qquad /7/$$

с функцией Гелл-Манна - Лоу

$$\gamma(f) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t,f) \Big|_{t=1}. \qquad /8/$$

Таким образом, рассматривая процесс итерации как последовательность групповых преобразований, получаем уравнение /7/, имеющее характерный вид уравнений ренормализационной группы в квантовой теории поля[4].

Интегрируя /7/ по t от t_n до t_s, получаем

$$\int_{f_n(g)}^{f(g)} \frac{dy}{\gamma(y)} = s - n. \qquad /9/$$

Уравнение /9/ и является основным для нахождения функции $f(g)$. Чтобы конструктивно воспользоваться этим уравнением, остается задать функцию Гелл-Манна - Лоу. Обратим внимание на то, что производная от функции

$$\bar{f}(t,f) = f(t,g,z), \quad z = z(t,g)$$

должна определяться как сложная производная

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\right)_z + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)_t \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Теперь производные по t надо заменить конечным разностями и в результате для функции Гелл-Манна - Лоу можно получить

$$\gamma_{ns}(f) = \frac{f_s(g,z_n) - f_n(g,z_n)}{s-n} + \frac{z_s - z_n}{s-n} \frac{\partial}{\partial z_n} f_n(g,z_n), \qquad /10/$$

где $g = g(f)$, $z_n = z_n(g(f))$. На языке теории групп искомая функция $f(g)$ соответствует неподвижной или фиксированной точке. Для максимально быстрой сходимости последовательности $\{f_n(g,z_n)\}$ управляющие функции $z_n(g)$ надо выбрать так, чтобы уже низшие приближения давали значения, близкие к фиксированной точке. Последняя, как очевидно из /7/, определяется нулями функции Гелл-Манна - Лоу. Так как точное значение этой функции неизвестно, то приближенно фиксированные точки можно найти, зануляя одно из слагаемых выражения /10/, например второе, полагая

$$\frac{\partial}{\partial z_n} f_n(g,z_n) = 0, \qquad /11/$$

чем и определяется управляющая функция $z_n(g)$. Если обратить в ноль первое слагаемое в /10/, то получим уравнение, совпадающее с условием согласования или с условием быстрейшей сходимости, предложенным автором ранее[5,6]. Уравнение /11/ совпадает с условием минимальной чувствительности, рассмотренным Стевенсоном[7]. Из текста данного доклада очевидно, что и условие быстрейшей сходимости[5,6], и условие минимальной чувствительности[7] - это просто частные случаи условий на приближенное определение фиксированной точки. Оба типа этих условий, как следует из вида функции Гелл-Манна - Лоу /10/, можно с одинаковым основанием называть и условиями быстрейшей сходимости, и условиями минимальной чувствительности, что в данном контексте одно и то же.

Проиллюстрируем применение метода на примере одномерного гармонического осциллятора с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda m^2 x^4. \qquad /12/$$

Нулевому приближению сопоставим гамильтониан

$$H_0 = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2. \qquad /13/$$

Введем безразмерные энергию основного состояния $e(g)$, константу связи g и управляющую функцию z:

$$e(g) \equiv \frac{E}{\omega}, \quad g \equiv \frac{\lambda}{\omega^3}, \quad z \equiv \frac{\omega_0}{\omega}. \qquad /14/$$

Полагая $n = 1$, $s = 2$, определяя $z_1 = z(g)$ из /11/ и проинтегрировав /9/, получаем уравнение для энергии основного состояния

$$\frac{4e^2(g) - 1}{4e_1^2(g) - 1} = \exp\left\{\frac{1}{4e^2(g) - 1} - \frac{1}{4e_1^2(g) - 1} - \frac{1}{24}\right\}, \qquad /15/$$

в котором $e_1(g)$ - первое приближение теории возмущений. Сравнивая решение уравнения /15/ с точными значениями $e(g)$, полученными численным счетом[8], убеждаемся, что максимальная ошибка не превышает 0,09% для всех g от нуля до бесконечности.

Условия на фиксированную точку использовались и для более сложных случаев, например, в теории квантовых кристаллов /9/ и в теории плавления /10/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юкалов В.И. - Сообщение ОИЯИ, Р17-88-601, Дубна, 1988.
2. Ширков Д.В. - ТМФ, 1984, т.60, № 2, с.218.
3. Shirkov D.V., Shumovsky A.S., Yukalov V.I. - JINR. Comm., E2-86-460, Dubna, 1986.
4. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. - Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
5. Юкалов В.И. - ТМФ, 1976, т.28, № 1, с.92.
6. Юкалов В.И. - ВМУ, 1976, т.17, № 3, с.270.
7. Stevenson P.M. - Phys.Rev., 1981, v.D23, No.11, p.2916.
8. Hioe F.T., MacMillen D., Montroll E.W. - Phys.Rep., 1978, v.43, No.7, p.305.
9. Yukalov V.I. - Ann.Physik, 1981, v.38, No.6, p.419.
10. Yukalov V.I. - Phys.Rev., 1985, v.B32, No.1, p.436.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 февраля 1989 года.