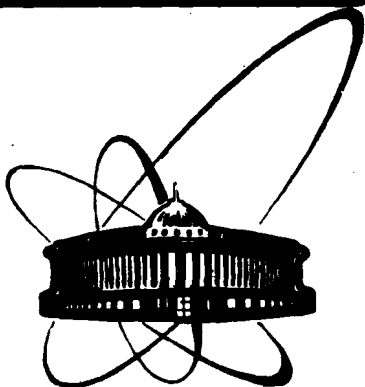


89-261



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

С 47

P5-89-261

С. И. Славов

НОВЫЙ ТИП ДВУХСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ
ВЕКТОРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА
С КОНДЕНСАТНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

1989

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы стала неоспоримой эффективностью алгебро-геометрического варианта метода обратной задачи для построения широкого функционального класса решений ряда фундаментальных нелинейных уравнений математической физики^{/1,2/}.

Суть метода заключается в широком использовании аппарата классической алгебраической геометрии римановых поверхностей и определенных на них мероморфных функций с существенной особенностью заданного вида для нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений.

В предложенной работе плодотворность этого подхода продемонстрирована в получении в явном виде нового типа двухсолитонных решений векторного нелинейного уравнения Шредингера /ВНУШ/ с конденсатными граничными условиями. Как будет показано в дальнейшем, этот новый тип солитонных решений ВНУШ отличается нетривиальной динамикой, выражающейся в периодических по времени вариациях формы солитонов и, по-видимому, существенно обусловленной векторностью избранной математической модели.

На наш взгляд, наиболее адекватным и эффективным для рассматриваемой задачи является вариант алгебро-геометрического подхода, предложенный впервые И.А.Чередником для построения конечнозонных решений векторных версий НУШ в^{/3/} и развитый в дальнейшем авторами^{/4-6/}. Специфическим для этого варианта является использование нелинейных соотношений между алгебро-геометрическими потенциалами нестационарного линейного уравнения Шредингера и его решениями для построения как квазипериодических, так и многосолитонных и рациональных решений ВНУШ.

В дальнейшем мы остановимся на основных моментах вышеуказанного подхода, отсылая читателя к работе^{/6/}, которая стимулировала в существенной степени исследование автора.

1. Постановка задачи. Сформулируем более подробно исходную математическую задачу. Пусть задано векторное нелинейное уравнение Шредингера следующего вида:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, t) - u(x, t) \Phi(x, t), \quad //1/$$



где без ограничения общности будем считать, что неизвестная комплекснозначная вектор-функция $\Phi(x,t)$ - двухкомпонентна, т.е.

$$\Phi(x,t) = (\Phi_1(x,t), \Phi_2(x,t))^T, \quad /2/$$

а самосогласованный неособый и вещественный "потенциал" $u(x,t)$ определяется выражением

$$u(x,t) = 2[\epsilon_1 |\Phi_1|^2 + \epsilon_2 |\Phi_2|^2 - \epsilon_1 b_1^2 - \epsilon_2 b_2^2]. \quad /3/$$

Постоянные ϵ_j и b_j^2 в /3/ вещественны. Будем предполагать, что $|\epsilon_j| = 1$. Физический смысл этих постоянных поясним несколько позже.

Граничные условия на бесконечности - условия конденсатного типа^{/7/}, т.е. асимптотики на бесконечности по пространственной переменной x "осциллирующие":

$$\Phi_j(x,t) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} b_j e^{ik_j(x+k_j t) + i\eta_j}, \quad /4/$$

где k_j и η_j - вещественные постоянные. При этом постоянные фазы η_j на $+\infty$ и $-\infty$, вообще говоря, разные.

Остановимся на физической интерпретации рассматриваемой математической модели и введенных параметров задачи. Наиболее удобной для анализа результатов физической моделью, соответствующей уравнению /1/ с указанным потенциалом /3/ и выбранными граничными условиями /4/, является модель двухкомпонентного бозе-газа с точечным парным взаимодействием при нулевой температуре. Детальный анализ ее особенностей можно найти в^{/7/} и^{/8/}. Результаты, полученные в рамках этой модели, можно легко переформулировать и для других физических задач. Кроме того, двухкомпонентная вектор-функция $\Phi(x,t)$ имеет смысл волновой функции.

Тогда постоянные b_j^2 можно рассматривать как плотность j -й компоненты бозе-конденсата в основном состоянии, $2k_j$ - как скорость плоской волны, распространяющейся в j -й компоненте бозе-газа, а ϵ_j - как постоянные взаимодействия между частицами j -й компоненты. При этом условии $|\epsilon_j| = 1$ вытекает из принятого предположения об одинаковой "интенсивности" взаимодействия в обоих компонентах газовой смеси, а выбор сигнатуры ϵ_j определяется характером этого взаимодействия / $\epsilon_j = 1$ - "отталкивание", $\epsilon_j = -1$ - "притяжение"/. Понятно, что тот или иной выбор сигнатуры постоянных взаимодействия определяет ту или иную метрику изотопического пространства и, соответственно, - тип внутренней симметрии рассматриваемого уравнения^{/7/}. Для рас-

сматриваемого уравнения это компактные группы $U(2,0)$ ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$) и $U(0,2)$ ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$), а в случае разных знаков ϵ_j - некомпактная группа унитарной симметрии $U(1,1)$.

2. Описание метода. Как уже говорилось во введении, решение поставленной задачи можно выразить посредством собственных функций линейного нестационарного уравнения Шредингера с конструированным соответствующим образом самосогласованным потенциалом $u(x,t)$. С этой целью рассматриваются собственные функции $\psi(x,t,k)$ линейного оператора следующего вида:

$$\hat{L} \equiv i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u(x,t), \quad /5/$$

т.е.

$$\hat{L} \psi(x,t,k) = 0. \quad /6/$$

Вообще потенциал $u(x,t)$ - комплекснозначная функция, но далее в соответствии с требованиями задачи будут сформулированы ограничения на параметры конструкции, обеспечивающие гладкие и вещественные потенциалы. Для нахождения гладких многосолитонных решений ВНУШ с конденсатными граничными условиями в работе^{/6/} предложена следующая алгебро-геометрическая конструкция.

В качестве собственных функций $\psi(x,t,k)$ линейного оператора выбираются функции Бейкера-Ахиезера. Как и все одноточечные функции Бейкера-Ахиезера, $\psi(x,t,k)$ определена на римановой поверхности некоторого топологического рода g . Особенностью конструкции, продиктованной желанием получить при помощи $\psi(x,t,k)$ многосолитонные решения ВНУШ, является выбор римановой поверхности рода $g = 0$. Иными словами, $\psi(x,t,k)$ определена на обычной комплексной плоскости \bar{C} .

Как обычно^{/1/}, задается существенная особенность определенного вида. Для рассматриваемой конструкции требуется, чтобы в окрестности бесконечно удаленной точки $k = \infty$, $\psi(x,t,k)$ имела вид:

$$\psi(x,t,k) = (1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x,t) k^{-s}) e^{ik(x+k t)}, \quad /7/$$

где $\xi_s(x,t)$ - комплекснозначные коэффициенты, равномерно ограниченные по x на всей прямой^{/4/}. Отметим то обстоятельство, что алгебро-геометрические потенциалы $u(x,t)$ для выбранного условия самосогласования /3/ можно выразить при помощи конечного числа коэффициентов $\xi_s(x,t)$, а именно^{/4/}:

$$u(x,t) = 2 [\xi_2 + \bar{\xi}_2 + |\xi_1|^2] + \text{const.} \quad /8/$$

Для получения многосолитонных решений необходимо потребовать, чтобы $\psi(x,t,k)$ была мероморфной функцией в конечной плоскости S с полюсами первого порядка в некоторых точках κ_j $j=1,2,\dots, \dots N$. Они выбираются таким образом, чтобы комплекснозначные потенциалы $u(x,t)$ были в соответствии с требованиями задачи неособыми и вещественными. Впервые условия получения таких потенциалов получены в ^{9/}, а потом усовершенствованы в работах ^{1,4,6/}. Далее мы рассмотрим необходимые ограничения на расположение полюсов в S .

Поскольку любую мероморфную функцию можно однозначно определить, зная ее вычеты в особых точках, то $\psi(x,t,k)$ можно искать в виде ^{6/}

$$\psi(x,t,k) = \left[1 + \sum_{j=1}^N \frac{\text{res}_{k=\kappa_j} \psi(x,t,k) e^{-i\omega_j}}{k - \kappa_j} \right] e^{ik(x+kt)}, \quad /9/$$

где линейная функция $\omega_j(x,t) \equiv \kappa_j x + \kappa_j^2 t$. Поскольку вычеты $\psi_j(x,t) \equiv \text{res}_{k=\kappa_j} \psi(x,t,k)$ зависят от x и t , то для однозначной определенности функции $\psi(x,t,k)$ необходимо наложить на нее некоторые дополнительные линейные условия вида

$$\psi(x,t,\bar{\kappa}_i) = -\sum_{j=1}^N C_{ij} \psi_j(x,t), \quad /10/$$

где C_{ij} - некоторая параметризующая матрица размера $N \times N$ с комплексными элементами.

Вернемся к критериям выбора расположения точек κ_j , продиктованного необходимостью получать неособые, вещественные потенциалы $u(x,t)$, что, конечно, предполагает при выбранном условии самосогласования ^{3/} также и получение гладких по x и t решений $\psi(x,t,k)$. Как показано в ^{6/}, получение гладких по x и t решений $\psi(x,t,k)$ и вещественных неособых потенциалов $u(x,t)$ обеспечивается условием:

$$C_{ij} = -\bar{C}_{ji} \quad /11/$$

т.е. параметризующая матрица C_{ij} косоэрмитова, а точки κ_j расположены в комплексной плоскости определенным согласованным со знакоопределенностью матрицы C_{ij} образом, а именно:

$$\text{Im } \kappa_j > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{i} \lambda_j > 0 \quad 1 \leq j \leq p, \quad /12/$$

$$\text{Im } \kappa_j < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{i} \lambda_j < 0 \quad p+1 \leq j \leq N,$$

где λ_j - собственные значения косоэрмитовой матрицы C_{ij} . Иными словами, расположение κ_j в верхней полуплоскости требует положительной определенности, а расположение κ_j в нижней полуплоскости - отрицательной определенности соответствующих подматриц C_{ij} . Эту законоопределенность можно считать и нестрогой. Заметим, что, вообще говоря, все полюсы κ_j можно "сдвинуть" в верхнюю полуплоскость, не изменив при этом собственных функций $\psi(x,t,k)$ и потенциала. Однако для выбранных нами потенциала и граничных условий матрица C_{ij} антидиагональна, и фиксация полюсов κ_j в разных полуплоскостях существенна. Заметим также, что при специальном выборе спектральных данных κ_j и C_{ij} потенциал $u(x,t)$ может быть квазипериодической или периодической по x и t функцией.

Рассмотрим теперь классификацию многосолитонных решений. В соответствии с принятой терминологией N -солитонными решениями будут называться решения, зависящие от N полюсов κ_j . В ^{6/} предложена следующая формула для их вычисления:

$$\psi(x,t,k) = \frac{\det \hat{M}(x,k,t)}{\det M(x,t)} e^{ik(x+kt)}, \quad /13/$$

где матрица $M(x,t)$ размером $N \times N$ определяется выражением

$$M_{ij}(x,t) = C_{ij} + \frac{e^{i(\bar{\omega}_i - \omega_j)}}{\bar{\kappa}_i - \kappa_j}, \quad i,j=1,2,\dots,N, \quad /14/$$

а окаймляющая матрица $\hat{M}(x,t,k)$ задана условиями:

$$\hat{M}_{00} = 1, \quad \hat{M}_{ij} = M_{ij}, \quad \hat{M}_{0i} = \frac{e^{-i\omega_i}}{k - \kappa_i}, \quad /15/$$

$$\hat{M}_{i0} = e^{i\bar{\omega}_i}, \quad i,j=1,2,\dots,N.$$

Формулы ^{13/}-^{15/} можно получить, подставляя ^{9/} в линейные условия ^{10/} на вычеты функции $\psi(x,t,k)$. В дальнейшем мы будем рассматривать двухсолитонные решения, что соответствует существованию двух полюсов κ_j и размерности матрицы C_{ij} 2×2 .

Опишем способ построения решений ВДУШ с заданными граничными условиями при помощи собственных функций $\psi(x, t, k)$ линейного оператора \hat{L} . Впервые этот способ был предложен в работе И.В.Чередника^{/3/} для получения конечнозонных решений векторных уравнений НУШ и КДФ, а в дальнейшем был развит И.М.Кричевером в^{/4/} для получения конечнозонных решений с другим условием самосогласования для потенциала. В этом подходе решения ВДУШ с конденсатными граничными условиями $\Phi_j(x, t)$ можно получить как значения функции Бейкера-Ахиезера $\psi(x, t, k)$ в полюсах k_j подходящим образом выбранной рациональной функции $\Phi_j(x, t) = b_j \psi(x, t, k) |_{k=k_j}, k_j \in \mathbb{R}. \quad /16/$

Условие самосогласования /3/ и выбранные граничные условия обуславливают следующий вид функции $E(k)$:

$$E(k) = k + \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon_j b_j^2}{k - k_j}, \quad /17/$$

где ϵ_j, b_j^2, k_j - вещественные константы, о которых уже говорилось в § 1.

Поскольку число осциллирующих асимптотик определяется числом полюсов k_j , то для рассматриваемого случая потребуем, чтобы $n = 2$. Чтобы учесть граничные условия /4/, необходимо наложить и следующую связь между параметрами k_j, C_{ij} и рациональной функцией $E(k)$:

$$C_{ij} (E(\bar{\kappa}_i) - E(\kappa_j)) = 0. \quad /18/$$

Как нетрудно показать, это условие выполнимо только для двух типов матриц C_{ij} - диагональных и антидиагональных. Выбор диагональной матрицы C_{ij} приводит к получению решений исходной задачи в виде нелинейной суперпозиции "ступенек" /дырочных мод/. Выбор антидиагональной матрицы C_{ij} приводит, как мы покажем в дальнейшем, к новым нетривиальным двухсолитонным решениям поставленной задачи.

Антидиагональным матрицам C_{ij} соответствует условие "склейки" вида

$$E(\bar{\kappa}_1) = E(\kappa_2) \quad /19/$$

или, что то же самое, $E(\bar{\kappa}_2) = E(\kappa_1)$. Условие /19/ накладывает определенные ограничения на симметрию уравнения, т.е. на тот или иной выбор постоянных ϵ_j при фиксированном расположении полюсов κ_1, κ_2, k_1 и k_2 . Эти ограничения имеют вид нера-

венств^{/6/}. Их можно интерпретировать как ограничения на скорость двухсолитонного решения.

Ввиду косоэрмитовости матрицы C_{ij} и условия знакоопределенности полюсы κ_j должны быть расположены в верхней и нижней полуплоскости соответственно. Поскольку матрица C_{ij} антидиагональна, то условия "перегонки" полюсов в одну полуплоскость без изменения решения не выполняются^{/6/}.

Так как условие /18/ дает нам известный произвол в выборе C_{ij} , то мы можем представить ее в следующем, удобном из технических соображений виде:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{\bar{\kappa}_1 - \kappa_2} \\ \frac{\bar{\rho}}{\bar{\kappa}_2 - \kappa_1} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho = |\rho| e^{i\xi}$ - произвольная нормировочная константа. Очевидна косоэрмитовость C_{ij} , которая требуется для обеспечения гладких решений и вещественных, неособых потенциалов.

Перед тем, как закончить обсуждение необходимых ограничений на параметры задачи, отметим выгодную в техническом плане возможность сделать $\text{Re} \kappa_2 = 0$ с помощью сдвига полюсов параллельно вещественной оси $\text{Re} k$. Эта возможность вытекает из галилеевой инвариантности потенциала оператора Шредингера. В дальнейшем без дополнительных обсуждений будем предполагать, что $\text{Re} \kappa_2 \equiv \alpha_2 = 0$. Более подробно о законе преобразования спектральных данных κ_j, C_{ij} при некоторых простейших преобразованиях координат можно прочитать в^{/4,6/}.

3. Результаты. При наложенных ограничениях на параметры уже нетрудно найти двухсолитонные решения поставленной задачи. Для этого необходимо подставить /20/ в /13-16/ и после трудоемких, но прямолинейных выкладок можно получить следующий результат:

$$\Phi(x, t) = b_j \left[1 + \frac{z_1^j e^{2\beta x + 4\mu t} + z_2^j e^{\beta x + 2\mu t} (z_2^j e^{-i(\alpha x + gt)} + z_3^j e^{i(\alpha x + gt)})}{z_4^j e^{2\beta x + 4\mu t} + z_5^j e^{\beta x + 2\mu t} \cos(\alpha x + gt + \xi) + z_6^j} \right] e^{ik_j(x + k_j t)}, j=1,2. \quad /21/$$

В /21/ использованы следующие обозначения:

$$\alpha = \alpha_1 \equiv \text{Re} \kappa_1, \quad \beta_1 \equiv \text{Im} \kappa_1, \quad \beta_2 \equiv \text{Im} \kappa_2,$$

$$\beta \equiv \beta_1 + \beta_2, \quad \mu \equiv \alpha_1 \beta_1, \quad g \equiv \alpha^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2. \quad /22/$$

Постоянные z_m^j имеют вид:

$$z_1^j = (\kappa_1 - \kappa_2) [(k_j - \kappa_1)(\bar{\kappa}_1 - \kappa_2)(\bar{\kappa}_2 - \kappa_2) + (k_j - \kappa_2)(\kappa_1 - \bar{\kappa}_2)(\bar{\kappa}_1 - \kappa_1)],$$

$$z_2^j = \rho (k_j - \kappa_2)(\bar{\kappa}_2 - \kappa_1)(\bar{\kappa}_1 - \kappa_1)(\bar{\kappa}_2 - \kappa_2),$$

$$z_3^j = \bar{\rho} (k_j - \kappa_1)(\bar{\kappa}_1 - \kappa_2)(\bar{\kappa}_1 - \kappa_1)(\bar{\kappa}_2 - \kappa_2), \quad /23/$$

$$z_4^j = (k_j - \kappa_1)(k_j - \kappa_2)(\bar{\kappa}_1 - \bar{\kappa}_2)(\kappa_2 - \kappa_1),$$

$$z_5^j = -2|\rho| (\bar{\kappa}_1 - \kappa_1)(\bar{\kappa}_2 - \kappa_2)(k_j - \kappa_1)(k_j - \kappa_2),$$

$$z_6^j = -|\rho|^2 (\bar{\kappa}_1 - \kappa_1)(\bar{\kappa}_2 - \kappa_2)(k_j - \kappa_1)(k_j - \kappa_2).$$

Вычисление асимптотик по x при $\beta > 0$ решения /21/ дает:

$$\Phi_j \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} b_j e^{ik_j(x+k_j t)}, \quad /24/$$

$$\Phi_j \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b_j e^{ik_j(x+k_j t) + i\eta_j},$$

$$\text{где} \quad \eta_j \equiv \arg \frac{(k_j - \bar{\kappa}_1)(k_j - \bar{\kappa}_2)}{(k_j - \kappa_1)(k_j - \kappa_2)}.$$

В случае, когда $\beta < 0$, асимптотики по x меняются местами.

Из /24/ видно, что полученное решение удовлетворяет поставленным граничным условиям. В зависимости от взаимного расположения полюсов $\kappa_1, \kappa_2, \bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2$ решение /21/ может быть как солитонным, так и квазипериодическим, а именно: если

$$1. \quad \beta_1 + \beta_2 = 0, \quad \Phi_j(x + \frac{2\pi}{\beta}, t) = \Phi_j(x, t) e^{2\pi i \frac{k_j}{\beta}}, \quad /25/$$

т.е. решение квазипериодично по x .

$$2. \quad \beta_1 + \beta_2 = 0, \quad \alpha = 0, \quad \Phi_j(x, t + \frac{2\pi}{\beta_2^2 - \beta_1^2}) = \Phi_j(x, t) e^{2\pi i \frac{k_j}{\beta_2^2 - \beta_1^2}}, \quad /26/$$

т.е. решение квазипериодично по t .

$$3. \quad \alpha = \beta = 0, \quad \Phi_j(x, t) = b_j e^{ik_j(x+k_j t)}, \quad /27/$$

т.е. решение - обычная плоская волна.

Случай, когда $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ - самый интересный. Он приводит к новому типу двухсолитонного решения. Для того, чтобы исследовать его свойства, удобно перейти к новой переменной

$$\zeta = x + \frac{2\mu}{\beta} t. \quad /28/$$

Рассмотрим решение /21/ в новых переменных ζ :

$$\Phi_j'(\zeta, t) = b_j [1 + \frac{z_1^j e^{2\beta\zeta} + z_2^j e^{\beta\zeta} (z_2^j e^{-i(a\zeta + \bar{g}t)} + z_3^j e^{i(a\zeta + \bar{g}t)} + ik_j(\zeta + k_j' t))}{z_4^j e^{2\beta\zeta} + z_5^j e^{\beta\zeta} \cos(a\zeta + \bar{g}t + \xi) + z_6^j}] e^{ik_j(\zeta + k_j' t)}, \quad j = 1, 2, \quad /29/$$

где

$$\bar{g} \equiv g - \frac{2\alpha\mu}{\beta}, \quad k_j' \equiv k_j - \frac{2\mu}{\beta}.$$

Из /29/ видно, что обе компоненты решения локализованы по переменной ζ , т.е. это действительно солитон. При этом решение распространяется со скоростью $v \equiv \frac{2\mu}{\beta}$, одинаковой для обеих компонент. Самой интересной особенностью, однако, является изменение формы солитона, происходящее с периодом T , где

$$T \equiv \frac{2\pi}{\bar{g}} = \frac{2\pi}{g - \alpha v}. \quad /30/$$

Вариации формы солитона экспоненциально затухают на бесконечности по ζ .

Солитонное решение с аналогичной динамикой приводится для гамилтоновой системы типа КДФ более высокого порядка в работе Ю.И.Манина/10/. На наш взгляд, такое сходство не случайно и, по всей вероятности, вызвано использованием общих алгебро-

-геометрических предпосылок в работах /10/ и /6/ - рассмотрением рациональных кривых с особенностями типа двойных точек с разделенными касательными, а также порядком операторов соответствующих уравнений Лакса.

Ю.И.Манин считает, что солитоны такого типа принципиально отличаются от известных и называет их матричными солитонами. На наш взгляд, исходя из характера динамики и явного наличия внутренней степени свободы, характеризуемой частотой \tilde{g} , по аналогии с бризерами уравнения SG целесообразно назвать наше двухсолитонное решение бризером ВНУШ. По-видимому, решение такого типа до сих пор не рассматривалось в литературе, доступной автору.

Теперь мы остановимся на анализе симметрии полученного бризерного решения. Как говорилось в § 2, симметричные ограничения на k_1, k_2, k_1, k_2 можно сформулировать в терминах скорости бризера $v_B \equiv 2\mu/\beta$ и некоторых других критических скоростей, при переходе через которые типы симметрии решения изменяются. Эти ограничения можно получить как условия выполнения "склейки" /19/ при том или ином выборе знаков для ϵ_j .

Решения с симметрией $U(1,1)$ получаются при выполнении неравенств

$$v_B < v_1 \text{ или } v_B > v_3, \quad /31/$$

где критические скорости v_1 и v_3 определяются соотношениями

$$v_1 \equiv \frac{2k_1}{a}, \quad v_3 \equiv \frac{2k_2}{a}, \quad /32/$$

$2k_1$ и $2k_2$ - скорости первого и второго конденсата соответственно,

$$p \equiv \frac{\beta_1}{|\beta_2|}, \quad a \equiv \frac{(p-1)}{p(p+1)}.$$

Если скорость бризера равняется одной из критических, то условие склейки /19/ разрешимо, только если $b_1 = 0$ при $v_B = v_3$ и $b_2 = 0$ при $v_B = v_1$, что, конечно, противоречит выбранным граничным условиям, но находится в соответствии с тем, что v_1 и v_3 - скорости, при которых происходит перестройка типа симметрии решения.

Решения с симметрией $U(2,0)$ и $U(0,2)$ получаются, если выполняются условия

$$v_1 < v_B < v_3. \quad /33/$$

Переход из решения с симметрией $U(2,0)$ к решению с симметрией $U(0,2)$ происходит при некоторой другой критической скорости v_2 , которую можно определить из соотношения

$$(v_3 - v_2)(v_2 - v_1) = -\frac{4p\alpha^2}{(p+1)^2 a^2} + \frac{4p\beta_2^2}{a^2}. \quad /34/$$

При этом, если $v_1 < v_B < v_2$, то имеем $U(2,0)$ -симметричное решение, а при $v_2 < v_B < v_3$ - $U(0,2)$ -симметричное решение.

Рассмотренные условия имеют числ. только если полюса k_1, k_2, k_1, k_2 не лежат на одной окружности. В противном случае условия склейки /19/ не имеют решения. Отметим также и возможность "вырождения", когда некоторые из критических скоростей совпадают между собой, и при произвольной скорости v_B возможны решения только двух или даже одного типа симметрии, например, при $v_1 = v_3$ остаются только $U(1,1)$ -симметричные решения.

Чтобы более наглядно проиллюстрировать наличие внутренней структуры полученного двухсолитонного решения, были сделаны компьютерные расчеты при удобном выборе параметров $\beta_1 = -\beta_2/2 = k_1 = k_2/2 = 1, |\rho| = 1, \xi = 0$ и $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = -1$, т.е. симметрия решения - $U(1,1)$ ($v_B < v_1$).

На рис. 1, 2 изображены зависимости квадрата модуля первой компоненты, нормированной на единицу при $|\zeta| \rightarrow \infty$ в различные моменты времени t_m одного периода T от пространственной переменной ζ . Из них видно, что в течение периода наблюдается осцилляция вдоль оси x двух связанных односолитонных решений - ка-

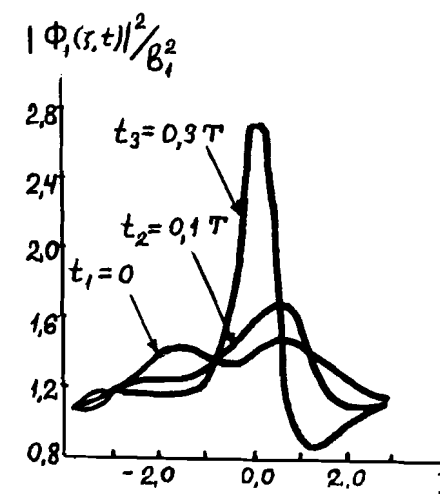


Рис. 1.

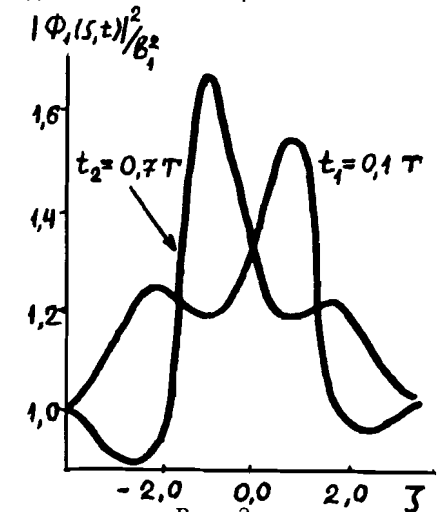


Рис. 2.

пельной и дырочной мод. Эти осцилляции проявляются в виде периодических по времени вариаций формы двухсолитонного решения - бризера ВНУШ. Аналогичная динамика наблюдается и для второй компоненты. Можно ожидать, что и для случая $U(0,2)$ мы будем иметь связанное состояние двух дырочных мод.

В заключение я хочу высказать свою благодарность В.Г.Маханькову за стимулирующие и плодотворные дискуссии, а также Т.Бояджиеву за помощь в компьютерной графике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А. - УМН, 1981, т.36, вып.2, с.11.
2. Кричевер И.М. - Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. - М.: ВИНТИ АН СССР, 1983, т.23, с.33.
3. Чередник И.В. - Функцион.анализ и его прил., 1978, т.12, вып.3, с.45.
4. Кричевер И.М. - Функцион.анализ и его прил., 1986, т.20, вып.3, с.42.
5. Елеонский В.М., Кричевер И.М., Кулагин Н.Е. - ДАН, 1986, т.287, с.606.
6. Дубровин Б.А. и др. - ЭЧАЯ, 1988, т.19, вып.3, с.579.
7. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. - ТМФ, 1982, т.53, № 1, с.55.
8. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. - Нелинейные волны намагнитченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, 1983, с.189.
9. Чередник И.В. - ДАН СССР, 1980, т.252, вып.5, с.1104.
10. Манин Ю.А. - Функцион.анализ и его приложения, 1978, т.12, вып.4, с.53.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 апреля 1989 года.

Славов С.И.

P5-89-261

Новый тип двухсолитонных решений векторного нелинейного уравнения Шредингера с конденсатными граничными условиями

Исследовано векторное нелинейное уравнение Шредингера /ВНУШ/ с конденсатными граничными условиями. Получен новый тип двухсолитонных решений с нетривиальной динамикой. Периодические по времени вариации солитонов позволяют предположить, что данные решения являются связанными состояниями известных односолитонных решений исследуемой нелинейной модели. Результаты компьютерной графики послужили дополнительным аргументом в пользу этого предположения. Проведенный анализ симметрии двухсолитонных решений показал, что полученное решение существует для всех типов внутренней симметрии гамильтониана исследуемой нелинейной модели. Симметричные ограничения на решение сформулированы в терминах скорости солитонов и некоторых критических скоростей, выражаемых через параметры задачи. В качестве метода был использован алгебро-геометрический метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, разработанный С.П.Новиковым, Б.А.Дубровиным, И.М.Кричевером и др.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод О.С.Виноградовой

Slavov S.I.

P5-89-261

A New Type of Two-Soliton Solutions of the Nonlinear Vector Schroedinger Equation with Condensate Boundary Conditions

The nonlinear vector Schroedinger equation with condensate boundary conditions is investigated. A new type of two-soliton solutions with non-trivial dynamics is obtained. The variation of soliton form is periodical in time which gives a reason to suppose that these solitons are bound states of well-known one-soliton solutions of the investigated nonlinear model. The results of computer graphics serve as an additional argument in favour of this assumption. The analysis performed of these two-soliton solution symmetry indicated that the obtained solution exists for all types of internal symmetry of Hamiltonian of the nonlinear model under study. Symmetry constrains on the solution are formulated in terms of soliton velocity and some critical velocities expressed via parameters of the problem. The algebrogeometrical method of integration of nonlinear differential equations developed by S.P.Novikov, B.A.Dubrovln, I.M.Krichever et al. was used.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989