сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-402

Н.Б.Богданова, Б.Ф.Костенко

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ СИСТЕМ ЛОГИКИ.

Квантовая механика и теория возможности.

4-значная логика со случайными истинностными значениями

1989

I. Введение

Представление о потенциальной возможности как особом свойстве физических объектов было введено в квантовую механику В.Гейзенбергом и затем обсуждалось многими физиками и философами (см., например, [I]). До настоящего времени понятие потенциальной возможности является лишь элементом физической интерпретации теории, не имеющим прямого математического прообраза в традиционном формализме квантовой механики. Возможно, что это связано с тем обстоятельством, что создатель математического аппарата квантовой механики – Дж. фон Нейман придерживался особой ("психологической") интерпретации [2] квантовой механики, не совпадающей с "копенгагенской".

В настоящей работе мы переформулируем некоторые, а с физической точки зрения – весьма важные, результаты книги [2] на основе представлений о потенциальных возможностях. Сам термин "теория возможности" заимствован из теории нечетких логик, обсуждаемых в связи с возникшей в настоящее время необходимостью обработки на ЭВМ информации, содержащей разного рода неопределенности измеряемых величин или нечетко определенные понятия [3]. В обсуждаемом здесь случае неопределенности обусловлены невозможностью передать в макрообстановку точную информацию о численном значении двух некоммутирующих наблюдаемых (т.е. соотношением неопределенности Гейзенберга), или, что то же самое, тем, что многие "хорошо зарекомендовавшие" себя в макроскопических масштабах понятия (координаты, импульса и др.) становятся нечетко определенными в микромире. Здесь мы продолжаем обсуждение, начатое в [4], где было введено понятие информационно-незамкнутой системы и сформулирована отвечающая ей динамика. Теперь мы коснемся некоторых, чисто логических закономерностей, связанных с процессами передачи информации.

2. Множество элементарных высказываний E_A. Логические операции И, ИЛИ, НЕ

Основным понятием, связующим теоретический (de dicto) и эмпирический (de re) уровни описания в классической и квантовой механиках, является высказывание P_a типа "наблюдаемая A принимает значение a в интервале δ_a ", или сокращенно*

*Мы будем стараться придерживаться обозначений, принятых в книге [5].

$$P_a = (A, \delta_a).$$

В дальнейшем такие высказывания будут упоминаться в обсуждаемых исчислениях высказываний как элементарные. Область изменения наблюдаемой A будем обозначать V_A, а множество всех элементраных высказываний, относящихся к этой наблюдаемой, обозначим E_A.

Теперь довольно естественно определить сложное высказывание P_A *, образованное из простых при помощи логической операции ИЛИ (обозначение $\vee$)

$$P_A = \bigvee_a P_a = (A, \bigcup_a \delta_a),$$

которое читается так: "наблюдаемая A принимает значение в области $\Delta_p = \bigcup_a \delta_a$". Отрицание этого утверждения (или утверждение "наблюдаемая A не попала в область Δ_p") будем обозначать $\sim P_A$ и определим следующим очевидным образом:

$$\sim P_A = (A, \Delta_p^{\perp}),$$

где $\Delta_p^{\perp} = V_A - \Delta_p$ теоретико-множественное дополнение области Δ_p в V_A.

Логическая связка И (обозначение $\wedge$) для высказываний P_A и q_A определяется также при помощи соответствующей ей теоретико-множественной операции пересечения областей, входящих в эти высказывания

$$P_A \wedge q_A = (A, \Delta_p \cap \Delta_q).$$

В дальнейшем мы придем к необходимости приписывать высказываниям P_A и q_A, помимо обычных (истина и ложь) истинностных значений, некоторые промежуточные значения, лежащие в интервале [0,I], которые будут трактоваться как вероятности реализации соответствующих им высказываний (при этом истине и лжи будут отвечать вероятности I и 0 соответственно). Имея в виду эмпирическую интерпретацию высказываний, будем также всегда подразумевать, что истинностная функция

$$h_A : \{P_A\} \to \{w_A : 0 \le w_A \le 1\}$$

удовлетворяет следующим условиям непротиворечивости интерпретации:

I) $h_A(\sim P_A) = \sim h(P_A)$;

2) Если $\Delta_p \subseteq \Delta_q$, то $h(P_A) \le h(q_A)$.

* Для обозначения высказываний общего вида (простых или сложных), относящихся к наблюдаемой A, в качестве индекса будет использоваться сама наблюдаемая, а для обозначения простых – ее некоторое значение a.

3. Мгновенное изменение описания системы

Хорошо известно, что в классической механике учет того обстоятельства, что интервал δ_a имеет ненулевую протяженность (т.е. учет ошибок измерения), в большинстве случаев приводит к невозможности предсказать даже приблизительно значение наблюдаемой уже через некоторый конечный промежуток времени (см., напр., /6-8/). Именно благодаря этому обстоятельству идея мгновенно реализующейся выборки некоторого элемента из множества потенциальных возможностей (другими словами – переход потенциально существующего в существующее актуально или переход возможности в действительность), известная в теории вероятностей с момента ее возникновения и присутствующая в квантовой механике в форме проективного постулата фон Неймана /2/, вошла теперь и в классическую динамику *.

Мгновенное изменение в описании системы, осуществляющееся сразу после поступления в макрообстановку информации о текущем значении наблюдаемой, формально записывается в виде функции присвоения истинностных значений $h_A : E_A \to$ {истина, ложь}.

Необходимо особо подчеркнуть, что присвоение истинностных значений высказываниям теории не является простой логической операцией, так как оно всегда подразумевает наличие некоторого реального взаимодействия системы и прибора, лишающего систему статуса существующей независимо от окружающей макрообстановки. Таким образом, с каждым h_A мы должны связать, по крайней мере умозрительно, некоторый измерительный прибор.

4. Случайные истинностные значения

В свете вышеизложенного сразу возникает вопрос – какое истинностное значение принимает P_A, если информация о наблюдаемой A еще не поступила в макрообстановку? Очевидно, что это истинностное значение не может совпадать ни с t (истина), ни с f (ложь). Представляется естественным (и такой возможностью, видимо, неявно пользуются большинство физиков), ввести третье истинностное значение i (не определено). Однако, поскольку возникающая при этом 3-значная логика обладает рядом нетривиальных свойств и поскольку она к тому же может быть получена

* Осознание необходимости учета ошибок измерения (а, следовательно, и самого измерения) стерло и другую грань между классической и квантовой механикой. Действительно, теперь и классические системы вряд ли могут рассматриваться как существующие per se, без учета их информационной связи с макрообстановкой. Поэтому, сама "копенгагенская" интерпретация, постулирующая сосуществование квантового и обычного классического способа описания, с нашей точки зрения, должна быть пересмотрена (см.ниже).

в виде естественного продолжения одного ряда более простых логик, имеющих прозрачную вероятностную интерпретацию, отложим ее обсуждение до ближайшей публикации и сразу перейдем к рассмотрению некоторой 4-значной системы логики, имеющей два истинностных значения "не определено"*.

Будем считать, что система находится в таком состоянии, что при проверке истинности утверждение $P_A = (A, \Delta_p)$ мы иногда будем получать значение t, а иногда f. Для обозначения этого свойства системы принимать при измерении различные истинностные значения введем случайное число u, которое пока не ассоциировано ни с какой вероятностной мерой. Очевидно, что уже априори существует еще одно случайное истинностное значение ū, которое находится "в противофазе" с u, - если u принимает значение t, то ū надо заменить на f и наоборот. Возможность такого априорного определения связана просто с тем обстоятельством, что всегда существует два противоположных вида аппаратуры, регистрирующих наблюдаемую в интервалах Δ_A и $V_A - \Delta_A$ соответственно**.

На основании этой интерпретации ставим следующую таблицу для логической операции отрицания

Таблица I

P_A	t	f	u	ū
~	f	t	ū	u

Учитывая скоррелированность истинностных значений u и ū, а также обычные таблицы для основных логических операций,

Таблица 2

P_A	t	f	f	t
q_A	f	f	t	t
⇒	f	t	t	t
∨	t	f	t	t
∧	f	f	f	t
≡	f	t	f	t

*То, что необходимо потребовать существования как минимум четырех истинностных значений, если мы хотим иметь логику, обладающую вероятностной интерпретацией, следует из рассмотрения простейшей стохастической системы-обыкновенной монеты. Истина в этом случае соответствует абсолютно достоверному событию-выпадает орел или решка, ложь-невозможному (ни орел, ни решка), две неопределенности отвечают орлу и решке соответственно.

**Если угодно, это эмпирическое определение области и ее дополнения. Если символу t сопоставить единицу, а f заменить нулем, то, очевидно, имеет место u = 1-ū.

сразу же находим продолжение этих логических функций на область случайных истинностных значений

Таблица 3

P_A	u	ū	f	f	u	ū	t	t	u	ū	u	ū
q_A	t	t	u	ū	u	ū	u	ū	ū	u	f	f
⇒	t	t	t	t	t	t	u	ū	ū	u	ū	u
∨	t	t	u	ū	u	ū	t	t	t	t	u	ū
∧	u	ū	f	f	u	ū	u	ū	f	f	f	f
≡	u	ū	ū	u	t	t	u	ū	f	f	ū	u

5. Эмпирические закономерности для последовательных измерений

Рассмотрим квантовую систему, динамическая эволюция которой прерывается в моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ измерениями наблюдаемых A_1, $A_2, \ldots$ соответственно, операторы которых в общем случае могут не коммутировать друг с другом. Поскольку нас будут интересовать чисто логические особенности процесса передачи информации*, будем считать, что $t_{i+1} - t_i \longrightarrow 0$.

Рассмотрим теперь некоторые физические закономерности, которые, в принципе, могли бы быть установлены уже чисто эмпирическим путем. Следующие два свойства являются de re аналогом известного в теории квантовых измерений проективного постулата фон Неймана.

А. Приготовляющее свойство измерительной процедуры

Если производятся последовательные измерения одной и той же наблюдаемой, то после получения информации о результате первого измерения результат второго может быть предсказан однозначно. Используя функцию истинностных значений, запишем это утверждение в следующем виде

если $h_{A,i}(P_a) \in \{t,f\}$, то $h_{A,i+1}(P_a) = F((h_{A,i}(P_a))$,

где F - некоторая неслучайная функция.

Б. Возможность осуществления невозмущающего измерения

Для последовательных измерений одной и той же наблюдаемой истинностные значения высказываний, полученные в предыдущем измерении, подтверждаются и в последующем:

$$h_{A,i+1}(P_a) = h_{A,i}(P_a).$$

* Читателя, интересующегося динамическими аспектами вопроса, отсылаем к работе /4/ .

Свойства А и Б представляются почти очевидными, поскольку ими, как правило, обладают и измерения, производимые над макроскопическими объектами.

Для формулировки третьего, сугубо квантового свойства, являющегося эмпирическим аналогом теоретического представления о некоммутирующих операторах наблюдаемых, удобно ввести следующее

Определение. Наблюдаемые A_1 и A_2 называются совместными, если для последовательности измерений A_1, A_2, A_1 истинностные значения высказываний, относящиеся к A_1 и полученные в последнем измерении, совпадают с истинностными значениями этих высказываний, полученных в первом измерении. Иными словами, в этом случае имеет место

$$h_{A_1,i+2}(P_a) = h_{A_1,i}(P_a).$$

Если не существует измерительных устройств, позволяющих удовлетворить этому условию, наблюдаемые называются несовместными.

В. Существование несовместных наблюдаемых

Для произвольной наблюдаемой A_i из множества всех наблюдаемых, относящихся к системе, существует в этом множестве некоторая наблюдаемая A_j, с ней не совместная.

Строго говоря, мы должны потребовать, чтобы отношение совместности наблюдаемых было отношением эквивалентности (что совсем не очевидно, если исходить непосредственно из сформулированного выше операционального определения совместности, а не из представлений о коммутирующих операторах наблюдаемых), т.е. необходимо потребовать, чтобы выполнялись следующие требования:

Г. Рефлексивность (следует из А и Б).

Всякая наблюдаемая совместна сама с собой.

Д. Симметричность.

Если A_i совместна с A_j, то A_j совместна с A_i.

Е. Транзитивность.

Если A_i совместна с A_j, A_j совместна с A_k, то A_i совместна с A_k.

С каждым классом эквивалентности взаимно совместных наблюдаемых можно связать теперь понятие полного измерения (и соответственно – полного набора наблюдаемых), присваивающего непротиворечивым образом (см. раздел 2) истинностные значения t или f всем высказываниям, относящимся к этим наблюдаемым.

Пользуясь понятием последовательных измерений, нетрудно построить и эмпирический аналог волновой функции (чистого состояния) системы. Действительно, исходя из того, что волновая функция содержит информацию о значениях всех наблюдаемых из некоторого полного набора, процедуру приготовления чистого состояния можно описать как некоторую максимальную последовательность присвоений истинностных значений t элементарным высказываниям $P_{a_i}, P_{b_j}, P_{c_k}, \ldots$, относящимся к наблюдаемым А, В, С, ...

$$h_{A,1}(P_{a_i}) = t, \; h_{B,2}(P_{b_j}) = t, \; h_{C,3}(P_{c_k}) = t, \ldots .$$

При этом, согласно условию непротиворечивости, истинностные значения всех остальных элементарных высказываний, относящихся к рассматриваемому полному набору наблюдаемых, принимают значение f. По существу эта же, только основанная на более сложной 3-значной логике, процедура приготовления чистого состояния описана в /5/.

Благодаря приготовляющему свойству процедуры измерения (см. свойства А и Б), в качестве следствия можно сформулировать следующее свойство марковости для последовательности полных измерений: результат всякого измерения определяется лишь набором наблюдаемых, отвечающих этому измерению, и исходом полного измерения, непосредственно предшествовавшего рассматриваемому.

Некоторые авторы (см., напр., учебник Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица /9/) настаивают на необходимости отказаться для квантовых систем и от, казалось бы, столь очевидных свойств, как А и Б. В частности, в /9/ утверждается, что никакая наблюдаемая, за исключением пространственной координаты, не является воспроизводимой при повторном измерении (таким образом, свойство Г отрицается). В этой связи необходимо подчеркнуть, что хотя допущения типа А или Б и подразумевают определенную идеализацию*, в обычном операторном формализме квантовой механики /2/, не существует никаких аргументов в пользу точки зрения, высказанной в /9/. Не убеждает в этом и описанная там конкретная процедура измерения импульса, так как в принципе можно представить себе макроскопический фильтр, пропускающий частицы в некотором заданном интервале импульсов и поглощающий остальные (аналог экрана с отверстием, измеряющего координату) – трудность изготовления такого фильтра не является принципиальным аргументом. С нашей точки зрения, категорическое отрицание свойств А и Б только усложняет понимание того нового, что действительно установлено при рассмотрении перехода от классических систем к квантовым. Дискуссия в учебнике Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица относится на самом деле лишь к интерпретации соотношения неопределенности энергия-время, смысл которого до настоящего времени, видимо, не вполне ясен (в связи с тем, что в квантовой механике нет оператора времени). Однако безотноситель-

* Например, измеряя импульс по искривлению и последующему восстановлению траектории частицы, мы можем его слегка изменить. Следуя /10/, наблюдаемые, для которых принимаются допущения типа А или Б (в традиционном формализме этим наблюдаемым отвечают эрмитовские операторы), иногда называют концептуальными.

но к решению этой проблемы все рассуждения настоящего раздела заведомо справедливы, если считать, что интервал времени между двумя последовательными измерениями не равен нулю, однако изменение измеряемых наблюдаемых (в гейзенберговском представлении) в течение этого времени незначительно.

6. Потенциальные возможности и нечеткие истинностные значения

Именно свойство В и обуславливает то неустранимое воздействие измерительного устройства на квантовую систему, с которым Н.Бор связывал принцип дополнительности /II/. С нашей точки зрения, однако, традиционную "копенгагенскую" интерпретацию можно заменить более последовательной, не предполагающей сосуществование двух независимых уровней описания – классического и квантового, если исходить из представлений, зафиксированных в понятии квантовой информационно-незамкнутой системы. Действительно, несмотря на то, что возмущение системы внешним измерительным устройством имеет место всегда (меняется вектор состояния системы), обнаружить его можно лишь в том случае, когда размеры интервалов δ_a, входящих в определение элементарных высказываний теории, становятся достаточно малыми для того, чтобы проявились ограничения, накладываемые соотношением неопределенности. Наоборот, если точность описания не высока – случай типичный для макроскопических систем, обычной логики, оперирующей с двумя истинностными значениями t и f, оказывается достаточно для описания. При этом возникает некоторая иллюзия того, что последовательные измерения лишь уточняют значения физических наблюдаемых, которые существовали **per se** еще до того, как было проведено измерение. В такой картине мира случайности придается лишь субъективный смысл – она связывается лишь с неинформированностью наблюдателя о существующих объективно четких (t или f) истинностных значениях элементарных высказываний теории, какой бы малой область δ_a не предполагалась. На неудовлетворительность подобной субъективной трактовки случайности для понимания природы необратимых явлений уже неоднократно указывалось во многих работах (см. ,напр., /I2/). Необходимость введения случайных истинностных значений логики u и $\bar{u}$, с нашей точки зрения, обусловлена самой природой процессов передачи информации о квантовой системе в макрообстановку* .

* Цена, которую приходится платить за преодоление упоминавшейся "мозаичности" ортодоксальной интерпретации, допускающей сосуществование двух различных типов систем, заключается в том, что теперь предполагается, что даже макросистемы сами по себе, вне связи с конкретной процедурой измерения, не обладают никакими определенными значениями наблюдаемых.

Более содержательной является, однако, логика, оперирующая не со случайными, а с нечеткими истинностными значениями, которая позволяет связать с каждым высказыванием также и меру его истинности. На первый взгляд неожиданное, но из последующего изложения понятное, свойство этой логики заключается в том, что таблицы для основных логических операций имеют в этом случае в точности тот же вид, что и таблицы раздела 4, хотя область истинностных значений расширяется при этом с двухэлементного множества $\{0,I\}$ на весь интервал $[0,I]$. Чтобы подчеркнуть это различие, произведем замену обозначений истинностных значений логики

$$f \to 0 , \quad u \to w , \quad \bar{u} \to \bar{w} , \quad t \to 1$$

и будем их трактовать как меру потенциальных возможностей системы принимать то или иное значение наблюдаемой, или как вероятность реализации высказываний P_A и $\sim P_A$. По-другому – w и $\bar{w}$ описывают, в какой мере утверждения P_A и $\sim P_A$ присущи системе еще до того, как информация о наблюдаемой A поступила в макрообстеновку. Соотношение $w = 1-\bar{w}$ (см.ссылку ** на стр.4) трактуется теперь как сохранение вероятности обнаружить наблюдаемую где-нибудь в области V_A.

Литература

I. Панченко А.И. Философия, физика, микромир. М.: Наука , I988.
2. фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: Наука , I964.
3. Сб."Нечеткие логики и теория возможности", М.: Радио и связь ,I986.
4. Костенко Б.Ф. Информационно-незамкнутые системы и редукция волнового пакета. Сообщение ОИЯИ, Р5-88-649, Дубна, I988.
5. Garden R.W. Modern Zogic and Quantum Mechanics . Bristol , A.Hilger , 1984 .
6. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.: Изд-во АН СССР, I950.
7. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука ,I984.
8. Universality in Chaos,ed.R.F.Streater.Bristol,A.Hilger,1986 .
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, М.: Наука ,I974.
I0. Сигал И. Математические проблемы релятивистской физики. М.: Мир , I968.
II. Бор Н. Проблема причинности в атомной физике. УФН, том I47, вып.3, стр.343, I985.
I2. Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука , I985.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня I989 года.