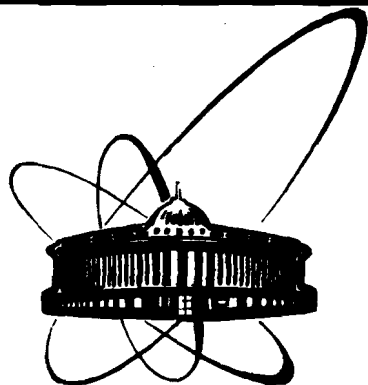


89-694



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Н 581

P5-89-694

В.О.Нефедьев, А.Н.Божинский*

РАВНОВЕСИЕ ТОНКОЙ ВЕСОМОЙ
УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ
НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

* Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи о равновесии тонкой упругой (или вязкой) оболочки на жестком основании в поле внешних сил возникают в ряде областей геофизики (гляциологии, геологии) при моделировании процессов деформации относительно тонких слоев вещества (снежная или селевая масса, геологический пласт и т.д.) под действием силы тяжести ^{/1, 2/}. Во многих случаях распределение скоростей частиц вещества по толщине слоя близко к однородному, поэтому можно рассматривать напряженно-деформированное состояние этих тел, оперируя усредненными по толщине слоя величинами ^{/3/}. Такое допущение позволяет использовать хорошо разработанную теорию тонких безмоментных оболочек ^{/4, 5/}. Нетрадиционность задачи состоит в наличии жесткого основания, по которому оболочка скользит с эффективным трением.

В рамках сформулированных допущений ранее были получены решения задачи о равновесии плоского слоя вещества на цилиндрическом основании ^{/1, 2/}. Однако поперечная кривизна поверхности может привести к перераспределению напряжений в слое и недопустимому искажению результатов моделирования.

В данной работе представлена методика численного решения пространственных задач указанного типа. Дается решение модельной задачи для оболочки, натянутой на сегмент конической поверхности.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В трехмерном евклидовом пространстве E_3 рассмотрим некоторую поверхность S . Пусть замкнутая область D на поверхности S с кусочно-гладкой границей G образует жесткое основание тонкой упругой оболочки, находящейся в поле сил тяжести и трения. Зависимость силы трения $F_{\text{тр}}$ от силы нормального давления N оболочки на основание носит линейный характер (закон Кулона — Мора) :

$$F_{\text{тр}} = c + fN, \quad (1)$$

где c — сцепление, f — коэффициент трения. Граница оболочки закреплена, то есть выполняется условие равенства нулю вектора перемещений

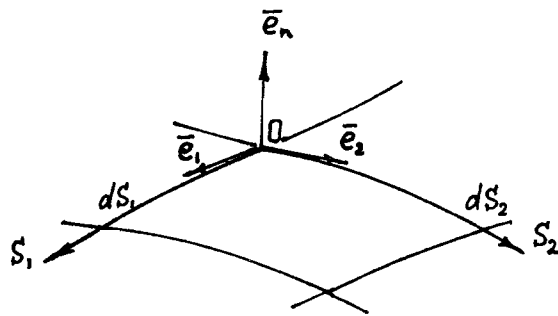


Рис.1

проходящим через данную точку P, и единичным вектором нормали к поверхности в этой точке $\bar{e}_n = [\bar{e}_1 \times \bar{e}_2]$ (рис.1). В указанном базисе в качестве криволинейных координат s_1 и s_2 на поверхности выберем длины дуг соответствующих линий кривизны.

В рамках безмоментной теории оболочек в данной системе координат уравнения равновесия бесконечно малого элемента оболочки, натянутого на элемент поверхности, для компонент тензора напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) имеют вид

$$d(h\sigma_{11})/ds_1 + d(h\sigma_{12})/ds_2 + \rho gh(\bar{e}_1 \bar{e}_g) - F_{\tau\rho} \cos(\alpha_1) = 0, \quad (3)$$

$$d(h\sigma_{12})/ds_1 + d(h\sigma_{22})/ds_2 + \rho gh(\bar{e}_2 \bar{e}_g) - F_{\tau\rho} \cos(\alpha_2) = 0, \quad (4)$$

$$N - h\sigma_{11} k_1 - h\sigma_{22} k_2 + \rho gh(\bar{e}_n \bar{e}_g) = 0. \quad (5)$$

Здесь \bar{e}_g — вектор направления действия силы тяжести; $\cos(\alpha_i)$, $i=1,2$ — соответствующие направляющие косинусы вектора перемещений $\bar{u} = (u_1, u_2)$ в указанном локальном базисе, причем $\cos(\alpha_i) = u_i / |\bar{u}|$, $|\bar{u}| \neq 0$, $\cos(\alpha_i) = 0$, $|u| = 0$; k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности; $h = h(s_1, s_2)$ — толщина оболочки вдоль нормали к поверхности. Для замыкания системы (1), (3)-(5) необходимо добавить соотношения, связывающие напряжения и перемещения (ограничимся линейной теорией деформаций):

$$\sigma_{11} = E/(1-\nu^2) (du_1/ds_1 + \nu du_2/ds_2), \quad (6)$$

$$\sigma_{12} = E/(1+\nu) (du_1/ds_2 + du_2/ds_1) / 2, \quad (7)$$

$$\sigma_{22} = E/(1-\nu^2) (du_2/ds_2 + \nu du_1/ds_1). \quad (8)$$

на G:

$$\bar{u}|_G = 0. \quad (2)$$

Пусть все точки поверхности S неомбилические. В окрестности произвольной точки $P \in S$ рассмотрим локальный базис, образованный единичными векторами \bar{e}_1 и \bar{e}_2 , касательными к двум ортогональным линиям кривизны поверхности,

В уравнениях (3)-(8) присутствует ряд эмпирических постоянных: ρ — плотность, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона среды и g — величина ускорения свободного падения.

Выберем в качестве единиц расстояния, толщины, перемещений и напряжений R, $c/\rho g$, $\rho g R^2/E$, $\rho g R$ соответственно. Здесь R — характерный радиус кривизны оболочки.

Сокращая количество неизвестных и переходя к безразмерной форме записи уравнений, представим (1), (3)-(8) в виде замкнутой системы для компонент вектора перемещений u_k ($k = 1, 2$):

$$a_{mn}^{\ell k} (h) d^2 u_k / ds_m ds_m + b^{\ell k} (s_1, s_2, h, \bar{u}) du_k / ds_m + F^{\ell} (s_1, s_2, h, u_\rho) = 0, \quad (9)$$

где $k, m, n = 1, 2$ — индексы суммирования в уравнениях с номерами $\ell = 1, 2$.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Построим на поверхности S некоторое ограниченное количество I последовательно пронумерованных ($i = 0, 1, 2, \dots, I-1, I$), параллельных между собой линий кривизны одного семейства таким образом, чтобы область D располагалась между линиями с номерами $i = 0$ и $i = I$. Аналогично построим ортогональный этому пучок линий кривизны с номерами $j = 0, 1, 2, \dots, J-1, J$, принадлежащих другому семейству. Зафиксируем на поверхности S упорядоченное множество точек $\{P_{ij}\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, I; j = 0, 1, 2, \dots, J$), образованное пересечением ортогональных друг другу линий кривизны соответствующих номеров. Подмножество $\{w_{ij}\}$ множества $\{P_{ij}\}$, составленное из точек этого множества, принадлежащих области D, и точек множества $\{P_{ij}\}$, лежащих на замкнутой ломаной линии G_w , аппроксимирующей границу G области D, назовем сеткой $\{w_{ij}\}$ данной задачи. Любой прямоугольник с вершинами в точках сетки $(P_{ij}, P_{i+1j}, P_{i+1j+\nu}, P_{ij+\nu})$ может рассматриваться в качестве дискретного приближения бесконечно малого элемента оболочки. Заменяя в уравнении (9) для каждого подобного дискретного элемента операторы дифференцирования их разностными аналогами $^{6/}$, редуцируем исходную задачу к проблеме отыскания приближенных значений $\bar{u}_{ij} = (u_{ij}^1, u_{ij}^2)$ компонент вектора перемещений в точках сетки, что адекватно решению системы разностных уравнений первого порядка аппроксимации:

$$\hat{L}[\bar{u}] = 0. \quad (10)$$

Оператор $\hat{L}[\bar{u}]$ имеет вид

$$L^{\ell}[\bar{u}] = A_{ij}^{\ell k} u_{i+1j+1}^k + B_{ij}^{\ell k} u_{i+1j}^k + C_{ij}^{\ell k} u_{ij+1}^k + D_{ij}^{\ell k} u_{ij}^k + E_{ij}^{\ell k} u_{i-1j}^k + G_{ij}^{\ell k} u_{ij-1}^k + H_{ij}^{\ell} - F_{ij}^{\ell}[\bar{u}]$$

для внутренних точек сетки, где $k=1, 2$ — индекс суммирования, $\ell=1, 2$ — номер уравнения, $F_{ij}^{\ell}[\bar{u}]$ — нелинейная часть оператора $\hat{L}[\bar{u}]$:

$$F_{ij}^{\ell}[\bar{u}] = [T_{ij}^1 (u_{i+1j}^1 - u_{ij}^1) + T_{ij}^2 (u_{ij+1}^2 - u_{ij}^2) - T_{ij}^3] u_{ij}^{\ell} / (u_{ij}^1)^2 + u_{ij}^2)^{1/2} \text{ при } |\bar{u}_{ij}| \neq 0,$$

$$F_{ij}^{\ell}[\bar{u}] = 0 \text{ при } |\bar{u}_{ij}| = 0$$

$$\text{и } u_{ij}^1 = u_{ij}^2 = 0,$$

для точек, лежащих на граничной ломаной линии G_w (см. (2)). Описанный выше метод построения сетки $\{w_{ij}\}$ позволяет выделить из общего набора матриц коэффициентов оператора $\hat{L}[\bar{u}]$ 18 линейно независимых, что существенно сокращает объем задачи (10).

Решение системы нелинейных уравнений (10) возможно многими способами^{7/7}. Для оператора $\hat{L}[\bar{u}]$, имеющего линейную часть в виде сильно разреженной матрицы, определенными преимуществами обладает итерационный метод отыскания элементов матриц $[u_{ij}^1]$ и $[u_{ij}^2]$, заключающийся в последовательном вычислении членов последовательности $\{\bar{u}^n\}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}^n = \bar{u}$ по формуле

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + r \hat{L}[\bar{u}^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Итерационный параметр r выбирается таким образом, чтобы последовательность $\{\bar{u}^n\}$ в (11) была сходящейся. При использовании этого метода большое количество итераций, необходимое для достижения требуемой степени точности ϵ :

$$\max_{ij} \{ |\bar{u}_{ij}^{n+1} - \bar{u}_{ij}^n| / |\bar{u}_{ij}^n| \} < \epsilon,$$

компенсируется малым числом простых арифметических операций на каждом шаге n .

4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА

Описанный в предыдущем разделе алгоритм реализован в виде программы SLOPE на ПЭВМ серии IBM-PC (операционная система MS-DOS(PC)) на языке FORTRAN-77.

В качестве тестового использован расчет напряженного равновесного состояния оболочки постоянной толщины $h=10$, натянутой на сегмент конической поверхности (рис.2). Значения параметров: $c=1$; $f=0,4$; $\nu=0,5$. Линиями кривизны являются прямые — образующие конуса и окружности — результат сечения поверхности конуса плоскостями, перпендикулярными его оси. Точки пересечения этих линий образуют сетку данной задачи. Изменение количества узлов сетки показало, что разностная схема (10) аппроксимирует решение с относительной погрешностью $\delta|\bar{u}|/|\bar{u}| \sim \delta\bar{u}$. Для достижения итерационным процессом (11) необходимой точности $\epsilon=10^{-3}$ потребовалось $n < 450$ итераций. Среднее по области отношение нормальных напряжений в точках сетки $\langle |\sigma_{22}| / |\sigma_{11}| \rangle_D \sim 0,5$ подтверждает необходимость использования двумерной модели для расчета оболочек даже со слабо выраженной поперечной кривизной поверхности. Среднее по области напряжение сдвига $\langle |\sigma_{12}| \rangle_D \sim 0,3 \langle |\sigma_{11}| \rangle_D$.

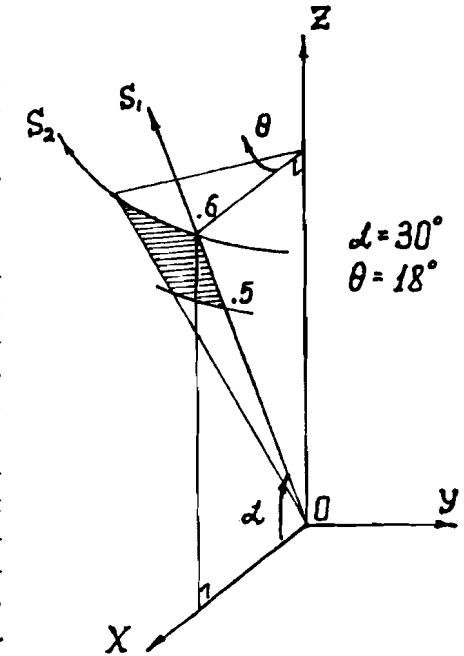


Рис.2

ЛИТЕРАТУРА

1. Божинский А.Н., Лосев К.С. — Основы лавиноведения. Л.: Гидрометеоздат, 1987.
2. Божинский А.Н. — Неустойчивость естественных масс льда и снега на склонах гор. В кн.: Итоги науки и техники, гляциология. М.: ВИНТИ, 1980, т.2.
3. Nye J.K. — J. Glaciology, 1959, 3, p. 493.
4. Новожилов В.В. — Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962.
5. Власов В.З. — Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949.
6. Годунов С.К., Рябенкий В.С. — Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. — Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 октября 1989 года.