89-323

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-323

П.Е.Жидков

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ И УСТОЙЧИВОСТИ КИНК-РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Направлено в "Сибирский математический журнал"

1989

I . Исследованию устойчивости нелинейных волн (солитонов) посвящено большое число работ /I-I4/. Это связано как с важными физическими применениями /I-4/, так и с интересным математическим объектом исследования. В пионерской работе Бенжамина /5/ введено понятие "устойчивости формы" уединенной волны и доказана устойчивость формы солитона уравнения Кортевега- де Вриса. Остановимся на этом понятии.

Рассмотрим обобщенное уравнение Кортевега – де Вриса

$$u_t + u^{\nu} u_x + u_{xxx} = 0, \tag{I}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

где $\nu > 0$. Уравнению (I) удовлетворяет функция

$$\bar{u}(x,t) = \left\{ A \operatorname{sech}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{A\nu}{\sqrt{(\nu+1)(\nu+2)}} (x - v t - x_0)\right]\right\}^{2/\nu},$$

где $A>0$, x_0 – произвольные постоянные, $v = 2A/[(\nu+1)(\nu+2)]$. Нетрудно убедиться, что решения $\bar{u}$ неустойчивы по норме "обычных" функциональных пространств, таких как $W_2^1(R)$ или $C(R)$, поскольку, зафиксировав произвольное решение $\bar{u}_0$ этого семейства, можно найти сколь угодно близкое к нему при $t = 0$ решение $\bar{u}$ этого семейства, такое, что скорости для $\bar{u}$ и $\bar{u}_0$ различны. Положим для произвольных

$$g, f \in W_2^1(R) \qquad \rho(g,f) = \inf_{\tau \in R} \| g(\cdot) - f(\cdot - \tau) \|_{2,1},$$

где $\| \; \|_{2,1}$ – норма указанного пространства. Имеет место

<u>Теорема I</u> /6/

Пусть $\nu \in (0,4)$, $\nu = \frac{n}{2m-1}$, где m, n – натуральные. Тогда при произвольных значениях параметров x_0, $A>0$ решение $\bar{u}$ устойчиво в смысле метрики ρ, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что если $\rho(u,\bar{u})|_{t=0} < \delta$, то для всех $t>0$ $\rho(u,\bar{u}) < \varepsilon$. Такую устойчивость Бенжамин назвал устойчивостью формы. Для уединенных волн нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) ситуация несколько иная. В работах /7,8,I2,I3/ доказана устойчивость солитонов некоторых разновидностей НУШ относительно расстояния $\rho(g,f) = \inf_{\tau \in R, \varphi \in [0,2\pi]} \| g(\cdot) - e^{i\varphi} f(\cdot - \tau) \|_{2,1}$. Грубо говоря, такая устойчивость имеет место для солитонов НУШ (т.е. решений специального вида, принадлежащих $W_2^1(R)$ при каждом фиксированном t) при некоторых дополнительных условиях.

Совершенно иная ситуация имеет место, если рассматриваются решения НУШ, модуль которых имеет ненулевые пределы при $|x|\to\infty$. В работе /I4/ изучены простейшие такие решения вида $a_0 \exp(i\omega t)$, где $a_0>0$, ω – константы, $\omega = f(a_0^2)$. Доказана

Теорема 2 /I4/

Рассмотрим уравнение

$$iu_t + u_{xx} + f(|u|^2)u = 0$$

и его решение $\bar{u} = a_0 \exp(if(a_0^2)t)$, $a_0>0$. Пусть $f\in C^2_{loc}(R)$, $f'(a_0^2)<0$. Тогда решение $\bar{u}$ устойчиво в следующем смысле: для любых $\varepsilon>0$, $d>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $\| |u| - a_0\|_{t=0} < \delta$, $\|u(\cdot,0)-\bar{u}(\cdot,0)\|_1 < \delta$, то для каждого $t>0$ и $x_0\in R$ существует $\varphi_0 = \varphi_0(x_0,t)$ такое, что

$$\|u(\cdot,t)e^{i\varphi_0} - \bar{u}(\cdot,t)\|_{W_2^1(x_0-d,\, x_0+d)} < \varepsilon,$$

где $\|\ \|$ – норма $L_2(R)$, $\|g\|_1 = \|g\|_C + \|\frac{dg}{dx}\|$, т.е. решение u устойчиво с точностью до поворота. Отметим, что для произвольных начальных данных $u(x,0)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, невозможно указать φ_0, общее для всех $x_0\in R$.

В настоящей статье изучается устойчивость кинков НУШ, т.е. решений вида $\Phi(x,t) = A(x)\exp(i\omega t)$, где $A(x)$ – монотонная ограниченная функция. Доказана устойчивость с точностью до сдвига и поворота, т.е. объединены идеи работ /5/ и /I4/.

Сначала доказаны некоторые подготовительные результаты (теорема существования решения, его свойства). Затем кратко (со ссылкой на работу /I0/) доказывается устойчивость. В частности, исправляются некоторые неточности работы /I0/.

2 . Рассмотрим НУШ

$$iu_t + u_{xx} + f(|u|^2)u = 0, \quad x\in R,\ t>0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{4}$$

В дальнейшем всегда будем предполагать, что $f\in C^2_{loc}(R)$, в ряде случаев ее гладкость выше.

Рассмотрим решение уравнения (3) вида $\Phi(x,t) = A(x)\exp(i\bar{\omega}t)$, где $\bar{\omega}\in R$, $A(x)$ – вещественная функция, удовлетворяющая уравнению

$$A'' - \bar{\omega}A + f(A^2)A = 0, \quad x\in R. \tag{5}$$

Определение

Решение $\Phi(x,t)$ называется кинком, если функция $A(x)$ удовлетворяет уравнению (5) и монотонна, ограничена. Для кинка положим $A(-\infty)=A_1$, $A(+\infty)=A_2$.

Положим $q=1+\sup_x|-\bar\omega+f(A^2(x))+2A^2(x)f'(A^2(x))|$.

Введем следующие обозначения. Положим $\|g\|_C=\sup_{x\in R}|g(x)|$,

$$\|g\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx\right\}^{1/2},\quad \|g\|_{2,1}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(q|g(x)|^2+|g'(x)|^2)\,dx\right\}^{1/2},$$

$$\|g\|_k=\|g\|_C+\sum_{\ell=1}^{k}\left\|\frac{d^\ell g}{dx^\ell}\right\|.$$

Обозначим через $W_2^1(R)$ обычное пространство Соболева, через X^k – пространство абсолютно непрерывных вместе со своими производными до $(k-1)$ порядка функций, для которых конечна $\|\ \|_k$.

Сделаем следующие предположения:

(а) $A_1, A_2 \geq 0$;

(б) $-\bar\omega+f(A_i^2)+2A_i^2f'(A_i^2)<0,\quad i=1,2$;

(в) $-\bar\omega A_i+f(A_i^2)A_i=0,\quad i=1,2$;

(г) $-\frac{\bar\omega}{2}A_1^2+V(A_1^2)=-\frac{\bar\omega}{2}A_2^2+V(A_2^2)$, где $V(s)=\frac{1}{2}\int_0^s f(p)\,dp$;

(д) $-\frac{\bar\omega}{2}s^2+V(s^2)=-\frac{\bar\omega}{2}A_1^2+V(A_1^2)$ для всех $s\in(A_1,A_2)$.

Поясним их. Во-первых, результат об устойчивости решения Φ справедлив лишь при предположении (а). Из условия (б) следует, что существует такое $\gamma>0$, что

$$\lim_{x\to-\infty}[A(x)-A_1]e^{-\gamma x}=\lim_{x\to+\infty}[A(x)-A_2]e^{\gamma x}=\lim_{x\to-\infty}A'(x)e^{-\gamma x}=\lim_{x\to+\infty}A'e^{\gamma x}=0$$

(см. /I5/). Зачем нужны условия (в)-(д), поясняет

Лемма I /I0/

Для того, чтобы уравнение (5) имело решение $A(x)$, монотонное и такое, что $A(-\infty)=A_1$, $A(+\infty)=A_2$, необходимо и достаточно выполнение условий (в)-(д).

Доказательство вытекает из тождества

$$\left\{\frac{1}{2}A'^2(x)-\frac{\bar\omega}{2}A^2+V(A^2)\right\}'=0,$$

справедливо для любого решения уравнения (5).

Обратимся теперь к задаче Коши (3)-(4).

Теорема 3 /I6/

Пусть k – натуральное, $f\in C^{k+1}_{loc}(R)$. Тогда для любого $u_0\in X^k$ существует $T=T(\|u_0\|_k)>0$ такое, что на $[0,T)$ существует единственное решение задачи (3)-(4) класса $C([0,T);X^k)$. При $k\geqslant 3$ оно является классическим и при этом $u_t\in C([0,T);X^{k-2})$, а при $k\leqslant 2$ – обобщенным, понимаемым как решение интегрального уравнения

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,t)u_0(y)dy+i\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,t-s)f(|u(y,s)|^2)u(y,s)\,dyds,$$

где $K(x,t)$ – фундаментальное решение оператора $L=i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Для каждого $u_0\in X^k$ существует $T_{max}>0$ (не зависящее от k – /I4/) такое, что решение может быть продолжено на $[0,T_{max})$ и при этом либо $T_{max}=+\infty$, либо $\lim\limits_{t\to T_{max}-0}\|u(\cdot,t)\|_k=+\infty$.

Теорема 4/I6/

Решение, существование и единственность которого устанавливает теорема 3, непрерывно зависит от начального условия, т.е. если $\bar{u}(x,t)$ – решение задачи (3)-(4), $\bar{u}(x,0)=\bar{u}_0(x)$, то для любых $\varepsilon>0$, $T\in(0,T_{max})$ существует $\delta>0$ такое, что если $\|u_0-\bar{u}_0\|_k<\delta$, то для всех $t\in[0,T]$ $\|u(\cdot,t)-\bar{u}(\cdot,t)\|_k<\varepsilon$.

Лемма 2

Пусть выполнены условия (а)-(д), пусть $u_0\in X^1$ и $I(u_0)<\infty$, где $I(u)=\int_{-\infty}^{\infty}(|u(x,t)|-A(x))^2dx$. Пусть, кроме того, $A_1,A_2>0$. Обозначим через t_0 точную верхнюю грань значений $t\in[0,T_{max})$, при которых $|u(x,t)|\geqslant const>0$. Тогда для любого $t\in[0,t_0)$ $I(u(t))<\infty$, $I(u(t))$ непрерывна на $[0,t_0)$.

Доказательство

Пусть сначала $u_0\in X^3$. По теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру

$$\frac{dI(u)}{dt}=\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{2A_x\frac{(u\bar{u}_x-u_x\bar{u})}{|u|}+A\frac{(u_x^2\bar{u}^2-u^2\bar{u}_x^2)}{|u|^3}\right\}dx,$$

откуда

$$I(u(t))\leqslant\|A_x\|\,\|u_x\|+\frac{1}{2}\max\{A_1;A_2\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u_x|^2}{|u|}dx.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы для $u_0 \in X^3$. Для $u_0 \in X^1$ оно может быть получено предельным переходом по последовательности $\{u_0^n\} \in X^3$, сходящейся в X^1 к u_0.

Лемма доказана.

Рассмотрим случай, когда $A_1 A_2 = 0$. Пусть для определенности $A_2 = 0$.

<u>Лемма 3</u>

Пусть $u_0 \in X^2$, $I(u_0) < \infty$. Пусть t_0 – точная верхняя грань множества значений t_1 из $[0, T_{max})$, таких, что $\max\limits_{t \in [0,t_1]} \| |u(\cdot,t)| - A(\cdot) \|_C < A_1/2$. Тогда для любого $t \in [0, t_0)$ $I(u(t)) < \infty$, $I(u(t))$ непрерывная функция t.

<u>Доказательство</u>

Возьмем x_0 так, что $A(x) > \frac{3}{4} A_1$ при $x \le x_0$. Положим

$$I_1(u) = \int_{-\infty}^{x_0} (|u(x,t)| - A(x))^2 \, dx , \quad I_2(u) = \int_{x_0}^{+\infty} |u(x,t)|^2 \, dx .$$

Предположим сначала, что $u_0 \in X^3$. Тогда

$$\frac{dI_1(u)}{dt} = -i(u_x\bar{u} - u\bar{u}_x)\left(1 - \frac{A(x)}{|u|}\right)\Big|_{x=x_0} + i\int_{-\infty}^{x_0} \left\{ \frac{A_x}{|u|}(u\bar{u}_x - u_x\bar{u}) + \frac{1}{2}\frac{A}{|u|^3}(u_x^2\bar{u}^2 - u^2\bar{u}_x^2) \right\} dx,$$

откуда следует, что $I_1(u(t))$ определен и непрерывен. Рассмотрим $\frac{dI_2(u)}{dt} = i(u_x\bar{u} - u\bar{u}_x)\big|_{x=x_0}$, т.е. $I_2(u(t))$ также определен и непрерывен. Ясно, что $I_2(|u(\cdot,t)| - A(x))$ непрерывная функция. Следовательно, для $u_0 \in X^3$ утверждение леммы доказано. Для $u_0 \in X^2$ оно получается предельным переходом по последовательности решений из $C([0,T); X^3)$.

Лемма 3 доказана.

Пусть выполнены предположения леммы 2 или леммы 3. Рассмотрим $R(\tau) = \| |u(\cdot - \tau, t)| - A(\cdot) \|_{2,1}$.

<u>Лемма 4</u> /10/

Функция $R(\tau)$ достигает своего минимума при некотором $\tau_0 = \tau_0(t)$.

Положим $v(x,t) = u(x - \tau_0, t)$. Введем следующие обозначения:

$$\Phi(x,t) = A(x) e^{i\varphi(x,t)}, \quad v(x,t) = (A(x) + a(x,t)) \exp\{i[\varphi(x,t) + \omega(x,t)]\},$$

где $\varphi = \bar{\omega} t$, $a = |v| - A$, функцию ω определим следующим образом. Для каждого t рассмотрим множество $V = V(t) = \{x \mid v(x,t) \ne 0\}$. Очевидно, V – открытое множество, поэтому оно может быть представлено как объединение не более чем счетного числа не пересекающихся интервалов. На каждом из них определим ω таким образом, чтобы функция $[\varphi(x,t)+\omega(x,t)]$ была равна произвольной непрерывной ветви многозначной функции $\operatorname{Arg} v(x,t)$, положим $\omega(x,t)=0$ при $x\bar{\in} U$. Положим

$$\omega_1(x,t)=\begin{cases}\omega'_x(x,t) & \text{, если } x\in U,\\ 0 & \text{, если } x\bar{\in} U.\end{cases}$$

Основной результат работы составляет

Теорема 5

Пусть $f\in C^2_{loc}(R)$ и пусть выполнены предположения (а)-(д). Тогда решение Φ устойчиво в следующем смысле: для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $\|a(\cdot,0)\|_{2,1}<\delta$, $\|\omega_1(A+a)\||_{t=0}<\delta$, то для всех $t>0$ имеют место неравенства $\|a\|_{2,1}<\varepsilon$, $\|\omega_1(A+a)\|<\varepsilon$.

Сформулируем теорему 5 в ослабленной форме, из которой легче понять ее смысл. Для простоты предположим, что $A_1,A_2>0$.

Теорема 5^I

Пусть выполнены условия теоремы 5: $A_1,A_2>0$. Тогда для любых $\varepsilon>0$, $d>0$ найдется $\delta>0$ такое, что если $\|a\|_{2,1}|_{t=0}<\delta$, $\|\omega_1(A+a)\||_{t=0}<\delta$, то для любых $t>0$ $x_0\in R$ существует $\varphi_0\in[0,2\pi]$ такое, что

$$\|v(\cdot,t)e^{i\varphi_0}-\phi(\cdot,t)\|_{W_2^1(x_0-d,\,x_0+d)}<\varepsilon.$$

3 . В этом пункте докажем теорему 5. Рассмотрим функционал

$$M(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}|u_x|^2-V(|u|^2)+\frac{\bar\omega}{2}|u|^2+C\right\}dx,$$

где $C=-\frac{\bar\omega}{2}A_1^2+V(A_1^2)$.

Лемма 5

Пусть $u(x,t)$ -решение задачи (3)-(4) класса $C([0,T_{max});X^2)$. Тогда, если $I(u)<\infty$, то $M(u)$ существует.

Доказательство

Очевидно $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2dx<\infty$, поэтому достаточно доказать, что $\int_{-\infty}^{\infty}\{V(A_1^2)-V(|u|^2)+\frac{\bar\omega}{2}|u|^2-\frac{\bar\omega}{2}A_1^2\}dx$ существует. Но подынтегральное выражение равно с учетом предположений (в) и (г)

$$\frac{1}{4}f'(A_i^2+\theta(x)(|u|^2-A_i^2))(|u|-A_i^2)^2,\qquad \theta(x)\in(0,1),\quad i=1,2.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6

Пусть $u(x,t)\in C([0,T);X^2)$, $M(u_0)$ существует. Тогда для всех $t\in[0,T)$ $M(u)$ определен и не зависит от t.

Доказательство.

Пусть сначала $u(x,t)\in C([0,T);X^4)$. Тогда по классической теореме о дифференцировании интеграла по параметру после некоторых подсчетов получаем $\frac{dM(u)}{dt}=0$. Для $u\in C([0,T);X^2)$ получим утверждение леммы по последовательности решений из $C([0,T);X^4)$, сходящейся к $u(x,t)$.

Лемма 6 доказана.

Очевидно, что $M(u)=M(v)$. Поэтому

$$\Delta M = M(u)-M(\Phi)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{\omega_1^2(A+a)^2+[a_x^2-(-\bar\omega+f(A^2)+2A^2f'(A^2))a^2]+$$

$$+a^2[f(A^2)+2A^2f'(A^2)-f((A+\theta a)^2)-2(A+\theta a)^2f'((A+\theta a)^2)]\}dx,$$

где $\theta=\theta(x,t)\in(0,1)$.

Отсюда сразу получаем следующее утверждение.

Лемма 7

Для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для произвольной функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условиям $\|a\|_{2,1}|_{t=0}<\delta$, $\|\omega_1(A+a)\||_{t=0}<\delta$ выполняется неравенство $|M(u)-M(\Phi)|<\varepsilon$.

Положим $\Delta M=M_1+M_2+M_3$, где

$$M_1=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{a_x^2-(-\bar\omega+f(A^2)+2A^2f'(A^2))a^2\}dx, \quad M_2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_1^2(A+a)^2dx,$$

$$M_3=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}a^2[f(A^2)+2A^2f'(A^2)-f((A+\theta a)^2)-2(A+\theta a)^2f'((A+\theta a)^2)]dx.$$

Рассмотрим M_1.

Лемма 8.

Существует не зависящая от $g\in W_2^1(R)$ постоянная $C_1>0$ такая, что $M_1(g)\geq C_1\|g\|^2$ для всех функций g, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)A'(x)dx=0. \qquad (6)$$

Доказательство

Рассмотрим оператор $L\varphi=-\varphi''-q(x)\varphi$, $-\infty<x<\infty$, где $q(x)=-\bar\omega+f(A^2)+2A^2f'(A^2)$. Положим $q_i=-\bar\omega+f(A_i^2)+2A_i^2f'(A_i^2)$, $i=1,2$.

В силу условия (6) $q_i < 0$, $i = 1,2$. Известно /17/, что непрерывный спектр оператора L, рассматриваемого на $L_2(R)$, совпадает с полупрямой $[b, +\infty)$, где $b = \min\{-q_1; -q_2\}$. Далее, дифференцируя (5) по x, убеждаемся, что поскольку $A'(x) \in L_2(R)$, $\varphi_0 = A'(x)$ является собственной функцией оператора L, отвечающей собственному значению $\lambda_0 = 0$, причем поскольку $A'(x)$ сохраняет знак, λ_0 наименьшее и простое собственное значение. Из спектрального разложения самосопряженного в $L_2(R)$ расширения оператора L [17] вытекает для всех g, удовлетворяющих (6):

$$M_1(g) \geq C_1 \|g\|^2, \tag{7}$$

где C_1 равно b, если у оператора L нет положительных собственных значений, либо наименьшему из этих значений.

Лемма 8 доказана.

Величина $\tau_0(t)$ была определена как точка минимума функции $R(\tau)$. Следовательно,

$$0 = (R^2(\tau))'\big|_{\tau=\tau_0} = 2\int_{-\infty}^{\infty} a(x,t) A'(x)\left[q - \bar{\omega} + f(A^2) + 2A^2 f'(A^2)\right] dx.$$

Положим

$$K = \frac{\|A'\| \cdot \|A'(q - \bar{\omega} + f(A^2) + 2A^2 f'(A^2))\|}{\int_{-\infty}^{\infty} A'^2 (q - \bar{\omega} + f(A^2) + 2A^2 f'(A^2))\|}.$$

<u>Лемма 9.</u>

В классе функций $g \in W_2^1(R)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) A'(x)\left[q - \bar{\omega} + f(A^2) + 2A^2 f'(A^2)\right] dx = 0, \tag{8}$$

справедлива оценка $M_1(g) \geq C_2 \|g\|^2$, где $C_2 = C_1/(1+K)^2$.

<u>Доказательство</u>

Представим g в виде $g = \alpha A' + \varphi$, где $\int_{-\infty}^{\infty} A'\varphi\, dx = 0$. Тогда $M_1(g) = M_1(\varphi) \geq C_1 \|\varphi\|^2$. Из условия (8) получаем

$$\alpha\int_{-\infty}^{\infty} A'^2\left[q - \bar{\omega} + f(A^2) + 2A^2 f'(A^2)\right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi A'\left[q - \bar{\omega} + f(A^2) + 2A^2 f'(A^2)\right] dx = 0.$$

Отсюда получаем

$$|\alpha|\,\|A'\| = \|A'\| \cdot \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi A'\left[q - \bar{\omega} + f(A^2) + 2A^2 f'(A^2)\right] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} A'^2\left[q - \bar{\omega} + f(A^2) + 2A^2 f'(A^2)\right] dx} \right| \leq$$

$$\leq \|A'\|\,\|\varphi\|\,\frac{\|A'[q-\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)]\|}{\left|\int_{-\infty}^{\infty}A'^2[q-\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)]dx\right|}=K\|\varphi\|.$$

Далее, имеем $\|g\|\leq|\alpha|\,\|A'\|+\|\varphi\|\leq(1+K)\|\varphi\|$.
Следовательно, $M(g)\geqslant C_1\|\varphi\|^2\geqslant C_2\|g\|^2$,
и лемма 9 доказана.

Лемма I0

В классе функций $g\in W_2^1(R)$, удовлетворяющих условию (8), справедлива оценка $M_1(g)\geqslant C_3\|g\|^2_{2,1}$, где $C_3=Const>0$. Доказательство см. в /I0/.

Далее, имеет место очевидная

Лемма II

Существует определенная на полупрямой $S\geqslant 0$ неубывающая функция $L(s)$ такая, что $\lim\limits_{s\to+0}L(s)=0$, и справедливо неравенство $|M_3(g)|\leq\|g\|^2_{2,1}\,L(\|g\|_{2,1})$.

Лемма I2

Существует зависящая лишь от Φ постоянная $B>0$ такая, что если $\|\,|u(\cdot,t)|-A(x)\|_{2,1}<B$, то $\|a\|_{2,1}$ – непрерывная функция t.

Доказательство

Воспользуемся леммами 2,3 и непрерывностью отображения $u'_x(\cdot,t)$ $[0,T_{max})\to L_2(R)$. Для произвольных t_1, t_2 имеем

$$\|a(\cdot,t_1)\|_{2,1}-\|a(\cdot,t_2)\|_{2,1}=\|A(x+\tau_0(t_1),t_1)-|u(\cdot,t_1)|\|_{2,1}-\|A(x+\tau_0(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_2)|\|_{2,1}\leq$$

$$\leq\|A(x+\tau_0(t_2),t_1)-|u(\cdot,t_1)|\|_{2,1}-\|A(x+\tau_0(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_2)|\|_{2,1}\leq$$

$$\leq\|\,|u(\cdot,t_1)|-|u(\cdot,t_2)|\,\|_{2,1}.$$

Отсюда следует, что достаточно доказать

$$\lim_{t_2\to t_1}\|\,|u(\cdot,t_1)|-|u(\cdot,t_2)|\,\|_{2,1}=0.$$

Ясно, что $\lim\limits_{t_2\to t_1}\|\,|u(\cdot,t_1)|-|u(\cdot,t_2)|\,\|_{L_2(a,b)}=0$ для любых $-\infty<a<b<+\infty$, поскольку $u(x,t_2)\to u(x,t_1)$ равномерно при $t_2\to t_1$. Поэтому доста-

точно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существуют $C>0$, $\delta>0$, такие, что $\| |u(\cdot,t)| - A(x)\|_{L_2(-\infty,-C)} + \| |u(\cdot,t)| - A(x)\|_{L_2(C,+\infty)} \leq \varepsilon$ для всех $t \in (t_1-\delta, t_1+\delta)$. Это можно доказать методами лемм 2 и 3, оценивая производные указанных норм по t.
Лемма I2 доказана.

Теперь все готово для доказательства теоремы 5.
Имеем

$$\Delta M \geqslant C_3 \|a\|_{2,1}^2 + \|a\|_{2,1}^2 L(\|a\|_{2,1}). \tag{9}$$

Положим $H(s) = C_3 s^2 + s^2 L(s)$. По лемме II найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $H(s) \geqslant C_3$ для всех $s \in (0, \delta_1)$. Зафиксируем $\varepsilon < \delta_1$ и воспользуемся леммой 7. По этой лемме найдется δ_2 : $0 < \delta_2 \leq \varepsilon$, такое, что

$$\Delta M \leq C_3 \varepsilon^2/4 \quad \text{при} \quad \|a\|_{2,1}\big|_{t=0} < \delta_2, \quad \|\omega_1(A+a)\|\big|_{t=0} < \delta_2.$$

Тогда в силу леммы I2 и неравенства (9)

$$\|a\|_{2,1} < \varepsilon$$

для всех $t \geqslant 0$.

Заметим теперь, что

$$0 \leq \|\omega_1(A+a)\|^2 = \Delta M - M_1 - M_3 \to 0$$

при $\|a(\cdot,0)\|_{2,1} \to 0$, $\|\omega_1(A+a)\|\big|_{t=0} \to 0$ равномерно по $t \geqslant 0$ в силу доказанного.
Теорема 5 доказана.

4 . Рассмотрим одно приложение. В работах /3,4/ изучалось уравнение

$$iu_t + u_{xx} + \lambda u + u(|u|^2 - |u|^4) = 0. \tag{I0}$$

Оно встречается в разных областях физики, например, описывает бозе-газ с дельтообразным потенциалом взаимодействия. В силу леммы I уравнение (I0) имеет кинк-решение при $\bar{\omega} = -\alpha - 3/16$, причем огибающая $A(x) > 0$. В силу теоремы 5 оно устойчиво.

Наконец, поясним, зачем нужно предположение (а). Оно необходимо по техническим причинам, так как произвольную комплекснозначную функцию $v(x)$ можно представить в виде $v(x) = (A+a)e^{i(\varphi+\omega)}$ только в этом случае. При $A_1 A_2 < 0$ вопрос об устойчивости кинк-решений открыт.

Литература

1. Zakharov V.E., Kuznetsov F.A., Rubenchik A.M. Soliton stability.
Ин-т автоматики и электрометрии СО АН СССР. Препринт № 199, 1983, 62 стр.
2. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент. – ЭЧАЯ, 1083, т. 14, вып. 1, стр. 123-180.
3. Barashenkov I.V., Makhankov C.G. Soliton – like -exitations in a one-dimensional nuclear matter. JINR, 1984, E2-84 173, Dubna.
4. Barachenkov I.V., Gocheva A.D. , Makhankov V.G., Puzynin I.V. Stability of soliton-like " bubbles " – Physica, 1989, vol. D34, No 1- , p. 240-254.
5. Benjamin T.B. The stability of solitary waves. – Proc. Royal Soc. London, 1972, vol. A328, p. 153-182 .
6. Жидков П.Е. Устойчивость решений вида уединенной волны для обобщенного уравнения Кортевега – де Вриса. ОИЯИ, Р5-86-800, Дубна, 1986.
7. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики. – ЭЧАЯ, 1985, т. 16, вып. 3. стр. 597-648.
8. Жидков П.Е. Об устойчивости солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера.-Диффер. уравн. 1986, т. XXII, № 6, стр. 994-1004.
9. Илиев И.Д., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида кинков для некоторых нелинейных уравнений, подобных уравнению Кортевега – де Вриса. ОИЯИ, Р5-86-47, Дубна, 1986.
10. Жидков П.Е. Об устойчивости решений вида кинков для нелинейного уравнения Шредингера. ОИЯИ Р5-87-77, Дубна, 1987.
11. Henri D.B., Perez J.F., Wreszinski W.F. Stability theory for solitary wave solitions of scalar field equation. – Commun. Math. Phys., 1982, vol. 85, No 3, p. 351-361.
12. Cazenave T., Lions P.L. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Scrödinger equations. – Commun. Math. Phys., 1982, vol. 85, No 4, p. 549-561.
13. Weinstein M.I. Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations. – Commun in Pure and Appl. Math. ,1986, vol. 39, No 1, p. 51-67.
14. Жидков П.Е. О разрешимости задачи Коши и устойчивости некоторых решений нелинейного уравнения Шредингера. ОИЯИ, Р5-89-322, Дубна, 1989.

I5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, I954.
I6. Жидков П.Е. Задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера. ОИЯИ, Р5-87-373, Дубна, I987.
I7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы т. 2, Спектральная теория. М.: Мир. I966.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 мая I989 года.