сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-502

Е.П.Жидков, В.В.Курышкин *, В.А.Сорокин*

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА В ЭЛЕКТРОФИЛЬТРЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ЭЛЕКТРОДОВ

*Университет дружбы народов им. П.Лумумбы, Москва

1989

1. Постановка задачи

В задаче, возникшей при расчете электрофильтра для очистки диэлектрических жидкостей [1], электростатическое поле создается потенциалом $\varphi = \pm 1$, подаваемым на электроды, профиль которых изображен на рис. 1. Межэлектродное пространство заполнено средами с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рабочая жидкость и разделительные прокладки соответственно). Исследование электростатического поля таких систем имеет практический интерес, так как рассматривается модель реальной технической установки для выделения дисперсной фазы из диэлектрических жидкостей.

Поле электростатической системы в межэлектродном пространстве (продолжающемся бесконечно во всех направлениях) описывается потенциалом φ, удовлетворяющим уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ с граничными условиями $\varphi / C_i = \pm 1$, где C_i - контуры, ограничивающие электроды. Необходимо также задать условия на бесконечности и учесть неоднородность диэлектрического заполнения. Периодичность структуры электродов и наличие плоскостей симметрии позволяет [2] искать решение уравнения Лапласа только в "ячейке периодичности" G (незаштрихованная область на рис. 2). На бесконечности $z \to \infty$ электростатическое поле данной системы электродов будем аппроксимировать однородным полем плоского конденсатора, т.е. полагаем для области G

$$\lim_{z \to \infty} \varphi(y, z) = \frac{y}{a}, \quad y \in [0, a].$$

Значение электростатического поля во всем межэлектродном пространстве устанавливаем после решения задачи в области G с помощью известных [2] соотношений периодичности и симметрии.

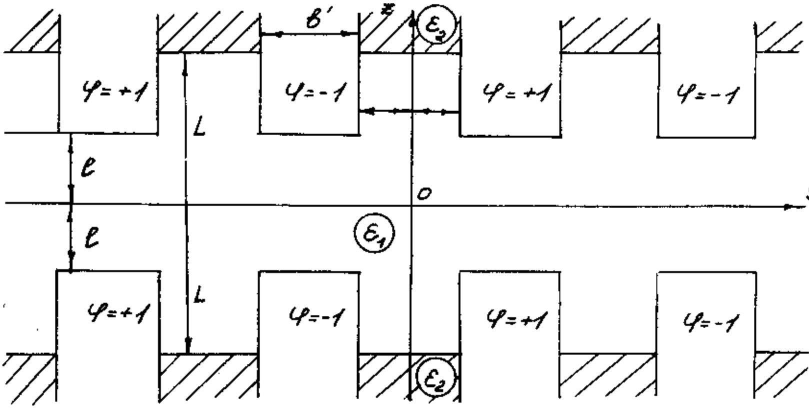


Рис. I. Сечение системы плоскопараллельных электродов. $2l$ – зазор между электродами по оси O_z; $2L$ – расстояние между разделительными прокладками; b' – толщина электрода; $2a$ – расстояние между электродами по оси O_y.

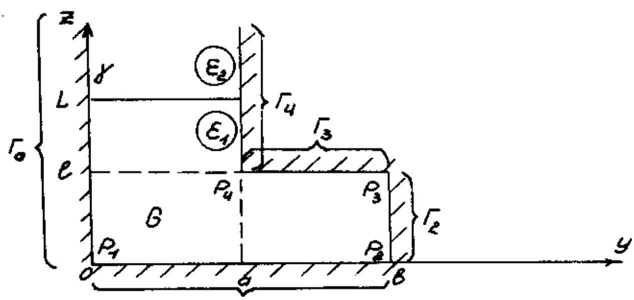


Рис. 2. Ячейка периодичности G, $b = a + \frac{b'}{2}$;

$\Gamma_0 = \{(y,z): y = 0,\ z \geq 0\}$; $\Gamma_1 = \{(y,z): 0 \leq y \leq b,\ z = 0\}$;

$\Gamma_2 = \{(y,z): y = b,\ 0 \leq z \leq l\}$; $\Gamma_3 = \{(y,z): a \leq y \leq b,\ z = l\}$;

$\Gamma_4 = \{(y,z): y = a,\ z \geq l\}$; $\gamma = \{(y,z): 0 \leq y \leq a,\ z = L\}$ –

– линия раздела сред;

$\{P_j\}_{j=1}^{4}$ – угловые точки области G.

Таким образом, рассматривается следующая двумерная краевая задача для уравнения Лапласа в указанной на рис. 2 области G, представляющей собой неограниченную область с угловыми точками, заполненную кусочно-однородной средой:

$$\Delta \varphi = 0, \quad 0 < z < L,$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad z > L,$$

$$\varphi/_{\Gamma_0} = 0, \quad \varphi/_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}/_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0,$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ – производная по внешней нормали, (I)

$$\varphi/_{z=L-0} = \varphi/_{z=L+0},$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}/_{z=L-0} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}/_{z=L+0},$$

$\lim\limits_{z\to\infty} \varphi = \frac{y}{a}$ равномерно по $y \in [0, a]$.

2. Существование обобщенного решения

Обозначим

$$V = \{ v \in W_2^1(G) : v/_{\Gamma_0 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0, \ diam\ supp\ v < \infty \},$$

где W_2^1 – пространство Соболева, и для $R > L$

$G_R = \{(y,z) \in G : 0 < z < R\}$. Функцию $\varphi \in W_2^1(G_R)\ \forall R > L$ будем называть обобщенным решением задачи (I), если $\varphi/_{\Gamma_0} = 0, \varphi/_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 1$, $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi = \frac{y}{a}$ равномерно по $y \in [0, a]$ и для всех $v \in V$ имеет место интегральное тождество

$$\int_G \varepsilon(z) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy dz = 0, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 < z < L, \\ \varepsilon_2, & z > L. \end{cases}$$

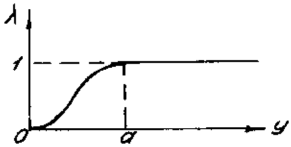
Предложение I. Существует обобщенное решение краевой задачи (I).

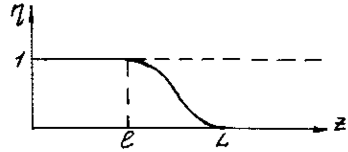
Доказательство. Чтобы воспользоваться теоремой Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве, сделаем замену $\varphi = \psi + w$, где w – какая-либо известная функция, имеющая те же краевые условия и условие на бесконечности, что и φ. Тогда для новой неизвестной функции ψ краевые условия и условие на бесконечности станут однородными: $\psi/_{\Gamma_0 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} \psi = 0$ равномерно по $y \in [0, a]$.

Функцию $\omega(y, z)$ можно выбрать, например, так:

$$\omega(y,z)=\begin{cases} \lambda(y),\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le \ell, \\ \eta(z)\,\lambda(y)+[1-\eta(z)]\,\frac{y}{a},\ 0\le y\le a,\ \ell<z<L, \\ \frac{y}{a},\ 0\le y\le a,\ z\ge L, \end{cases}$$

где функции $\lambda(y)$ и $\eta(z)$ имеют вид





Т.е. пусть $\lambda(y)\in C^{\infty}[0,\infty)$ – неубывающая функция, выходящая тождественно (со всеми производными) на **нуль** при $y\to+0$ и на единицу при $y\to a-0$, $0\le\lambda(y)\le1$ при $0\le y\le a$, $\lambda(y)=1$ при $y\ge a$;

$\eta(z)\in C^{\infty}[0,\infty)$ – невозрастающая функция, выходящая тождественно на **нуль** при $z\to L-0$ и на единицу при $z\to \ell+0$, $\eta(z)=1$ при $0\le z\le \ell$, $0\le\eta(z)\le1$ при $\ell\le z\le L$, $\eta(z)=0$ при $z\ge L$. Так определенная функция $\omega(y,z)\in C^{\infty}(\bar G)$, и для нее выполняются те же краевые условия и условие на бесконечности, что и для φ. Подставив $\varphi=\psi+\omega$ в (2), получим для всех $v\in V$

$$\int\limits_G \varepsilon(z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy\,dz+$$

$$+\,\varepsilon_1\int\limits_0^L\int\limits_0^a\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy\,dz+\frac{\varepsilon_2}{a}\int\limits_L^{\infty}\int\limits_0^a\frac{\partial v}{\partial y}\,dy\,dz=0.$$

Так как $\int\limits_L^{\infty}\int\limits_0^a\frac{\partial v}{\partial y}\,dy\,dz=0,$ имеем для всех $v\in V$

$$B(\psi, v)=\Lambda(v), \qquad (3)$$

где обозначено

$$B(\psi,v)=\int\limits_G\varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy\,dz,\ \Lambda(v)=\varepsilon_1\int\limits_0^L\int\limits_0^a\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

Очевидно, $\Lambda(v)$ – линейный функционал на V, причем, так как $\omega\in C^1(\bar G)$,

$$|\Lambda(v)| \le C\|v\|_{W_2^1(G)} \quad \forall v \in V$$

с постоянной $C>0$, зависящей только от $a, \ell, L, \varepsilon_1$, т.е. функционал Λ непрерывен на VB в метрике $W_2^1(G)$. Обозначим $H = \{\psi \in W_2^1(G): \psi_{\Gamma_0 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0\}$. Тогда $H = \tilde{V}$ в $W_2^1(G)$, и $\Lambda(v)$, ввиду его непрерывности, – линейный непрерывный функционал на H. Билинейная форма $B(\psi, v)$ будет скалярным произведением в H и порождает норму $\sqrt{B(\psi,\psi)}$, эквивалентную на H норме $W_2^1(G)$. В силу теоремы Рисса существует и единственна функция ψ, такая, что (3) – тождество $\forall v \in H$. Тем самым доказано существование обобщенного решения $\varphi = \psi + w$ краевой задачи (I).

3. Гладкость решения

Предложение 2. Обобщенное решение φ краевой задачи (I) является классическим.

Доказательство. Обозначим: $\gamma = \{(y,z): 0 \le y \le a,\ z = L\}$ – линия разрыва коэффициента $\varepsilon(z)$, т.е. линия раздела сред, $\{P_j\}_{j=1}^4$ – угловые точки области G (см. рис. 2). Согласно общей теории эллиптических краевых задач /3/ обобщенное решение φ будет классическим решением задачи (I) для любой подобласти $\omega \in G$, такой, что $\bar{\omega} \cap \gamma = \phi$ и $\bar{\omega} \cap \{P_j\}_{j=1}^4 = \phi$, причем $\varphi \in C^\infty(\bar{\omega})$. Покажем, что φ будет классическим решением задачи (I) во всей области G. Для этого необходимо исследовать поведение обобщенного решения в окрестности бесконечности, в окрестности линии раздела сред γ и в окрестностях угловых точек $\{P_j\}_{j=1}^4$.

Лемма I. В любой окрестности бесконечности, не пересекающейся с γ, обобщенное решение φ будет классическим.

Доказательство. Покажем, что при $z \to \infty$

$$\varphi(y,z) = \frac{y}{a} + O(e^{-\frac{\pi z}{a}})$$

равномерно по $y \in [0,a]$. Тогда при $z > L$ функция $\varphi(y,z)$ – классическое решение задачи (I), а функция $\psi(y,z) = \varphi(y,z) - \frac{y}{a}$ – классическое решение задачи

$$\Delta\psi = 0,\ z > L,\ 0 < y < a;\ \psi|_{y=0} = \psi|_{y=a} = 0;$$

$\lim\limits_{z\to\infty} \psi = 0$ равномерно по $y \in [0,a]$.

Разложив ψ в ряд Фурье:

$$\psi(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \sin\frac{n\pi}{a} y,$$

получим для коэффициентов $z_n(z)$ уравнения

$$z_n'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 z_n = 0,\ n \geq 1,$$

откуда $z_n(z) = A_n e^{\frac{n\pi}{a}z} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}z}$. Из принадлежности $\psi \in L_2(G)$ следует, во-первых, что $A_n = 0\ \forall n \geq 1$, т.е.

$$z_n(z) = B_n e^{-\frac{n\pi}{a}z},\ \psi(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n\pi}{a}z} \sin\frac{n\pi}{a}y,$$

и, во-вторых,

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \int_L^{\infty} e^{-\frac{2n\pi}{a}z}\, dz = \frac{a}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n^2}{n} e^{-\frac{2n\pi}{a}L} < \infty,$$

откуда

$$B_n = O\left(\sqrt{n}\, e^{\frac{n\pi L}{a}}\right),\ n \to \infty.$$

Поэтому найдутся постоянные C_1, C_2, такие, что

$$|\psi| \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-\frac{n\pi}{a}(z-L)} \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n\pi}{a}(z-L)} =$$

$$= -\frac{aC_1}{\pi}\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi}{a}(z-L)}\right] = -\frac{aC_1}{\pi}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-\frac{\pi}{a}(z-L)}}{1-e^{-\frac{\pi}{a}(z-L)}}\right] \leq$$

$$\leq C_2 e^{-\frac{\pi}{a}z},\ \forall y \in [0,a],\ \forall z > L.$$

Таким образом, $\varphi = \frac{y}{a} + \psi$, где $\psi = O\left(e^{-\frac{\pi}{a}z}\right)$ при $z \to \infty$ равномерно по $y \in [0,a]$. Лемма доказана.

Установим теперь гладкость обобщенного решения по обе стороны от линии разрыва коэффициента $\mathcal{E}(z)$. Пусть

$$G_{\ell+} = \{(y,z) \in G : z > \ell\}.$$

Лемма 2. Обобщенное решение φ в области $G_{\ell+}$ будет классическим. Более того, функция $\varphi(y,z)$ будет бесконечно дифференцируемой по y, z на каждом из множеств

$$\{(y,z) : y \in [0,a]\, z \geq L\},\ \{(y,z) : y \in [0,a],\ \ell < z \leq L\}, \qquad (4)$$

т.е. любая производная от $\varphi(y,z)$ имеет предел при $z \to L+0$ и $z \to L-0$ равномерно по $y \in [0,a]$.

Доказательство. Так как функция $\psi = \varphi - \frac{y}{a}$ является классическим решением задачи

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, \ \ell < z < L,\ z > L, \\ \psi|_{y=0} = \psi|_{y=a} = 0, \end{cases}$$

то, чтобы установить классичность обобщенного решения φ в G_ℓ^+, достаточно доказать, что

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to L-0} \psi(y,z) = \lim\limits_{z\to L+0} \psi(y,z), \\ \lim\limits_{z\to \ell-0} \varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial z}(y,z) = \lim\limits_{z\to L+0} \varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial z}(y,z). \end{cases} \tag{5}$$

Раскладывая решение ψ в ряд Фурье:

$$\psi(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(z) \sin\frac{n\pi}{a} y, \tag{6}$$

находим, используя, как и выше, условие $\psi \in L_2(G)$,

$$z_n(z) = \begin{cases} A_n e^{-\frac{n\pi}{a}z}, \ z > L, \\ B_n e^{\frac{n\pi}{a}z} + C_n e^{-\frac{n\pi}{a}z}, \ \ell < z < L; \ \forall_n \geq 1. \end{cases} \tag{7}$$

Покажем, что при $z > \ell$ функции $z_n(z)$ и $\varepsilon z_n'(z)$ абсолютно непрерывны. А тогда на линии раздела сред γ будут выполняться равенства

$$z_n(L-0) = z_n(L+0), \varepsilon_1 z_n'(L-0) = \varepsilon_2 z_n'(L+0). \tag{8}$$

Абсолютная непрерывность функций $z_n(z)$ имеет место в силу принадлежности $z_n'(z) \in L_2(\ell,\infty)$:

$$\int_\ell^\infty |z_n'(z)|^2 dz = \int_\ell^\infty \Big|\frac{2}{a}\int_0^a \psi_z(y,z) \sin n\frac{\pi}{a} y dy\Big|^2 dz \leq$$
$$\leq \frac{4}{a^2} \|\psi_z\|_{L_2(G)} < \infty, \text{ так как } \psi \in W_2^1(G).$$

Чтобы установить абсолютную непрерывность функций $\varepsilon z_n'(z)$, возьмем в (3) пробные функции вида

$$v(y,z) = \sin n\frac{\pi}{a} y \cdot \rho(z),$$

где $\rho(z) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\ell,\infty)$ - произвольная функция. Тогда $\forall_n \geq 1$,

$$\int_\ell^\infty\int_0^a \varepsilon\Big[\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{n\pi}{a} \cos n\frac{\pi}{a} y \cdot \rho(z) + \frac{\partial\psi}{\partial z} \sin n\frac{\pi}{a} y \cdot \rho'(z)\Big] dy dz = 0,$$

откуда, проинтегрировав по частям по переменной y, получаем

$$\int_{\ell}^{\infty}\int_{0}^{a}\varepsilon\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\psi\sin n\frac{\pi}{a}y\cdot\rho(z)+\frac{\partial\psi}{\partial z}\sin n\frac{\pi}{a}y\cdot\rho'(z)\right]dydz=0,$$

или, так как коэффициенты Фурье $Z_n(z)=\frac{2}{a}\int_0^a\psi(y,z)\sin n\frac{\pi}{a}y\,dy$,

$$\int_{\ell}^{\infty}\varepsilon(z)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Z_n(z)\rho(z)+Z_n(z)\rho'(z)\right]dz=0,$$

$$\int_{\ell}^{\infty}\varepsilon Z_n'(z)\rho'(z)\,dz=-\int_{\ell}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\varepsilon Z_n(z)\rho(z)\,dz.$$

Из последнего соотношения, представляющего собой определение обобщенной производной по Соболеву для функции $\varepsilon Z_n'(z)$:

$$\left(\varepsilon Z_n'(z)\right)'=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\varepsilon Z_n(z),$$

где $Z_n(z)\in L_2(\ell,\infty)$, и следует абсолютная непрерывность функций $\varepsilon(z)Z_n'(z)\,\forall n\geq 1$. Таким образом, равенства (8) доказаны.

Теперь равенства (5) следуют из (пока не доказанных свойств) равномерной сходимости самого ряда (6) и ряда (6), формально продифференцированного по z. Покажем с помощью признака Вейерштрасса, что ряд (6), продифференцированный формально по y,z любое число раз, сходится равномерно по y,z на каждом из множеств (4).

Пусть $M\in(L,\ell)$ – произвольное фиксированное число. Из общей теории эллиптических краевых задач следует вещественная аналитичность обобщенного решения в окрестности отрезка $\{(y,z):z=M, 0<y<a\}$. В частности,

$$\left.\frac{\partial^k\psi}{\partial z^k}\right|_{z=M}\in L_2(0,a)\,\forall k\geq 1,$$

откуда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|Z_n^{(k)}(M)\right|^2<\infty\;\forall k\geq 1. \tag{9}$$

Чтобы легче было следить за оценками, будем считать, что $L=-1$, $M=0$, $a=\pi$. Такое предположение нисколько не ограничивает общности, в чем можно убедиться, применяя к задаче операции сдвига по z и растяжения по y,z. Положив $z=1$, $a=\pi$, из (7), (8) получаем

$$\begin{cases}A_n e^{-n}=B_n e^{n}+C_n e^{-n},\\ -\varepsilon_2 A_n e^{-n}=\varepsilon_1 B_n e^{n}-\varepsilon_1 C_n e^{-n};\end{cases}$$

$$\begin{cases} B_n = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \; e^{-2n} C_n, \\ A_n = \dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \; C_n . \end{cases} \tag{I0}$$

Пусть α_n – коэффициенты Фурье $\psi/_{z=0}$, т.е. $\alpha_n = Z_n(0) \; \forall n \geq 1$. Тогда из (7) и (I0) находим

$$\alpha_n = B_n + C_n = \left(1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{-2n}\right) C_n . \tag{II}$$

Очевидно, $1 + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{-2n} \geq \dfrac{1}{2}$ при $n \geq 1$, поэтому

$$\begin{aligned} &|C_n| \leq 2|\alpha_n|, \\ &|B_n| \leq 2e^{-2n}|\alpha_n|, \\ &|A_n| \leq 4|\alpha_n| \end{aligned} \tag{I2}$$

при $n \geq 1$.

Подставляя (I0) и (II) в (7), получим при $z < 1$

$$Z_n(z) = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{2n} \cdot e^{nz} + e^{-nz}\right) \frac{\alpha_n}{1 + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{-2n}}, \; n \geq 1 .$$

Согласно (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Z_n^{(k)}(0)|^2 < \infty \; \forall k \geq 1 . \tag{I3}$$

А так как

$$Z_n(0) = n^k \; \frac{\alpha_n \left(\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{-2n} + (-1)^k\right)}{\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{-2n} + 1},$$

то при $k \geq 1$ $\quad |Z_n^{(k)}(0) \geq n^k |\alpha_n|,$

и тогда по (I3) $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \alpha_n^2 < \infty,$

$\alpha_n = o(n^{-k})$ при $n \to \infty \; \forall k \geq 1$.
Теперь получаем из (I2) при $n \to \infty \; \forall k \geq 1$

$$\begin{cases} A_n = O(n^{-k}), \\ B_n = O(n^{-k}e^{-2n}), \\ C_n = O(n^{-k}). \end{cases} \tag{14}$$

Формально дифференцируя ряд (6) по y , z , находим

$$|\mathcal{D}^\beta \psi| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |Z_n^{(\beta_2)}(z)| \cdot n^{\beta_1}, \tag{15}$$

где $\beta = (\beta_1 \beta_2)$ – мультииндекс, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 > 0$,

$$\mathcal{D}^\beta = \mathcal{D}_y^{\beta_1} \mathcal{D}_z^{\beta_2} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{\beta_1} \partial_z{}^{\beta_2}} .$$

Подставляя (7) и затем (14), получаем из (15)

$$|\mathcal{D}^\beta \psi| \leq \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| e^{-n^2} n^{|\beta|} \text{ при } z > 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (|B_n| e^{nz} + |C_n| e^{-nz}) n^{|\beta|} \text{ при } z < 1; \end{cases}$$

$$|\mathcal{D}^\beta \psi| \leq \begin{cases} M_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{|\beta|-k} e^{-nz}, \ z > 1, \\ M_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{|\beta|-k} (e^{nz-2n} + e^{-nz}), 0 < z < 1; \end{cases}$$

$$\forall K \geq 1,$$

т.е.

$$|\mathcal{D}^\beta \psi| \leq \begin{cases} M_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{|\beta|-k}, \ z > 1, \\ 2M_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{|\beta|-k}, 0 < z < 1, \end{cases}$$

где постоянные M_1 , M_2 зависят от K .

Взяв, например, $K = |\beta| + 2$, получаем по признаку Вейерштрасса, что ряд для $\mathcal{D}^\beta \psi$ сходится равномерно при $z > 1$ и при $0 < \delta \leq z < 1$, т.е. функция $\mathcal{D}^\beta \psi$ равномерно непрерывна при $z \geq 1$ и при $z \leq 1$. А так как мультииндекс β произвольный, то функция $\psi(y, z)$ бесконечно дифференцируема при $z \geq 1$ и при $z \leq 1$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь поведение обобщенного решения в окрестностях угловых точек. Пусть $K_S(P)$ – открытый круг радиуса $S > 0$ с центром в точке P, $\omega_S(P) = G \cap K_S(P)$.

<u>Лемма 3</u>. Для точек $\{P_j\}_{j=1}^3$ обобщенное решение φ в соответствующих окрестностях $\omega_S(P_j), j = 1,2,3,$ будет классическим. Более того, функция $\varphi(y, z)$ будет бесконечно дифференцируемой по y, z в $\bar{\omega}_S(P_j), j = 1,2,3$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим случай $j = 1$. Чтобы выяснить поведение обобщенного решения φ в окрестности точки P_1 , перейдем к поляр-

ным координатам (r,θ) с центром в точке P_1, и пусть $\omega_s=\omega_s(P_1)$ – некоторая окрестность точки P_1.

Согласно общей теории эллиптических краевых задач в окрестности $\omega_s\setminus\bar{\omega}_t$ при любых $t\in(0,s)$ решение $\varphi(y,z)$ классическое, т.е. имеем

$$\Delta\varphi=0,\ 0<r<s,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2};$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}=0,\ \varphi\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0,\ 0<r<s.$$

Записывая лапласиан в полярных координатах и разделяя переменные по методу Фурье, получим

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(r)\cos(2n+1)\theta,\ \text{где}\ R_n(r)=A_n r^{2n+1}+B_n r^{-(2n+1)}.$$

Из условия $\varphi\in W_2^1(\theta)$ следует сходимость интегралов

$$\int_0^s\int_0^{\pi/2}(\varphi_r')^2\,r\,dr\,d\theta,\quad \int_0^s|R_n'|^2\,r\,dr,$$

откуда $B_n=0\ \ \forall n\geq 0$. Тогда $R_n(r)=A_n r^{2n+1}$ и

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{2n+1}\cos(2n+1)\theta. \tag{16}$$

Согласно общей теории обобщенное решение бесконечно дифференцируемо в некоторой окрестности дуги

$$\{(r,\theta): r=s,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}.$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi/2}\Big|\frac{\partial^k\varphi(s,\theta)}{\partial r^k}\Big|^2 d\theta<\infty\quad \forall k\geq 1,$$

и тогда из равенства Парсеваля

$$\int_0^{\pi/2}\Big|\frac{\partial^k\varphi}{\partial r^k}\Big|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2,$$

где a_n – коэффициенты Фурье функции $\frac{\partial^k\varphi}{\partial r^k}$, т.е.

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\partial^k\varphi(s,\theta)}{\partial r^k}\cos(2n+1)\theta\,d\theta=R_n^{(k)}(s),$$

находим необходимую оценку для коэффициентов A_n:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|R_n^{(k)}(s)|^2<\infty;$$
$$\sum_{n=k}^{\infty}n^{2k}A_n^2 s^{4n}<\infty,$$

$$A_n=O(n^{-k}s^{-2n})\ \text{при}\ n\to\infty\ \forall k\geq 1.$$

Обозначим: $\mathcal{D}^{\beta}_{r,\theta}=\mathcal{D}^{\beta_1}_r\mathcal{D}^{\beta_2}_\theta$, где $\beta=(\beta_1\beta_2)$, $\mathcal{D}_r=\frac{\partial}{\partial r}$, $\mathcal{D}_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$; $|\beta|=\beta_1+\beta_2$. Формально дифференцируя ряд (16), получим $\forall k\geq 1$,

$$|\mathcal{D}^{\beta}_{r,\theta}\varphi| \le \sum_{n=|\beta|}^{\infty}(2n+1)^{|\beta|}A_n S^{2n+1-|\beta|} \le$$
$$\le C_1\sum_{n=|\beta|}^{\infty}(2n+1)^{|\beta|}\frac{S^{2n+1-|\beta|}}{n^k S^{2n}} \le C_2\sum_{n=|\beta|}^{\infty} n^{|\beta|-k},$$

где постоянные C_1, C_2 зависят от k.

Таким образом, при k, равном, например, $|\beta|+2$,

$$|\mathcal{D}^{\beta}_{r,\theta}\varphi| < \infty,$$

и по признаку Вейерштрасса ряд для $\mathcal{D}^{\beta}\varphi$ сходится равномерно в ω, т.е. функция $\mathcal{D}^{\beta}\varphi$ равномерно непрерывна в $\bar{\omega}_S$. Следовательно, φ – классическое решение в $\omega_S(P_1)$. А так как мультииндекс β произвольный, то функция φ бесконечно дифференцируема в $\bar{\omega}_S(P_1)$.

В случаях $j=2,3$ соответствующие ряды Фурье

$$\left(\varphi=\sum_0^{\infty}A_n r^{2n}\cos 2n\theta \text{ для } j=2;\ \psi=\sum_0^{\infty}A_n r^{2n+1}\sin(2n+1)\theta,\right.$$

где $\psi=\varphi-1$ для $j=3$) тоже содержат только целые степени переменной r. Поэтому доказательство леммы для случаев $j=2,3$ почти дословно повторяет доказательство для случая $j=1$. Лемма доказана.

Осталась последняя особая точка P_4. Разложение в ряд Фурье решения в окрестности P_4 будет содержать уже нецелые степени переменной r. Поэтому в отличие от предыдущих особых точек производные решения в окрестности P_4 не ограничены. Точнее, имеет место

Лемма 4. Обобщенное решение φ в окрестности $\omega_S(P_4)$ будет классическим. Функция $\varphi(y,z)$ бесконечно дифференцируема на множестве $\bar{\omega}_S(P_4)\setminus P_4$, причем любая производная $\varphi(y,z)$ в окрестности $\omega_S(P_4)$ не ограничена и

$$\mathcal{D}^{\beta}_{y,z}\varphi(y,z)=O(r^{\frac{2}{3}-|\beta|}) \text{ при } r\to 0,$$

где r – расстояние между точками (y,z) и P_4, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ – мультииндекс.

Доказательство. Введем полярные координаты (r,θ) с центром в точке P_4 в некоторой окрестности $\omega_S=\omega_S(P_4)$. Так как согласно общей теории эллиптических краевых задач в окрестности $\omega_S\setminus\bar{\omega}_t$ при любых $t\in(0,S)$ решение $\varphi(y,z)$ будет классическим, то для функции $\psi=\varphi-1$ получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases}\Delta\psi=0,\ 0<r<S,\ 0<\theta<\frac{3\pi}{2},\\ \psi|_{\theta=0}=\psi|_{\theta=\frac{3\pi}{2}}=0,\ 0<r<S.\end{cases}$$

Записывая лапласиан в полярных координатах и разделяя переменные, получим

$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\sin\frac{2}{3}n\theta, \text{ где } R_n(r)=A_n r^{\frac{2}{3}n}+B_n r^{-\frac{2}{3}n}.$$

Из условия $\varphi \in W_2^1(G)$ следует, что $B_n = 0 \ \forall n \geq 1$, т.е.

$$\Psi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{2}{3}n} \sin \frac{2}{3} n\theta. \qquad (17)$$

Так же, как и при доказательстве леммы 3, из условия $\sum_{n=1}^{\infty} |R_n^{(K)}(s)|^2 < \infty$, где $K \geq 0$, находим

$$A_n = O\left(\left(\frac{2n}{3}\right)^{-K} S^{-\frac{2n}{3}} \right), \qquad (18)$$

откуда следует, во-первых, что φ - классическое решение в окрестности $\omega_S(P_4)$, так как из (18) при $K=0$ получаем $|\Psi| \leq C\left(\frac{r}{S}\right)^{\frac{2}{3}}$, а во-вторых, что функция $\varphi(y,z)$ бесконечно дифференцируемая на множестве $\bar{\omega}_S(P_4) \setminus P_4$, так как в окрестности $\omega_S / \bar{\omega}_t$ при любых $t \in (0,S)$ имеем согласно (18) оценку

$$|\mathcal{D}^{\beta}_{r,\theta} \Psi| \leq C \sum_{2|\beta|}^{\infty} \left(\frac{2n}{3}\right)^{|\beta|-K},$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ - мультииндекс, $K \geq 1$ - произвольное целое число, постоянная C зависит от β и K.

Последнее утверждение леммы - любая производная $\varphi(y,z)$ в окрестности $\omega_S(P_4)$ не ограничена и $\mathcal{D}^{\beta}_{y,z} \varphi(y,z) = O(r^{\frac{2}{3}-|\beta|})$ при $r \to 0$, где r - расстояние между точками (y,z) и P_4, - следует теперь из (17). Лемма доказана.

Таким образом, для краевой задачи (I), сформулированной в п.I, доказано существование решения в классическом смысле.

Литература

1. Писаренко В.Г., Никитин А.Г., Парубец А.И., Чайковский О.И., Крысанов С.В. Удаление органической и неорганической дисперсной фазы из диэлектрических жидкостей. Киев, Институт геофизики им. С.И.Субботина, 1985.
2. Курышкин В.В., Родионов А.Ю., Сорокин В.А. Представление электростатического потенциала сложной системы электродов рядом Фурье. //Материалы X Конф. молодых ученых УДН, М., 1987, деп. в ВИНИТИ, № 9151-В87.
3. Агмон С., Дуглас А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., ИЛ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1989 года.