89-322

9

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Ж 696

Р5-89-322

П.Е.Жидков

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Направлено в журнал "Математическое моделирование"

1989

I. Исследованию нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) посвящено большое число работ. Это связано, с одной стороны, с тем, что оно описывает ряд физических явлений: гравитационные волны на глубокой воде, волны в плазме, распространение лазерного луча, поведение неидеального бозе-газа и др. Кроме того, к нему сводится уравнение Хартри – Фока для самосогласованного поля со специально выбранным потенциалом (см. /I–4/). С другой стороны, для математиков этот интерес связан с тем, что НУШ обладает рядом новых свойств, например, в некоторых частных случаях к нему применим метод обратной задачи теории рассеяния (ОЗТР) /5,6/.

При развитии метода ОЗТР остались неисследованными многие важные вопросы, такие как вопрос о том, при каких начальных данных решение задачи Коши существует и каким функциональным пространствам принадлежит, вопрос о единственности решения. Кроме того, к настоящему времени появились разновидности НУШ, для которых метод ОЗТР не развит и ставится под сомнение возможность его применения.

Вопрос о разрешимости задачи Коши для НУШ изучался в работах /7,I0/, а вопрос об устойчивости некоторых частных решений (солитонов) – в работах /II–I5/; полная информация по этим вопросам до I984 года имеется в обзоре /II/.

В настоящей статье изучаются решения НУШ с нелинейностью общего вида в окрестности специального класса решений $\phi(x,t)=a_0\exp(i\omega t)$, где $\omega=\mathrm{const}$, $a_0>0$. Получены достаточные условия существования решения задачи Коши, а также устойчивости решений ϕ.

2. Рассмотрим НУШ

$$iu_t+u_{xx}+f(|u|^2)u=0\,,\quad x\in\mathbb{R},\ t>0, \tag{I}$$

$$u(x,0)=u_0(x). \tag{2}$$

Относительно функции f будем предполагать всегда, что $f\in C^1_{loc}$.

Уравнению (I) удовлетворяет функция $\phi(x,t)=a_0\exp(if(a_0^2)t)$ ($a_0>0$ – произвольный параметр).

Ниже будет доказано, что решения ϕ устойчивы в некотором смысле, если $f'(a_0^2)<0$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, положим $\|g\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$, $\|g\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx\right\}^{1/2}$, $\|g\|_{2,k}=\sum_{\ell=0}^{k}\left\|\frac{d^\ell g}{dx^\ell}\right\|$, $\|g\|_k=\|g\|_C+\sum_{\ell=1}^{k}\left\|\frac{d^\ell g}{dx^\ell}\right\|$. Обозначим через H^k и X^k замыкания множества определенных на прямой k раз непрерывно дифференцируемых ограниченных функций, для которых конечны соответственно $\|\ \|_{2,k}$ и $\|\ \|_k$, по этим нормам. Ясно, что H^k, X^k – банаховы пространства.

Теорема I /IO/

Пусть k – натуральное, $u_0 \in X^k$, $f \in C^{k+1}_{loc}(R)$. Тогда существует $T>0$, зависящее лишь от $\|u_0\|_k$, такое, что на $[0,T)$ существует единственное решение задачи (I)-(2) класса $C(0,T;X^k)$. Если $k \geqslant 3$, то оно удовлетворяет задаче (I)-(2) в классическом смысле.

Отметим, что при $k \leqslant 2$ решение является обобщенным. Оно понимается в том смысле, что удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t)u_0(y)\,dy + i\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s)f(|u(y,s)|^2)u(y,s)\,dy\,ds, \tag{3}$$

$t \in [0,T)$, где $k(x,t)$ – фундаментальное решение оператора $L = i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Лемма I

Пусть $k \geqslant 1$, $u_0 \in X^k$, $f \in C^{k+1}_{loc}$. Тогда либо решение $u(x,t)$ может быть продолжено на всю полупрямую $t \geqslant 0$, либо существует $T_{max,k} > 0$ такое, что решение класса $C(0,T;X^k)$ определено на $[0,T_{max,k})$ и $\lim\limits_{t\to T_{max,k}-0} \|u\|_k = +\infty$.
Доказательство вытекает из результатов работы /IO/.

Лемма 2

Пусть выполнены условия леммы I. Тогда $T_{max,k} = T_{max,1}$.

Доказательство

В силу теоремы I и вложения $\|g\|_1 \leqslant \|g\|_k$ достаточно доказать, что для произвольных $T>0$, $A>0$, таких, что $\|u\|_1 \leqslant A$ при $t \in [0,T]$, существует $B>0$ такое, что $\|u\|_k \leqslant B$ при $t \in [0,T]$. Пусть сначала $k = 2$. Положим $f_1(u) = f(|u|^2)u$. Тогда $\|f_1(u)\|_k \leqslant C_1(\|u\|_1)$, $\|f_1(u)\|_1 \leqslant C_2(\|u\|_1)$, где C_1, C_2 – положительные непрерывные функции. Рассмотрим

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u)\right\| = \|f_1''(u)u_x^2 + f_1'(u)u_{xx}\| \leqslant C_3(\|u\|_1) + C_4(\|u\|_1)\|u_{xx}\|.$$

Таким образом, $\|f_1(u)\|_2 \leqslant C_1'(\|u\|_2) + C_2'(\|u\|_1)\|u\|_2$, где C_1', C_2' – положительные непрерывные функции. Отсюда в силу (3) получаем

$$\|u\|_2 \leqslant C_5\|u_0\|_2 + \max_{t\in[0,T]} C_6(\|u\|_1) + \max_{t\in[0,T]} C_7(\|u\|_1)\int_0^t \|u\|_2\,dt,$$

откуда вытекает утверждение леммы для $k = 2$. Случай $k > 2$ рассматривается методом математической индукции.

Лемма 2 доказана.

В силу этой леммы можно положить $T_{max} = T_{max,k}$.

Лемма 3

Пусть выполнены условия теоремы I, $k = 1$, $\|u_0\| \geqslant C > 0$, где $C = const > 0$. Пусть $I(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (|u| - |\varphi|)^2\,dx$ и пусть

$I(u)|_{t=0} < \infty$. Обозначим через t_0 точную верхнюю грань множества положительных значений $t \in [0, T_{max})$, при которых $\|u(\cdot,t)\|_C \geq const > 0$. Тогда для всех $t \in [0, t_0)$ $I(u(t)) < \infty$, $I(u(t))$ непрерывен как функция t.

Доказательство

Пусть сначала $k = 3$. Воспользуемся классической теоремой о дифференцируемости интеграла по параметру. После вычислений получаем

$$\frac{dI(u)}{dt} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u_x^2 \bar{u}^2 - u^2 \bar{u}_x^2)}{2|u|^3} dx.$$

Отсюда

$$I(u(t)) \leq \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u_x|^2}{|u|} dx. \tag{4}$$

В силу теоремы о непрерывной зависимости решения класса $C([0,T; X^1)$ от начального условия /10/ в (4) можно сделать предельный переход по последовательности функций $u_n(t)$ из $C([0,T; X^3)$, сходящихся в $C([0,T-\varepsilon; X^1)$ к $u(t)$, $\varepsilon = const > 0$.

Лемма 3 доказана.

Замечание

Ясно, что условие $I(u) < \infty$ в предположениях леммы равносильно тому, что $\| |u| - |\phi| \| < \infty$ (для $u \in X^1$). Из непрерывности $I(u(t))$ вытекает непрерывность $\| |u(\cdot,t)| - a_0 \|$.

Рассмотрим функционал $M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \frac{1}{2}|u_x|^2 - V(|u|^2) + \frac{f(a_0^2)}{2}|u|^2 + C \} dx$, где $C = -\frac{f(a_0^2)}{2} a_0^2 + V(a_0^2)$, $V(s) = \frac{1}{2}\int_0^s f(p)\, dp$. Очевидно, $M(\phi) = 0$.

Лемма 4

Пусть выполнены угловые теоремы I, $k = 1$. Тогда для любого u_0, такого, что $I(u_0) < \infty$, функционал $M(u)$ определен и не зависит от t на всем промежутке существования решения.

Доказательство

Сначала пусть $k = 4$. Очевидно, $u_x \in L_2(R)$. Рассмотрим

$$K(u) = -V(|u|^2) + \frac{f(a_0^2)}{2}|u|^2 - \frac{f(a_0^2)}{2} a_0^2 + V(a_0^2) = \frac{1}{4} f'(\xi(x))(|u|^2 - a_0^2)^2,$$

где $\xi(x)$ лежит между $|u|^2$ и a_0^2. Отсюда следует, что $K(u)$ интегрируемая функция и, таким образом, $M(u)$ определен. По классической теории о дифференцировании несобственного интеграла по параметру

$$\frac{dM(u)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \tfrac{1}{2} u_x \bar{u}_{xt} + \tfrac{1}{2} u_{xt} \bar{u}_x - \tfrac{1}{2} [f(|u|^2) - f(a_0^2)](u_t \bar{u} + u \bar{u}_t) \} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ -u_t \bar{u}_{xx} - u_{xx} \bar{u}_t + [f(a_0^2) - f(|u|^2)](u_t \bar{u} + u \bar{u}_t) \} dx = 0$$

в силу уравнения (I) и, следовательно, $\frac{dM(u)}{dt} = 0$.

Для K = I предельным переходом по последовательности решений задачи (I)–(2) из $C(0,T;X^4)$ получим, что функционал $M(u)$ определен и не зависит от t для $u\in C(0,T;X^1)$.

Лемма 4 доказана.

3. В этом разделе будет изучена устойчивость решений Φ. Если $\|u_0-\Phi(\cdot,0)\|_1$ достаточно мала, то $u_0(x)\neq 0$ и $u(x,t)\neq 0$ для достаточно малых $t>0$. Поэтому решение u можно представить в виде $u(x,t)=(a_0+a(x,t))\exp\{i[f(a_0^2)t+\omega(x,t)]\}$, где функции a, ω вещественны, ω определена неоднозначно, ее можно выбрать для каждого t абсолютно непрерывной. Получаем: $\|u(\cdot,t)-\Phi(\cdot,t)\|^2_{2,1}=\|a(x,t)\|^2_{2,1}+\|\omega_x(a_0+a)\|^2$. Таким образом, если норма $\|u(\cdot,t)-\Phi(\cdot,t)\|_1$ достаточно мала, то условия $\|u(\cdot,t)-\Phi(\cdot,t)\|^2_{2,1}<\infty$ и $a(\cdot,t)\in L_2(R),\omega_x\in L_2(R)$ равносильны. Функционал $M(u)$ можно теперь записать в виде

$$M(u)=M(u)-M(\Phi)=\Delta M=M_1+M_2+M_3, \tag{6}$$

где

$$M_1(u)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{a_x^2-a_0^2f'(a_0^2)a^2\}dx\ ,\quad M_2(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2(a_0+a)^2dx,$$

$$M_3(u)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}a^2[f(a_0^2)+2a_0^2f'(a_0^2)-f((a_0+\theta a)^2)-2(a_0+\theta a)^2f'((a_0+\theta a)^2)]dx,$$

где $\theta(x,t)\in(0,1)$.

<u>Лемма 5</u>

Пусть $f'(a_0^2)<0$. Тогда $M_1(u)\geq C\|a\|^2_{2,1}$, где $C=const>0$.

<u>Доказательство</u> очевидно.

<u>Лемма 6</u>

Существует определенная на полупрямой $[0,\infty)$ неубывающая функция $L(s)$, $L(0)=0$, непрерывная в нуле справа, для которой справедливо неравенство

$$|M_3|\leq\|a\|^2_{2,1}L(\|a\|_{2,1}).$$

<u>Доказательство</u>

По теореме вложения Соболева $\|g\|_C\leq C_1\|g\|_{2,1}$ для любой функции $g\in H^1$, где $C_1=const>0$. Положим $L(0)=0$, для любого $s>0$

$$L(s)=\frac{1}{2}\max_{|\tau|\leq C_1 s}|f(a_0^2)+2a_0^2f'(a_0^2)-f((a_0+\tau)^2)-2(a_0+\tau)^2f'((a_0+\tau)^2)|.$$

Свойство $\lim\limits_{s\to+0} L(s)=0$ вытекает из равномерной непрерывности функций f, f' на любом конечном промежутке.

Лемма 6 доказана.

Лемма 7.

Для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для произвольной функции $u_0\in X^1$, удовлетворяющей условиям $\|a\||_{t=0}<\delta$, $\|u_0-\phi(\cdot,0)\|_1<\delta$, выполняется неравенство $\Delta M<\varepsilon$.

Доказательство вытекает из представления для ΔM (6), леммы 6 и представления

$$\|u_0-\phi(\cdot,0)\|_1=\|u_0-\phi(\cdot,0)\|_c+\left(\|a_x\|^2+\|\omega_x(a_0+a)\|^2\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Лемма 8

$\|a\|_{2,1}^2$ – непрерывная функция t.

Доказательство

В силу леммы 3 достаточно доказать непрерывность $\|a_x\|^2$. Непрерывность этой функции вытекает из непрерывности $\|u_x\|^2$ и представления (7).

Лемма доказана.

Теперь все готово для доказательства теоремы об устойчивости.

Теорема 2

Пусть $f\in C^2_{loc}$, $f'(a_0^2)<0$. Тогда решение ϕ устойчиво в следующем смысле: для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для произвольной функции $u_0\in X^1$, для которой $\|a\|_{2,1}|_{t=0}<\delta$, $\|\omega_x\||_{t=0}<\delta$, решение $u(x,t)$ задачи Коши (I)–(2) может быть продолжено на всю полупрямую $[0,\infty)$ и для произвольного $t>0$ имеют место неравенства

$$\|a\|_{2,1}<\varepsilon,\qquad \|\omega_x\|<\varepsilon.$$

Доказательство

Зафиксируем $\varepsilon>0$. В силу теоремы I и представления (7) достаточно доказать, что $\|a\|_{2,1}<\varepsilon$, $\|\omega_x\|<\varepsilon$ для всех t, для которых решение определено, если $\|a\|_{2,1}|_{t=0}<\delta$, $\|\omega_x\||_{t=0}<\delta$.

Положим $H(s)=Cs^2-s^2L(s)$ (C – константа из леммы 5). По лемме 6 найдется $\delta_1>0$ такое, что для произвольного $s\in[0,\delta_1]$ справедливо неравенство $H(s)\geqslant\frac{C}{2}s^2$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\varepsilon<\delta_1$. По лемме 7 найдется $\delta_2\leq\varepsilon$, такое, что $\Delta M\leq\frac{C}{4}\varepsilon^2$ при $\|a\|_{2,1}|_{t=0}<\delta_2$, $\|\omega_x\||_{t=0}<\delta_2$. Тогда в силу леммы 8 и неравенства $\Delta M\geqslant M_1+M_3$ имеем

$$\|a\|<\varepsilon$$

для всех t, для которых решение определено.

Заметим теперь, что

$$0 \le \|\omega_x(a_0+a)\|^2 = \Delta M - M_1 - M_3 \to 0$$

равномерно по $t \geq 0$ при $\|a\|_{2,1}|_{t=0} \to 0$, $\|\omega_x\||_{t=0} \to 0$ в силу доказанного. Поскольку $0 \le a_1 \le a_0 + a \le a_2 < +\infty$, где a_1, a_2 – постоянные, получаем, что $\|\omega_x\| < \varepsilon$ при всех $t > 0$, если $\|a\|_{2,1}|_{t=0} < \delta_2$, $\|u_0 - \phi(\cdot,0)\|_1 < \delta_2$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает более слабое утверждение, поясняющее ее смысл.

Теорема 2'

Пусть $f \in C^2_{loc}$, $f'(a_0^2) < 0$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $d > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\|u_0 - \phi(\cdot,0)\|_1 < \delta$, $\|a\|_{2,1}|_{t=0} < \delta$, то для любых $t > 0$, $x_0 \in R$ существует $\varphi_0 = \varphi_0(x_0, t)$ такое, что

$$\|u(\cdot,t)\, e^{i\varphi_0} - \phi(\cdot,t)\|_{W_2^1(x_0-d,\, x_0+d)} < \varepsilon.$$

5 . Рассмотрим приложения теоремы 2. Сначала изучим кубическое уравнение Шредингера с отталкиванием (термины физические):

$$iu_t + u_{xx} - |u|^2 u = 0.$$

В монографии [5] отмечается, что уравнение (8) носит универсальный характер и может встречаться в различных областях физики. Решения имеют вид:

$$\phi(x,t) = a_0 \exp(-i a_0^2 t).$$

Поскольку $f(s) = -s$, то $f'(a_0^2) = -1$, т.е. решения ϕ устойчивы при всех значениях параметра $a_0 > 0$.

Рассмотрим следующее уравнение (так называемая теория $u^3 - u^5$):

$$iu_t + u_{xx} + \lambda u + u(|u|^2 - |u|^4) = 0.$$

В работе /4/ это уравнение выведено для описания бозе-газа с потенциалом взаимодействия в виде дельта-функции. Здесь $f(s) = \lambda + s - s^2$, $f'(a_0^2) = 1 - 2a_0^2$, поэтому решения ϕ устойчивы при $a_0 > 1/\sqrt{2}$.

Литература

I. Солитоны в действии. Под ред. К. Лонгрен и Э. Скотта.М.: Мир, I98I.

2. Юэн Г., Лейк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, I987.

3. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент.-ЭЧАЯ, I983, т. I4, вып. I, стр. I23-I80.

4. Barashenkov I.V., Makhankov V.G. Soliton-Like excitations in a one-dimensional nuclear matter.JINR,E2-84-I73, Dubna, I984.

5. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, I986.

6. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, I980.

7. Ginibre J., Velo G. On a class of nonlinear Schrödinger equations. -J. of Funct. Anal., I979, vol. 32, p. I-32.

8. Strauss W.A. Mathemetical aspects of classical nonlinear field equations. Lect. Notes in Phys., I979, vol. 98, p. I23-I49.

9. Tsutsumi M. Weighted Sobolev spaces and repeadly decreased solutions of some nonlinear dispersive wave equations.- J. of differ equat., I98I, vol. 42, No 2, p. 260-28I.

I0. Жидков П.Е. Задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера. ОИЯИ, Р5-87-273, Дубна, I987.

II. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики.- ЭЧАЯ, I985, т. I6, вып. 3, стр. 597-648.

I2. Жидков П.Е. Об устойчивости солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера.- Дифференц.уравнения, I986, т. XXII, № 6, стр. 994-I004.

I3. Cazenave T., Lions P.L. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations.- Commun. Math. Phys., I982, vol. 85, No 4, p. 549-56I.

I4. Weinstein M.I. Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations.- Commun. in Pure and Appl. Math., I986, vol. 39, No I, p. 5I-67.

I5. Жидков П.Е. Об устойчивости решений вида кинков для нелинейного уравнения Шредингера. ОИЯИ, Р5-87-77, Дубна, I987.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 мая I989 года.