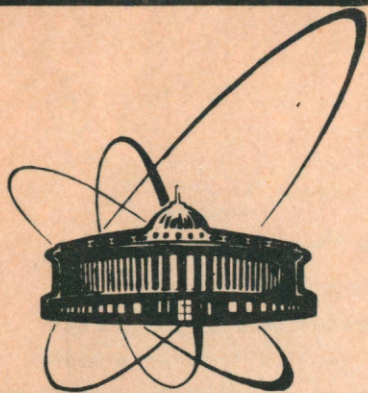


80-125



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Б 869

P5-89-423

Т.Л.Бояджиев, Т.Жанлав, И.В.Пузынин

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ,
ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ
СОЛИТОНОВ

1989

Бояджиев Т.Л., Жанлав Т., Пузынин И.В.

P5-89-423

Численное исследование одной задачи на собственные значения, возникающей в теории устойчивости солитонов

Описаны численные алгоритмы исследования устойчивости солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера с нетривиальными граничными условиями.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод авторов

Boyadzhiev T.L., Zhanlav T., Puzynin I.V.

P5-89-423

Numerical Investigation of an Eigenvalue Problem in the Theory of Soliton Stability

Numerical algorithms for investigation of stability of soliton solutions of nonlinear Schroedinger equation with nontrivial boundary conditions are described.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989

Введение

Так называемое $\phi^3 - \phi^5$ нелинейное уравнение Шредингера

$$i\phi_t + \phi_{xx} - (2A-1)\phi + 2(A+2)\phi|\phi|^2 - 3\phi|\phi|^4 = 0, \quad (1.1)$$

где $0 < A < 1$, встречается в самых различных теоретических моделях физики, включая ядерную гидродинамику, нелинейную оптику, плазму и теорию конденсированного состояния вещества (см. [1,2] и содержащиеся там ссылки). При этом физически содержательными являются как нулевые ($\phi \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$), так и "конденсатные" граничные условия вида

$$\phi(x,t) \rightarrow \exp(\pm i\mu), \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Солитонное решение с такой асимптотикой получено в работе [1]

$$\phi(x,t) = \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch}(\xi - i\mu)}{\left[(2-A)(A^2 + v^2)^{-1/2} + \operatorname{ch}(2x) \right]^{1/2}} \quad (1.3)$$

$$\text{Здесь } \xi = (c^2 - v^2)^{1/2} (x - vt) / 2, \quad \sin(2\mu) = \frac{v}{2} \left[\frac{c^2 - v^2}{A^2 + v^2} \right]^{1/2},$$

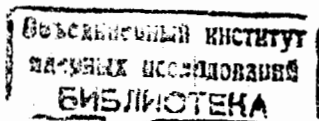
$-\pi/4 < \mu < \pi/4$. Величина $c = 2(1-A)^{1/2}$ имеет смысл минимальной скорости распространения линейных волн на фоне пространственно-однородного решения $\phi(x,t) = 1$ ("скорости звука"), а v - скорость солитона, $|v| < c$.

Решение (1.3) имеет вид пузырька разрежения в конденсате постоянной плотности. В нелинейной оптике солитоны такого типа называют "темными солитонами"; мы же, следуя терминологии [1], будем называть решение (1.3) солитоном-"пузырьком".

Оказалось, что статические "пузырьки" ($v = 0$) неустойчивы к малым возмущениям, причем этот результат можно получить исключительно аналитическими методами [1,2]. Однако предложенная в работах [1,2] схема не допускает простого обобщения на случай $v > 0$, и эту задачу приходится решать численно.

В настоящей статье изложены алгоритмы, разработанные для численного исследования устойчивости солитонов-"пузырьков" в указанном случае.

Как и в [1,2], мы ограничимся здесь анализом устойчивости в линейном приближении. Подставим в выражение (1.1) решение вида



$\bar{\phi}(x, t) = \phi(x, t) + \varepsilon(f(\bar{x}) + ig(\bar{x})) e^{\lambda t}$, (1.4)
 где $\phi(x, t)$ дается формулой (1.3), $\bar{x} = x - vt$, а ε - малый параметр, $\varepsilon \ll 1$. Линеаризуя по параметру ε , приходим к задаче на собственные значения

$$H(v) y = \lambda J y. \quad (1.5)$$

Здесь $\lambda \in R$ - число, $y = y(x)$ - вещественная функция, $y = (f, g)^T$ (ниже черту над переменной x опускаем). Матричный оператор $H(v)$ определяется по формуле

$$H(v) = \frac{d^2}{dx^2} I + \frac{d}{dx} J - U(x), \quad (1.6)$$

где I - единичная матрица, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а матрица $U(x)$ потенциалов имеет вид

$$U(x) = \begin{pmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{pmatrix};$$

при этом $q_1(x) = F + 2F' r^2$, $q_2(x) = F + F' j^2$, $q_3(x) = 2F' r j$, а $F(\rho) = (\rho-1)(2A+1-3\rho)$. Далее, $r(x)$ и $j(x)$ - соответственно вещественная и мнимая части решения (1.3), а $\rho(x) = (r^2(x) + j^2(x))$. Граничные условия для уравнения (1.5) имеют вид

$$f(x) = g(x) = 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

В сформулированную таким образом задачу (1.5), (1.8) входит явным образом параметр v - скорость солитона. Критическим будем называть значение скорости v_c , при котором собственное значение λ обращается в ноль, т.е.,

$$\lambda(v_c) = 0 \quad (1.9)$$

(при дальнейшем анализе иногда удобнее использовать вместо величины v безразмерный параметр $\beta = v / c$).

Предмет рассмотрения данной работы составляет задача вычисления критической скорости v_c . Допуская на основании ряда соображений из феноменологии солитонов, что величина v_c существует, мы опишем два взаимно дополняющих способа ее нахождения.

2. Обратная спектральная задача

Пусть H - вещественное гильбертово пространство, область $B \subset H$, $L(v) : B \rightarrow H$ - линейный оператор, гладким образом зависящий от параметра $v \in R$. Обозначим через Z пространство $B + R$ и рассмотрим нелинейное относительно пары $z = (y, v)$ уравнение

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} L(v) y \\ \langle y, y \rangle - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в H . В частном случае $L(v) = L_0 - v E$, где L_0 не зависит от v , а E - единичный оператор, уравнение (2.1) представляет стандартную задачу на собственные значения для оператора L_0 , решение которой при помощи непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) подробно изучалось в [4]. Для случая, когда $L(v)$ есть аналитическая по v матрица, в работе [5] предложены некоторые алгоритмы численного решения (2.1), включающие в себя классический метод Ньютона. В настоящем параграфе, полагая $L(v) = H(v) - \lambda J$, $\lambda \in R$, мы рассматриваем уравнение (2.1) как нелинейную задачу для вычисления значений параметра v , соответствующих заданному собственному значению λ . Такое рассмотрение основывается на известной теореме (см., например [6]) о непрерывной зависимости решений задачи (2.1) от параметра. Аналогичный подход применен в работе [7] с целью изучения бифуркации стационарных состояний в неоднородном джоузефовском переходе.

Процесс НАМН сводит решение исходной задачи (2.1) к решению на полуоси $t \in (0, \infty)$ эволюционной задачи для функции $z(t)$

$$\dot{\phi}(z) z + \phi(z) = 0 \quad (2.2)$$

с начальным условием $z(0) = z^0$. Здесь $\dot{\phi}(z)$ - производная Фреше оператора $\phi(z)$, $z^0 \in Z$ - начальное приближение, а точкой сверху обозначено дифференцирование по переменной t . Задача (2.2) имеет очевидный первый интеграл [8] $\phi(z) = \phi(z^0) e^{-t}$, так что при $t \rightarrow \infty$ имеем $\phi(z) \rightarrow 0$ и, следовательно, $z(t)$ стремится к искомому решению.

Запишем уравнение (2.2) более подробно

$$\left. \begin{aligned} L(v) \dot{y} + v \dot{L}(v) y + L(v) y &= 0, \\ 2 \langle y, \dot{y} \rangle + \langle y, y \rangle - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Формальное решение системы (2.3) ищем в виде

$$\dot{y} = -y + v u, \quad (2.4)$$

где $u(x)$ - новая неизвестная функция. Такой подход аналогичен методу окаймления для линейных алгебраических уравнений. Подставляя последнее выражение в (2.3), находим

$$\left. \begin{aligned} L(v) u &= -L'(v) y \\ v &= \frac{1 + \langle y, y \rangle}{2 \langle y, u \rangle} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Формулы (2.5) позволяют построить простой численный алгоритм решения задачи (2.1). Введем на интервале $t \in [0, \infty)$ неравномерную сетку $\{t_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, $t_{k+1} = t_k + \tau_k$, с шагом τ_k и аппроксимируем произ-

водные, входящие в (3.4) и (3.5) при помощи простейших разностных формул порядка $O(\tau_k)$, что соответствует методу Эйлера для уравнения (2.2). В результате имеем

$$L_k u_k = -L_k y_k \quad (2.6)$$

$$v_{k+1} = v_k + \tau_k \frac{1 + \langle y_k, y_k \rangle}{2 \langle y_k, u_k \rangle} \quad (2.7)$$

$$y_{k+1} = (1 - \tau_k) y_k + (v_{k+1} - v_k) u_k, \quad (2.8)$$

где индекс k означает подстановку $t = t_k$. Таким образом, на каждом "временном" слое t_k мы решаем линейное уравнение (2.6); далее, очередное приближение $z_{k+1} = (y_{k+1}, v_{k+1})$ к решению находится по формулам (2.7) и (2.8). Отметим, что на равномерной сетке $\tau_k = 1$ из выражений (2.6)–(2.8) вытекают формулы классического метода Ньютона.

Сходимость метода Эйлера при численной реализации НАМН обоснована для широкого класса задач математической физики в [4].

Выбор шага τ_k интегрирования существенно влияет на скорость сходимости итерационного процесса. В настоящем исследовании используется метод, предложенный в работе [9] и основанный на квадратичной аппроксимации зависимости невязки $\delta_k = \langle \phi_k, \phi_k \rangle$ от шага τ_k .

Для численного решения уравнения (2.6) введем на некотором отрезке $[-R, R]$ оси $x \in (-\infty, \infty)$ равномерную сетку $\omega = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N\}$ с шагом $h = 2R/N$. Обозначим через $\bar{\omega}$ сетку, полученную добавлением к сетке ω точек $x_{-2} = -(R + 2h)$, $x_{-1} = -(R + h)$, $x_{N+1} = R + h$ и $x_{N+2} = R + 2h$. При аппроксимации производных по пространственной координате x используем формулы неявного численного дифференцирования $f'_i = m_i$, $f''_i = M_i$, где моменты m_i и M_i удовлетворяют соотношениям

$$T m_i = D (T - 2 h^2 D) f_i \quad (2.10)$$

$$T M_i = 12 D f_i, \quad (2.11)$$

а трехточечные разностные операторы T , D и D определены по формулам

$$T f_i = f_{i-1} + 10 f_i + f_{i+1}, \quad D f_i = (f_{i+1} - f_{i-1}) / h,$$

$D f_i = (f_{i-1} - 2 f_i + f_{i+1}) / h^2$. Легко проверить, что величины m_i и M_i аппроксимируют соответствующие производные с точностью $O(h^4)$.

Поддействуем на обе части уравнения (2.6), рассматриваемого в узлах сетки ω оператором T ; учитывая коммутативность операторов T ,

D и D , приходим к следующей системе линейных относительно вектора u_k алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & [-12 D I + v_k D (T - 2 h^2 D)] J - T (U + \lambda J) u_k = \\ & [T U - D (T - 2 h^2 D) J] u_k, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $U = dU/dx$. Сюда следует добавить граничное условие $y_0 = y_N = 0$ и замкнуть при помощи естественного предположения $y_{-2} = y_{-1} = 0$, $y_{N+1} = y_{N+2} = 0$; при этом матрица системы является несимметричной, ленточной 9-диагональной.

Все скалярные произведения аппроксимируются с помощью квадратной формулы Симпсона, узлы которой совпадают с узлами сетки ω .

Остановимся кратко на результатах численного эксперимента. Порядок расчетов был выбран следующим. Для заданного $A \in (0, 1)$ отыскивалось решение, соответствующее некоторому $\lambda \in [0, \lambda_0]$, где λ_0 — собственное значение задачи (1.5) с граничными условиями (1.8) при $v = 0$ (см. работу [2]). В качестве начального приближения для собственных функций $f(x)$ и $g(x)$ использовалась "нулевая мода" [2]. При расчете зависимости $v(\lambda)$ для серии значений λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_{n+1} = \lambda_n + n \delta\lambda$, за начальное приближение к искомому решению $(y(\lambda_n), v(\lambda_n))$ выбиралось уже вычисленное решение $(y(\lambda_n), v(\lambda_n))$. В этом случае при достаточно малом приращении $\delta\lambda$ число итераций для очередной точки кривой $v(\lambda)$ не превышало двух-трех.

При фиксированном $A \in (0, 1)$ в результате счета получаются две четко различающиеся ветви зависимости $v(\lambda)$, которые мы условно будем называть левой и правой. Левая ветвь (типичный пример показан на рис. 1) существует в области достаточно малых по модулю λ . На рис. 2 демонстрируется поведение левой ветви для $A = 0,825$ при измельчении шага h сетки; видно, что когда $h \rightarrow 0$, ветвь "прижимается" к оси $v = 0$. Этот факт позволяет сделать вывод о том, что левая ветвь — это кривая, в которую переходит нулевая мода исходной дифференциальной задачи на бесконечном интервале после дискретизации.

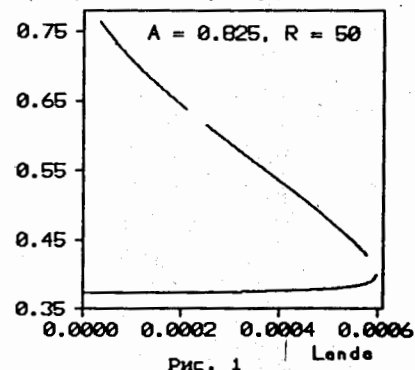


Рис. 1

Правая ветвь (см. рис. 3) имеет достаточно хорошо выраженный максимум, соответствующий критическому значению скорости v , после которого в очень узкой области изменения параметра λ наблюдается крутой спуск к точке $v = 0$. При изменении интервала интегрирования R и шага сетки h кривая $v(\lambda)$ также прижимается к оси $\lambda = 0$, а точка максимума медленно сдвигается вверх и влево, что демонстрируется рис. 4. Таким образом, в данной постановке задачи имеет место зависимость результатов от параметров дискретизации R, h . В следующем параграфе рассмотрена переформулировка граничных условий исходной задачи, позволяющая обойти в значительной мере указанные трудности.

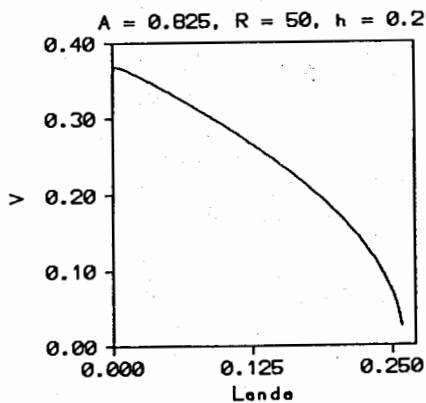


Рис. 3

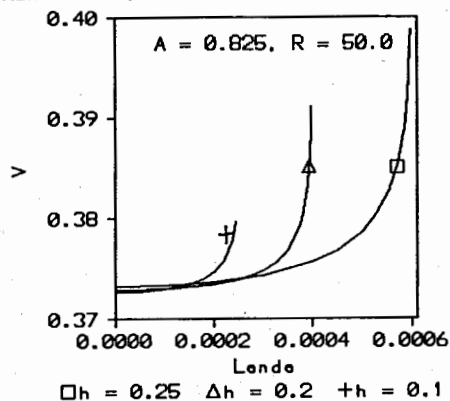


Рис. 2

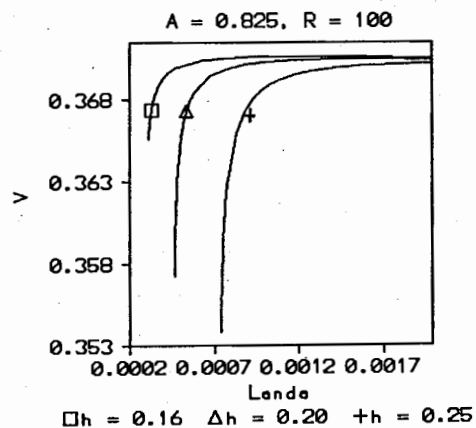


Рис. 4

3. Прямая спектральная задача

Пусть уравнение

$$\phi_h(z_h) = 0, \quad z = (\lambda, y), \quad v = \text{const} \quad (3.1)$$

является дискретной аппроксимацией исходной задачи на собственные значения (2.1). Предположим, что оператор ϕ_h представим в виде суммы $\phi_h = \phi_{oh} + \phi_{ih}$, где ϕ_{oh} — легко обратимый оператор, являющийся в некотором смысле главной частью оператора ϕ_h . Вторым подходом к нахождению критического значения v_c заключается в вычислении собственного значения λ как функции параметра v и приближенном решении уравнения (1.9). При этом основу алгоритма составляет решение задачи (2.1) для заданного значения скорости v . Остановимся подробнее на этом.

Пусть $g(t)$ — гладкая на полубесконечном интервале $0 \leq t < \infty$ функция, удовлетворяющая условиям $g(0) = 0$, $g(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$. Вместо эволюционного уравнения (2.2) рассмотрим уравнение [10]

$$\frac{d}{dt} \phi_h(t, z(t)) = -\phi_h(t, z(t)) \quad (3.2)$$

с начальным условием $z(0) = z(\phi(z(0))) = 0$, где

$$\phi_h(t, z(t)) = \phi_{oh}(z(t)) + g(t) \phi_{ih}(z(t)).$$

Перепишем уравнение (3.2) в виде

$$\phi_{oh}'(z) \frac{dz}{dt} + g(t) \phi_{ih}'(z) \frac{dz}{dt} = -(\phi_{oh}(z) + (g(t) + g'(t)) \phi_{ih}(z)) = 0.$$

Рассмотрим дискретное представление последнего уравнения по параметру t с помощью метода Эйлера с переменным шагом τ_k . С целью упрощения вычислений сделаем замену

$$\frac{dz}{dt}(t_k) \frac{z_k - z_{k-1}}{\tau_k} = \delta z_{k-1}$$

во втором члене левой части. В результате имеем итерационный процесс

$$\phi_{oh}'(z_k) \delta z_k = -(\phi_{oh}(z_k) + (g_k + g_k') \phi_{ih}) - g_k \phi_{ih}'(z_k) \delta z_{k-1}, \quad (3.3)$$

где $g_k = g(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$,

$$z_{k+1} = z_k + \tau_k \delta z_k. \quad (3.4)$$

Пусть дифференциальный оператор L аппроксимируется оператором $L_h^{(4)}$ с точностью $O(h^4)$, где h — пространственный шаг сетки. Представим его в виде $L_h^{(4)} = L_h^{(2)} + (L_h^{(4)} - L_h^{(2)})$, где $L_h^{(2)}$ — более простой оператор, аппроксимирующий L с точностью $O(h^2)$. В этом случае первое уравнение системы (3.2) приобретает вид

$$L^{(2)} \delta y_k - \delta \lambda_k J y_k = -L^{(2)} y_k +$$

$$(g_k + g'_k) (L^{(4)} - L^{(2)}) y_k - g_k (L^{(4)} - L^{(2)}) \delta y_k, \quad (3.5)$$

а из условия нормировки вытекает

$$2 \langle y_k, \delta y_k \rangle = 1 - \langle y_k, y_k \rangle. \quad (3.6)$$

Здесь и в дальнейшем для упрощения записи индекс h опущен. Решение уравнения (3.5) ищем в виде

$$\delta y_k = -y_k + u_k + \delta \lambda_k w_k. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в уравнение (3.5), получаем

$$L^{(2)} w_k = J y_k, \quad (3.8)$$

$$L^{(2)} u_k = -(L^{(4)} - L^{(2)}) [(g_k + g'_k) y_k + g_k \delta y_{k-1}]. \quad (3.9)$$

Поправки $\delta \lambda_k$ определяются из (3.6)

$$\delta \lambda_k = \frac{1 + \langle y_k, y_k \rangle - 2 \langle y_k, u_k \rangle}{2 \langle y_k, w_k \rangle}. \quad (3.10)$$

Следующее приближение к искомому решению находится по формуле

$$\left. \begin{aligned} y_{k+1} &= (1 - \tau_k) y_k + \tau_k u_k + \tau_k \delta \lambda_k w_k, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \tau_k \delta \lambda_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right] \quad (3.11)$$

Краевые условия для величин w_k и u_k можно взять в виде (1.8). Однако при малых λ , как отмечалось выше (см. также [3]), затухание решения происходит слишком медленно и, поэтому, целесообразнее использовать следующие граничные условия [3]:

$$\begin{aligned} y' / y &\rightarrow \lambda / (c - v) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ y' / y &\rightarrow -\lambda / (c + v) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В этом случае легко показать, что для w_k имеют место условия

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_k}{(c + v)} w_k - w'_k &= -\frac{y_k}{(c + v)} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ \frac{\lambda_k}{(c + v)} w_k + w'_k &= -\frac{y_k}{(c - v)} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для u_k имеют место аналогичные (однородные) краевые условия.

Линейные задачи (3.8), (3.9) с соответствующими краевыми условиями численно решаются на конечном интервале $[-R, R]$. Для этого

асимптотические краевые условия заменяются условиями на указанном интервале, а скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\langle y, y \rangle = \int_{-R}^R (y_1^2 + y_2^2) dx, \quad \text{где } y_1 = f, \quad y_2 = g.$$

Приближенное решение задач (3.8), (3.9) ищется в виде кубических сплайнов [11] класса $C^2[-R, R]$ на равномерной сетке ω . В конечном счете реализация алгоритма осуществляется методом трехточечной матричной прогонки. Можно показать, что матричная прогонка устойчива и корректна для достаточно малых h . При вычислении скалярных произведений, так же, как и выше, используется квадратурная формула Симпсона с узлами на сетке ω .

Аналогично работе [13], для анализа сходимости приближенных решений $z_{R,h,k} = (\lambda, y_1 = f, y_2 = g)_{R,h,k}$ рассмотрим неравенство

$$\|z - z_{R,h,k}\| \leq \|z - z_R\| + \|z_R - z_{R,h}\| + \|z_{R,h} - z_{R,h,k}\|, \quad (3.12)$$

здесь $\|\cdot\|$ — сеточный аналог нормы в C , k — номер итерации, $z_{R,h,k}$ — k -ое приближение к точному решению $z_{R,h}$ дискретизированной нелинейной задачи на конечном интервале, z_R — точное решение непрерывной задачи на конечном интервале и, наконец, z — точное решение непрерывной (исходной) задачи на бесконечном интервале. Если итерационный процесс сходится, то, очевидно, $\theta_k = \|z_{R,h} - z_{R,h,k}\|$ стремится к нулю при достаточно больших k . Итерации прекращаются при достижении заданной точности $\delta_k = \|\phi_{h,k}\| \leq \varepsilon$, где δ_k — невязка уравнения (3.1). При этом имеет место приближительное равенство $\theta_k \approx \delta_k$ [8].

Величина $\theta_R = \|z - z_R\|$ численно исследуется путем сравнения результатов при фиксированном h и различных R . Выбирается R таким, чтобы величина θ_R оказалась малой по сравнению с величинами θ_k и $\theta_h = \|z_R - z_{R,h}\|$. Таким образом, в правой части неравенства (4.12) главным членом (при достаточно большом R и малом ε) является θ_h . При этом легко показать, что $\theta_h = O(h^4)$.

Если в уравнении (3.2) формально подставить $g(t) = 0$, то уравнение (3.9) принимает вид

$$L^{(2)} u_k = 0$$

с однородными краевыми условиями. Отсюда следует, что $u_k = 0$ и тем самым итерационный процесс (3.8)–(3.10) превращается в известный метод Эйлера для непрерывного аналога метода Ньютона. В этом случае следует ожидать, что $\theta_h = O(h^2)$.

В численных расчетах порядок сходимости величины θ_h проверяется соотношением

$$\sigma = \left| \frac{(z_{R,h_1,k_1} - z_{R,h_2,h_2}) / (z_{R,h_2,k_2} - z_{R,h_3,k_3})}{(z_{R,h_2,k_2} - z_{R,h_3,k_3})} \right|$$

на последовательности сеток с шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/2$, и $h_3 = h/4$. Известно [12], что теоретические значения σ суть

$$\sigma = \begin{cases} 4, & \text{если } \theta_h = O(h^2) \\ 16, & \text{если } \theta_h = O(h^4). \end{cases}$$

Численные расчеты были сделаны при значениях параметров $A = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$, $\epsilon = 10^{-7}$, $R = 50$. В качестве начальных брались собственные значения задачи при $v = 0$, вычисленные в [13].

Как указывалось выше, по мере приближения значения v к критическому должны ухудшаться свойства задачи (2.1), а следовательно, и системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из уравнений (3.8), (3.9) с $g(t) = 0$. Это сказывается на свойствах приближенного решения. Об этом можно судить по значению параметра σ из таблицы 1, полученной по схеме с $O(h^2)$; видно, что σ все более и более расходится от значения 4 по мере возрастания v . Отсюда яс-

Табл. 1 ($A = 0.5$)

$\beta = v/c$	$\lambda = \lambda(\beta)$				σ_1	σ_2
	$h = 0.05$	$h/2$	$h/4$	$h/8$		
0.29	0.10510827	0.10295412	0.10238427	0.10223964	3.78	3.94
0.30	0.08303226	0.07955545	0.07858103	0.07832940	3.59	3.87
0.31	0.06250527	0.05654848	0.05461538	0.05408668	3.08	3.65
0.32	0.04555822	0.03586306	0.03139353	0.02982201	2.10	2.84

но, что для достижения более точных результатов требуется уменьшить шаг сетки, что затруднительно из-за ограниченности оперативной памяти ЭВМ. Таким образом, решать поставленную задачу с достаточно большой точностью в рамках схемы второго порядка точности нельзя. Выходом из ситуации является использование схемы (3.8)-(3.10) повышенной точности $O(h^4)$. Таблица 2 иллюстрирует порядок сходимости для указанной схемы. Значения найденной скорости в случае $A = 0.5$ приводятся в таблице 3.

Табл. 2 ($A = 0.5$)

$\beta = v/c$	$\lambda = \lambda(\beta)$			σ
	$h = 0.1$	$h/2$	$h/4$	
0.00	0.4925524493	0.4925526778	0.4935526925	16.02
0.10	0.4403686489	0.4403687437	0.4403687496	16.06
0.20	0.2943096159	0.2943089163	0.2943088725	15.97

Табл. 3 ($A = 0.5$)

$\beta = v/c$	$\lambda = \lambda(\beta)$	
	$h = 0.05$	$h/2$
0.326	0.01430194	0.01426347
0.327	0.01182005	0.01176214
0.328	0.00935026	0.00925935
0.329	0.00692182	0.00675741
0.330	0.00463061	0.00426461

Отметим, что с целью ускорения сходимости итерационного процесса была использована, как и в [12], периодическая функция $g(t)$ с затухающей экспонентой.

4. Краткие выводы

В настоящей работе описаны разработанные нами алгоритмы анализа прямой и обратной спектральных задач для оператора (1.5), (1.8), идеейно основанные на непрерывном аналоге метода Ньютона. Применение указанной пары взаимодополняющих процедур позволило получить значение критической скорости β_c для каждого заданного значения параметра A из интервала $(0,1)$. Эти результаты, равно как и их физическая интерпретация, опубликованы отдельно [3].

Авторы выражают благодарность И.В. Барашенкову за обсуждение постановки задачи и результатов вычислительных экспериментов.

Литература

1. Barashenkov I.V., Makhankov V.B., Phys. Lett. A, v. 128, 1-2, 1988.
2. Barashenkov I.V., et al, Physica D, v. 34, N° 1,2, p. 240, 1989.
3. Barashenkov I.V., et al, Phys. Lett. A, v. 135, 2, 1989.
4. Жидков Е.П., Махаренко Г.И., Пузынин И.В., ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып. 1, с. 127-166.

5. Ruhe A., Siam. J. Numer. Anal., 1973, v. 10, N 4, pp. 674 - 689.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа, изд. 2, М., "Наука", 1965, стр. 477.
7. Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В., Сообщения ОИЯИ, P5-88-409, Дубна, 1988.
8. Гавурин М.К., Изв. вузов, Математика, 1958, т. 5/6, с. 18.
9. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н., IBM и МО, 1981, т. 21, N 2, с. 491.
10. Гочева А.Д. Пузынин И.В., Сообщение ОИЯИ, P11-87-459, Дубна, 1987.
11. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л., Методы сплайн-функций, М., "Наука", 1980.
12. Марчук Г.И., Шайдуров В.В., Повышение точности разностных схем, М., "Наука", 1979.
13. Varashenkov I.V., et al, Comm. JINR, E17-85-907, Dubna, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел

13 июня 1989 года.