сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-403

Н.Б.Богданова, Б.Ф.Костенко

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ СИСТЕМ ЛОГИКИ.

Квантовая механика и теория возможности.
4-значная логика с нечеткими истинностными значениями

1989

I. Введение

В предыдущей работе[I] мы сформулировали рецепт получения 4-значной логики с нечеткими истинностными значениями, описывающей потенциальные возможности системы (принимать те или иные значения физической наблюдаемой). Прежде чем рассмотреть подробную интерпретацию этой логики, приведем в явном виде получающиеся при этом таблицы истинностных значений для основных логических операций (табл.I и 2).

Таблица I

P_A	1	0	w	$\bar{w}$
$\sim$	0	1	$\bar{w}$	w

Таблица 2

P_A	1	0	0	1	w	$\bar{w}$	0	0	w	$\bar{w}$	1	1	w	$\bar{w}$	w	$\bar{w}$
q_A	0	0	1	1	1	1	w	$\bar{w}$	w	$\bar{w}$	w	$\bar{w}$	$\bar{w}$	w	0	0
$\Rightarrow$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	w	$\bar{w}$	$\bar{w}$	w	$\bar{w}$	w
$\vee$	1	0	1	1	1	1	w	$\bar{w}$	w	$\bar{w}$	1	1	1	1	w	$\bar{w}$
$\wedge$	0	0	0	1	w	$\bar{w}$	0	0	w	$\bar{w}$	w	$\bar{w}$	0	0	0	0
$\equiv$	0	1	0	1	w	$\bar{w}$	$\bar{w}$	w	1	1	w	$\bar{w}$	0	0	$\bar{w}$	w

Здесь w, $\bar{w}$ $\in [0,1]$. Перейдем теперь к более систематическому изучению этой системы логики.

2. Нечеткая 4-значная логика

Рассмотрим пару наблюдаемых A и B , которые не обязательно предполагаются коммутирующими*. Отнесем к множеству $\mathbf{E}_{AB}$ элементарных (т.е. неопределяемых) понятий логики все высказывания вида

$$P_a = (A, \delta_a) \quad , \quad P_b = (B, \delta_b) \ .$$

В качестве допустимых символов логики возьмем символы следующего вида:

* В дальнейшем потенциальные свойства будут связаны с наблюдаемой B , а наблюдаемая A используется для приготовления некоторого исходного состояния системы.

I) P_{a_i} , P_{b_i} , где $i = 1,2, \ldots$ для обозначения элементарных высказываний;

2) p , q , ... для обозначения высказываний как сложных, так и элементарных;

3) открывающиеся и закрывающиеся скобки – для обозначения порядка выполнения логических операций;

4) символы $\sim$ и $\Longrightarrow$ будем использовать для обозначения логических операций отрицания и импликации соответственно (остальные операции будут определяться через эти).

Примем также следующие правила образования формул логики (выражения, удовлетворяющие этим правилам, назовем правильно образованными формулами, или сокращенно ПОФ):

I) элементарные высказывания являются допустимыми формулами;

2) если высказывание p допустимо, то высказывание $\sim p$ также допустимо;

3) если высказывания p и q допустимы, то и высказывание $p \Longrightarrow q$ допустимо;

4) допустимы только высказывания, удовлетворяющие условиям I–3.

Рассмотрим теперь интерпретацию таблиц для отрицания материальной импликации, приведенных во введении.

А. Таблица для отрицания

$$\sim 1 = 0, \quad \sim 0 = 1, \quad \sim w = \bar{w}, \quad \sim \bar{w} = w$$

говорит о том, что потенциальные возможности w и $\bar{w}$, а также четкие истинностные значения I и 0 являются противоположными или дополнительными друг к другу уже априори.

Б. Таблица для импликации

Правила

I) $(w \Longrightarrow 1) = 1$, 2) $(\bar{w} \Longrightarrow 1) = 1$,

3) $(0 \Longrightarrow w) = 1$, 4) $(0 \Longrightarrow \bar{w}) = 1$

являются обобщением известных правил формальной логики

"истина следует из чего угодно",

"из лжи следует что угодно",

которые читаются теперь так:

"если система характеризуется потенциальной возможностью p , то она также характеризуется и достоверной возможностью q "(I и 2),

"из абсолютно недостоверной возможности p следует потенциальная возможность q" (3 и 4).

Правила

5) $(1 \Longrightarrow w) = w$, 6) $(1 \Longrightarrow \bar{w}) = \bar{w}$

являются обобщением правила

"из истины может следовать только истина".

В самом деле, если $h(p)=1$, $h(q)=w$, то это означает, что "степень присутствия" свойства p у системы, достоверно обладающей свойством q , есть w . Поэтому мерой истинности самой импликации $p \Longrightarrow q$ естественно взять именно величину w .

7) $(w \Longrightarrow 0) = \bar{w}$ 8) $(\bar{w} \Longrightarrow 0) = w$.

Эти правила являются обобщением сентенции

"ложь может следовать только из лжи".

Действительно, чем более достоверно высказывание p , тем менее вероятно вывести из него ложное высказывание. Следовательно, мерой истинности импликации $p \Longrightarrow q$ в этом случае разумно взять противоположное к p высказывание.

9) $(w \Longrightarrow w) = 1$, I0) $(\bar{w} \Longrightarrow \bar{w}) = 1$.

Настоящие правила являются аналогом закона тождества в классической логике (ens est ens)/2/. В данном случае они выражают следующее условие огрубления – в рассматриваемой 4-значной логике мы в состоянии различать лишь две возможности, а именно, возможность попадания наблюдаемой B в некоторую область $\Delta_B \subset V_B$ и возможность попадания наблюдаемой в $V_B - \Delta_B$, но не можем различать высказывания, относящиеся к интервалам, лежащим внутри Δ_B и $V_B - \Delta_B$. Далее будет видно, как можно по мере надобности уточнять описание, рассматривая логики со все большим и большим числом истинностных значений.

II) $(w \Longrightarrow \bar{w}) = \bar{w}$, I2) $(\bar{w} \Longrightarrow w) = w$.

Хотя правила II и I2, на первый взгляд, кажутся несколько парадоксальными (из высказывания p следует с ненулевой достоверностью ему противоположное высказывание q), более внимательное рассмотрение показывает, что они действительно имеют место. В самом деле, справедливость этих правил для случая, когда p и q принимают значения 0 и I, уже доказана ранее/I/. Поэтому будем считать, что свойство p реализуется с вероятностью $0 < w < 1$. Но отсюда сразу следует, что в этом же состоянии системы присутствует и противоположное к p свойство с вероятностью $\bar{w} = 1-w$ также из этого интервала. Степень достоверности такой импликации определяется, очевидно, степенью достоверности консеквента или степенью достоверности утверждения, противоположного антецеденту. И то и другое согласуется с представлениями, выработанными на основе традиционной формальной логики*.

Следует подчеркнуть, что обсуждаемая здесь логика отличается от широко известной нечеткой логики, предложенной Заде/4/. В частности,

* Читателю, знакомому с теорией информации (см., напр., /3/), приведенные в настоящем разделе аргументы, возможно, напомнят также многие, типичные для этой теории оценки.

здесь интервал Δ_B имеет четкие границы, но отношение включения значения β наблюдаемой B в этот интервал задано нечетко (а не наоборот).

3. Операции И, ИЛИ, логически тождественно. Решетка истинностных значений. Аксиоматическая формулировка

Обозначим сформулированную в предыдущем разделе логику символом $Кл_4$ (далее будет понятен смысл этого обозначения). Множество истинностных значений $\{0, w, \bar{w}, 1\}$ этой логики обозначим W_4. Тогда логической функции, обозначаемой символом материальной импликации $\Longrightarrow$, которая осуществляет отображение $W_4 \times W_4 \longrightarrow W_4$ в соответствии с таблицей 2, можно сопоставить отношение частичной упорядоченности* $\leq$ по правилу

$$\forall\, p, q \in W_4 : p \leq q \ \text{ iff } \ h(p \Longrightarrow q) = 1 \, .$$

С точки зрения этого отношения, таблицу для $\Longrightarrow$ можно представить в виде следующей диаграммы (рис.I)

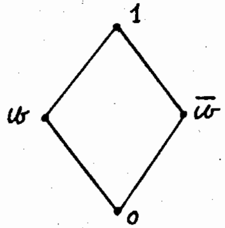

Рис.I.

на которой, как это обычно принимается в теории решеток/5-7/, $p < q$ тогда и только тогда, когда имеется ломаная, восходящая от p к q. Очевидно, что W_4 не является вполне упорядоченным множеством (так как элементы w и $\bar{w}$ не сравнимы), но образует решетку/5-7/. Нетрудно проверить, что операции И, ИЛИ, представленные в таблице 2, согласованы с общепринятыми в теории решеток определениями этих операций: $p \vee q = \mathrm{Sup}(p,q)$, $p \wedge q = \mathrm{Inf}(p,q)$.

На основе таблиц также заключим, что эти операции могут быть выражены и через базовые операции $\sim$ и $\Longrightarrow$, причем при помощи <u>тех же формул</u>, что и в классической 2-значной логике (обозначение $Кл_2$):

$$p \vee q \overset{\text{def}}{=} (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q \, ,$$

$$p \wedge q \overset{\text{def}}{=} \sim(\sim p \vee \sim q) \, .$$

* Напомним, что частичным упорядочением называется рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение. Пользуясь таблицей 2, нетрудно убедиться в том, что все эти условия в данном случае выполняются.

Точно так же убеждаемся, что отношение $\equiv$ определяется, как и в $Кл_2$, при помощи формулы

$$p \equiv q \overset{\text{def}}{=} (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p) \, .$$

Существование этих формул, а также схожесть интерпретации $\sim$ и $\Longrightarrow$, рассмотренных выше, с интерпретацией этих операций в $Кл_2$, наталкивают на мысль провести более подробное сравнение этих логик. Из того, что табл.I и табл.2 для истинностных значений 0 и I совпадают с таблицами $Кл_2$, сразу же следует следующее

<u>Предложение I</u>. Множество законов (общезначимых формул) рассматриваемой здесь логики содержится во множестве законов классической 2-значной логики.

Нетрудно, однако, доказать и обратное к этому

<u>Предложение 2.</u> Множество общезначимых формул $Кл_2$ содержится во множестве общезначимых формул рассматриваемой логики*.

Для доказательства последнего утверждения достаточно убедиться, что $Кл_4$ удовлетворяет следующим аксиомам и правилам вывода, принятым в классической 2-значной логике**.

<u>Аксиомы $Кл_2$</u>

I) $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$,

2) $(p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)) \Longrightarrow ((p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r))$,

3) $(\sim p \Longrightarrow \sim q) \Longrightarrow ((\sim p \Longrightarrow q) \Longrightarrow p)$.

<u>Правила вывода в $Кл_2$</u>

I) Правило отделения (Modus ponens)

Из p и $p \Longrightarrow q$ следует q .

2) Правило универсальной подстановки.

<u>Доказательство Предложения 2</u>. Пользуясь табл.I и 2, можно проверить, что в рассматриваемом исчислении высказываний все аксиомы $Кл_2$ являются общезначимыми формулами***. Справедливость закона отделения обусловлена существованием в $Кл_4$ тавтологии $\models p \wedge (p \wedge q) \Longrightarrow q$. Правило универсальной подстановки фактически отвечает соглашению, согласно которому истинностные значения сложного высказывания определяются истин-

* Таким образом, становится понятен смысл обозначения $Кл_4$ – введенное нами исчисление высказываний является 4-значным представлением традиционной формальной логики.

** Действительно, пользуясь аксиомами и правилами вывода, можно доказать все законы логики. Напр., закон тождества $\models p \Longrightarrow p$ при аксиоматической формулировке $Кл_2$ записывают в форме теоремы $\vdash p \Longrightarrow p$ и т.д.

*** Напомним, что правильно образованная формула логики называется общезначимой (или тавтологией), если она принимает значение "истина" при любых подстановках истинностных значений вместо входящих в эту формулу символов. Общезначимость формулы отмечается символом $\models$, который ставится перед ней.

ностными значениями входящих в него элементарных высказываний, и принимается практически для всех систем логики (за исключением модальных на уровне исчисления предикатов[8]).

4. Алгебраический подход

К выводу о том, что рассмотренная выше логика является лишь другим представлением классической, можно прийти и по-другому, рассматривая алгебраическую структуру, отвечающую $Кл_4$. Основная идея алгебраического подхода заключается в том, чтобы перейти от нахождения различий высказываний по форме записи к нахождению различий по их "логическому содержанию". Это представляется в ряде случаев удобным из-за того, что некоторые ПОФ-логики, различаясь по форме, могут оказаться по-существу полностью эквивалентными. Например, в $Кл_2$ вместо $p \Longrightarrow q$ мы можем во всех случаях использовать $\sim p \vee q$, и т.д.

Исходя из этого, определим следующее отношение эквивалентности*

$$p \,\rho\, q \quad \text{iff} \quad \models p \equiv q \ .$$

Разбивая все множество ПОФ-логики на классы эквивалентности

$[p] = \{q: \ \models p \equiv q \text{ , } q \text{ есть ПОФ в } Кл_4\}$,

определим на множестве всех классов эквивалентности следующее отношение $\leq$:

$$[p] \leq [q] \quad \text{iff} \quad \models p \Longrightarrow q \ .$$

Предложение 3. Отношение $\leq$ на множестве классов эквивалентности ПОФ логики $Кл_4$ является отношением частичного упорядочивания.

Доказательство.

I) Рефлексивность

$[p] \leq [p]$

следует из существования в $Кл_4$ тавтологии $\models p \Longrightarrow p$.

2) Антисимметричность, т.е. что из $[p] \leq [q]$ и $[q] \leq [p]$ следует $[p] = [q]$, доказывается следующим образом. Из $\models p \Longrightarrow q$ и $\models q \Rightarrow p$, согласно таблице для $\wedge$ в $Кл_4$, имеем $\models (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$. Отсюда, по определению отношения $\equiv$, получим $\models p \equiv q$ или $[p] = [q]$.

3) Для доказательства транзитивности необходимо проверить, что из $\models p \Longrightarrow q$ и $\models q \Longrightarrow r$ следует $\models p \Longrightarrow r$. Однако из табл.I и 2 следует даже более сильное утверждение, а именно

$$\models (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r) \ .$$

* Нетрудно проверить, что ρ действительно является отношением эквивалентности, т.е. рефлексивным, симметричным и транзитивным бинарным отношением.

Предложение 4. Во множестве классов эквивалентности логики $Кл_4$ существуют наибольший и наименьший элементы, [1] и [0] соответственно, вычисляемые по формулам

$$[1] = [p \Longrightarrow p] \ ,$$

$$[0] = [\sim(p \Longrightarrow p)] \ .$$

Доказательство. Для произвольного элемента $[q]$ неравенство $[q] \leq [p \Longrightarrow p]$ следует из факта существования тавтологии $\models q \Longrightarrow (p \Longrightarrow p)$. Аналогично $[\sim(p \Longrightarrow p)] \leq [q]$ потому, что имеет место $\models \sim(p \Longrightarrow p) \Longrightarrow q$.

Предложение 5 . Для произвольных элементов $[p]$, $[q]$ из множества классов эквивалентности логики $Кл_4$ имеют место соотношения

I) $\mathrm{Sup}\ \{[p] \ , [q]\} = [p \vee q]$,

2) $\mathrm{Inf}\ \{[p] \ , [q]\} = [p \wedge q]$.

Доказательство. Вначале докажем, что $[p \vee q]$ является верхней гранью двухэлементного множества $\{[p] \ , [q]\}$. Действительно, согласно таблицам истинностных значений для $\Longrightarrow$ и $\vee$ в $Кл_4$ имеют место тавтологии $\models p \Longrightarrow p \vee q$, $\models q \Longrightarrow p \vee q$. Отсюда получаем, что $[p]$, $[q] \leq [p \vee q]$. Теперь докажем, что $[p \vee q]$ является наименьшей верхней гранью множества $\{[p] \ , [q]\}$. Для этого предположим, что существует некоторый класс эквивалентности $[r]$, такой, что $[p] \leq [r]$ и $[q] \leq [r]$. Тогда $\models p \Longrightarrow r$ и $\models q \Longrightarrow r$, а значит, согласно таблице для $\vee$, имеем $\models p \vee q \Longrightarrow r$. Отсюда $[p \vee q] \leq [r]$. Доказательство для $[p \wedge q]$ аналогично.

Следуя общепринятой в теории решеток интерпретации операций Inf и Sup , определим теперь на множестве классов эквивалентности операции И, ИЛИ

$$[p] \wedge [q] = [p \wedge q] \ ,$$
$$[p] \vee [q] = [p \vee q] \ .$$

Операция отрицания на множестве классов эквивалентности определяется аналогично

$$\sim[p] = [\sim p] \ .$$

Классическая природа логики $Кл_4$ на языке алгебры классов эквивалентности описывается следующим утверждением.

Предложение 6. Алгебра классов эквивалентности правильно образованных в $Кл_4$ формул является булевской.

Опуская доказательство этой теоремы (которое аналогично предыдущим доказательствам настоящего раздела), приведем некоторые полезные следствия из нее.

Следствие I. Алгебра классов эквивалентности в $Кл_4$ удовлетворяет следующим условиям дистрибутивности

$([p] \vee [q]) \wedge [r] = ([p] \wedge [r]) \vee ([q] \wedge [r])$,

$([p] \wedge [q]) \vee [r] = ([p] \vee [r]) \wedge ([q] \vee [r])$.

Следствие 2. Для всякого элемента $[p]$ алгебры существует один и только один противоположный ему элемент, т.е. такой элемент $\sim[p]$, для которого имеют место соотношения

$$[p] \vee (\sim [p]) = [1] \quad ,$$
$$[p] \wedge (\sim [p]) = [0] \quad .$$

Следствие 3. Операция $\sim$ на алгебре удовлетворяет условию инволюции

$$\sim(\sim [p]) = [p] \quad .$$

Следствие 4. Имеют место законы де Моргана

$$\sim([p] \vee [q]) = \sim[p] \wedge \sim[q] \quad ,$$
$$\sim([p] \wedge [q]) = \sim[p] \vee \sim[q] \quad .$$

5. Заключение

Резюмируя результаты настоящей работы, можно сказать, что классическая природа рассмотренной выше нечеткой логики проявляется в том, что ее алгебра оказывается изоморфной алгебре логики $Кл_2$. Возможно, что этот вывод можно было предвидеть и заранее. Действительно, из теоремы Биркгофа в теории решеток следует, что во всех рассуждениях, связанных с дистрибутивными решетками, в качестве схем логических операций можно использовать диаграммы Венна (диаграммы Эйлера) для теоретико-множественных операций/7/. В то же время известно, что дистрибутивная решетка с дополнениями является булевской/5-7/. Поскольку все логические операции с самого начала определялись через соответствующие им т.-м. операции (см. раздел 2 в работе/I/), нет ничего удивительного в том, что алгебра построенной нами нечеткой логики оказалась булевской. В рассмотренном выше примере мы построили булевскую алгебру, выделив из множества V_B лишь четыре подмножества Φ , Δ_B , $V_B - \Delta_B$ и само V_B . Выделяя в V_B большее число областей, можно, однако, построить и более детальное описание, содержащее в предельном случае обычную теорию вероятности. К рассмотрению таких многозначных логик мы обратимся в отдельной работе.

Привлекательная черта этих нечетких логик заключается в том, что их алгебры классов эквивалентности, являясь дистрибутивными решетками, не могут содержать подрешеток типа M_3 и N_5 (рис.2)/5-7/.

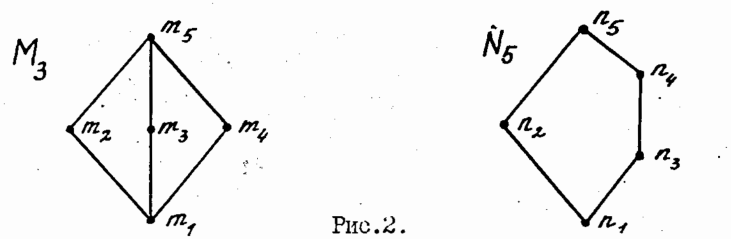

Рис.2.

Видимо, именно это обстоятельство позволяет нам ввести осмысленным образом понятие логического следования. Действительно, в традиционной аристотелевской логике понятие логического следования* интерпретируется как видо-родовое отношение или, что то же самое, как отношение теоретико-множественного включения (см. детали в/9/). С другой стороны, отношения порядка

$$m_2 \ , \ m_3 \ , \ m_4 < m_5$$

весьма трудно интерпретировать как видо-родовое отношение (подобно тому, как мы отождествили в $Кл_4$ неравенство $[p] \leqslant [q]$ с тождеством $\models p \Rightarrow q$) . В самом деле, поскольку в формуле

$$m_2 \vee m_3 = m_5$$

m_3 можно заменить на m_4 , с элементом m_5 трудно связать какое-либо фиксированное понятие (род). Аналогичная, но еще более странная ситуация возникает для N_5 , поскольку в этом случае

$$n_2 \vee n_3 = n_2 \vee n_4 = n_5$$

и, сверх того,

$$n_3 < n_4 .$$

В этой связи необходимо отметить, что широко обсуждаемые в математической литературе логико-подобные конструкции, допускающие существование подрешеток вида M_3 /I0/ и N_5 /II/, описывают скорее некоторые абстрактные свойства алгебры наблюдаемых, нежели истинную логику рассуждений, которой необходимо пользоваться при описании результатов квантовых измерений. Убедительная, на наш взгляд, критика попыток придать этим системам логики прямой физический смысл дана в/I2/.

---

* Отношение логического следования в логике Аристотеля не совпадает с материальной импликацией, определяемой в формальной логике. Фактически оно, будучи извлеченным из анализа конкретных правильных способов умозаключения, сильнее и "реалистичнее" материальной импликации. Однако можно убедиться, что материальная импликация, являясь более формальным и более простым определением логического следования, во всех практически важных случаях в точности соответствует аристотелевскому определению.

Литература

I. Богданова Н.Б., Костенко Б.Ф. Сообщение ОИЯИ, Р5-89-402, Дубна, 1989.
2. Попов П.С., Стяжкин Н.И. Развитие логических идей от античности до эпохи Возрождения. М., Изд-во МГУ, 1974.
3. Пирс Дж. Символы, сигналы, шумы. М., Мир, 1967.
4. Zadeh L.A. Information and Control, 1965, 8, p.338.
5. Биркгоф Г. Теория решеток. М., Наука, 1984.
6. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. М., Наука, 1982.
7. Салий В.Н. Решетки с единственными дополнениями. М., Наука, 1984.
8. Целищев В.В. Понятие объекта в модальной логике. Новосибирск, Наука, 1978.
9. Богданова Н.Б., Костенко Б.Ф. Сообщение ОИЯИ, Р2-89-220, Дубна, 1989.
10. Birkhoff G., von Neumann J. Ann.Math., 1936, v.37, p.823.
11. Jauch M. Foundation of Quantum Machanics, Massachusetts, Addison - Wesley, 1968.
12. Garden R.W. Modern Logic and Quantum Mechanics, Bristol, A.Hilger, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня 1989 года.