89-580

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5-89-580

В.О.Нефедьев

ГЕНЕРАТОР СЕТКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Направлено в журнал "Математическое моделирование"

1989

1. Введение

Проблема выбора оптимальной системы координат чрезвычайно важна для задач теории тонких оболочек [1], при решении которых часто необходимо построить сетку криволинейных координат на поверхности оболочки. Если для оболочек специального вида (цилиндрических, пологих, оболочек вращения и т.д.) выбор системы координат очевиден [2], то проблема построения ортогональной сетки координат на поверхности произвольной формы (тем более заданной в виде дискретной функции) еще ждет своего решения.

В данной работе представлен алгоритм построения подобной сетки, дается краткое описание Бейсик-программы SCALE, реализующей этот алгоритм на ЭВМ.

2. Принципы построения сетки

В трехмерном евклидовом пространстве E_3 *рассмотрим некоторую* поверхность S и замкнутую область $D \subset S$ с кусочно - гладкой границей G. Пусть все точки поверхности S неомбилические. В окрестности произвольной точки $P \in D$ построим локальный базис, образованный единичными векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, касательными к двум ортогональным линиям кривизны поверхности, проходящим через данную точку P, и единичным вектором нормали к поверхности в этой точке $\bar{e}_n = [\bar{e}_1 \times \bar{e}_2]$ (рис.1). В указанном базисе в качестве криволинейных координат s_1 и s_2 на поверхности выберем длины дуг соответствующих линий кривизны.

Построим на поверхности S некоторое ограниченное количество I последовательно пронумерованных ($i=0,1,2,\ldots,I-1,I$), параллельных между собой линий кривизны одного семейства таким образом, чтобы область D располагалась между линиями с номерами $i=0$ и $i=I$. Аналогично построим ортогональный этому пучок линий кривизны с номерами $j=0,1,2,\ldots,J-1,J$, принадлежащих другому семейству. Зафиксируем на поверхности S упорядоченное множество точек $\{P_{ij}\}$ ($i=0,1,2,\ldots,I$; $j=0,1,2,\ldots,J$), образованное узлами пересечения ортогональных линий кривизны соответствующих номеров. Подмножество $\{w_{ij}\}$ множества $\{P_{ij}\}$, составленное из точек этого множества, принадлежащих области D, и точек множества $\{P_{ij}\}$, лежащих на замкнутой ломаной линии G_w, аппроксимирующей границу G области D, является сеткой $\{w_{ij}\}$ данной задачи.

Зададим в каждом семействе направление роста длин дуг линий кривизны в соответствии с ростом нумерации точек сетки. Начало отсчета длин дуг линий кривизны - точки их пересечения с линией номер 0 из ортогонального семейства. Необходимо заметить, что для данного набора криволинейных координат s_1 и s_2 линии кривизны не являются параметрическими линиями, поэтому, применяя сетку подобного вида, следует использовать *локальную* форму описания любых уравнений модели в локальном базисе каждой конкретной точки сетки $\{w_{ij}\}$. При этом компоненты метрического тензора поверхности имеют вид

$$g_{11} = 1 \,, \quad g_{12} = 0 \,, \quad g_{22} = 1 \,. \tag{1}$$

Простая форма выражений (1) позволяет существенно упростить уравнения модели и, как следствие, в дальнейшем сократить резервируемый объем памяти ЭВМ и количество вычислений.

3. Алгоритм построения сетки

Пусть (x, y, z) - правая прямоугольная декартова система координат в E_3, и уравнение неомбилического куска поверхности S в этой системе имеет вид

$$z = z(x, y) \,. \tag{2}$$

Обозначим:

$$E = 1 + (dz/dx)^2, \quad F = dz/dx \; dz/dy \,, \quad G = 1 + (dz/dy)^2 \,, \tag{3}$$

$$L = d^2z/dx^2 \; g^{-1/2}, \quad M = d^2z/dxdy \; g^{-1/2}, \quad N = d^2z/dy^2 \; g^{-1/2},$$

где $g = EG - F^2$.

Уравнение проекций линий кривизны поверхности на плоскость $(X,0,Y)$

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

имеет два решения [3]:

$$dy/dx = \phi^+(x,y) \quad \text{и} \tag{4}$$

$$dy/dx = \phi^-(x,y) \,. \tag{5}$$

Пусть семейство кривых, определяемое уравнением $dy/dx = \phi^+(x,y)$

является носителем s_1 координаты , а семейство кривых, определяемое уравнением $dy/dx = \varphi^-(x,y)$ – s_2-координаты .

Построение точек сетки осуществляется рекуррентным способом. Зафиксируем на поверхности S точку P_{00} и построим линии кривизны (4) и (5) , проходящие через данную точку . Выделим каким-либо способом набор точек P_{0j}, $j=1,2,...,J$ и P_{i0}, $i=1,2,...,I$ на этих кривых. Положение проекции точки $P_{i+1\,j+1}$: ($x_{i+1\,j+1}$, $y_{i+1\,j+1}$) на плоскости (X,O,Y) , где $i=0,1,...,I-1$; $j=0,1,...,J-1$, определяется как место пересечения прямой , касательной к кривой (4) в точке с уже известными координатами ($x_{i\,j+1}$, $y_{i\,j+1}$), и прямой , касательной к кривой (5) в точке с также ранее вычисленными координатами ($x_{i+1\,j}$, $y_{i+1\,j}$) (рис.2) :

$$\left.\begin{aligned} y - y_{i\,j+1} &= \varphi^+(x_{i\,j+1},y_{i\,j+1})\ (x - x_{i\,j+1}) \\ y - y_{i+1\,j} &= \varphi^-(x_{i+1\,j},y_{i+1\,j})\ (x - x_{i+1\,j}) \end{aligned}\right\} . \qquad (6)$$

Т.о., в уравнениях (6) использована аппроксимация прямыми линиями кривых в окрестности указанных точек . Криволинейные координаты s^1_{ij} и s^2_{ij} точек P_{ij} ($i=0,1,...,I$; $j=0,1,...,J$) на поверхности S можно вычислить по формулам

$$s^1_{0j} = 0 \ , \ j=0,1,...,J \ ;$$

$$s^1_{ij} = s^1_{i-1\,j} + (\ (x_{ij}-x_{i-1\,j})^2+(y_{ij}-y_{i-1\,j})^2+(z_{ij}-z_{i-1\,j})^2)^{1/2},$$

$i=1,2,...,I$, $j=0,1,...,J$;

$$s^2_{i0} = 0 \ , \ i=0,1,...,I \ ;$$

$$s^2_{ij} = s^2_{i\,j-1} + (\ (x_{ij}-x_{i\,j-1})^2+(y_{ij}-y_{i\,j-1})^2+(z_{ij}-z_{i\,j-1})^2)^{1/2} \ ,$$

$i=0,1,...,I$, $j=1,2,...,J$;

где $z_{ij} = z(x_{ij},y_{ij})$.

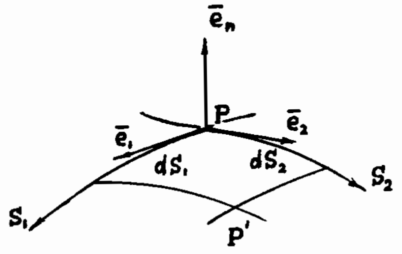

Рис. 1

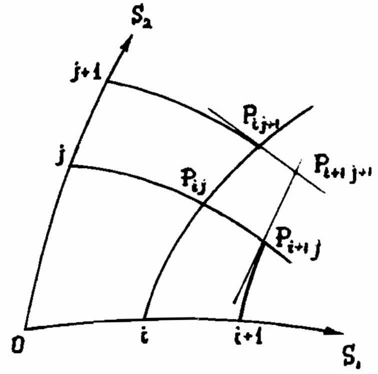

Рис. 2

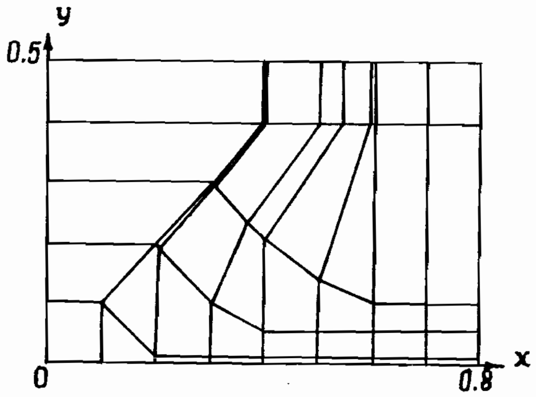

Рис. 3. Пример построения сетки на поверхности , определяемой функцией $z(x,y)=x^2y^2(1/2-x/3)(1/2-y/3)$.

4. Краткое описание программы SCALE

Описанный в предыдущем пункте алгоритм реализован на ПЭВМ серии IBM-PC в виде программы SCALE на языке расширенный BASIC . Ниже перечислены некоторые особенности алгоритма программы SCALE .

В процессе работы программы проекция области D на плоскость (X,O,Y) вписывается в прямоугольник с размером сторон x_{max} по оси OX и y_{max} по оси OY, что требует задания значений дискретной функции $Z_{kl} = z(x_k, y_l)$ в узлах регулярной сетки $\{W_{kl}\}$:

$x_k = \delta x\, k$, $k = 0,1,\dots,K$, $\delta x = x_{max} / K$;

$y_l = \delta y\, l$, $l = 0,1,\dots,L$, $\delta y = y_{max} / L$.

В узлах сетки $\{W_{kl}\}$, расположенных вне указанной проекции, сеточная функция Z_{kl} доопределяется таким образом, что на сетке $\{w_{ij}\}$ кривые одного семейства вне области D непрерывно продолжаются пучком параллельных прямых линий (рис.3).

При генерации сетки $\{w_{ij}\}$ необходимые значения функций (2) и (3) в точках P_{ij} ($i=0,1,\dots,I$; $j=0,1,\dots,J$) вычисляются методом 4-точечной сплайн-интерполяции [4] по заданным значениям сеточной функции Z_{kl} ($k=0,1,\dots,K$; $l=0,1,\dots,L$). Одновременно производится коррекция системы (6), если в результате ошибок аппроксимации и округления кривые одного семейства пересекаются.

Литература

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Гостехиздат, М., 1949
2. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Л., 1962
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. "Наука", М., 1984, с.528
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной матаматики. "Наука", М., 1977, с.146

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1989 года.

Нефедьев В.О. Р5-89-580

Генератор сетки ортогональных криволинейных координат на произвольной поверхности

Представлен алгоритм построения непараметрической сетки криволинейных координат на произвольной поверхности. Узлами сетки являются пересечения линий кривизны поверхности, криволинейными координатами - длины дуг этих линий. Алгоритм реализован на ПЭВМ в виде программы SCALE.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод автора

Nefediev V.O. P5-89-580

The Curvilinear Coordinate Orthogonal Scale Designer for a Surface

The algorithm of desing of curvilinear coordinate non-parameter scale for a surface is considered. Nodes of the scale are the points of intersection of the surface curvature lines. Curvilinear coordinates are the length of the securves. PC program SCALE realizes this algorithm.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989