сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-231

В.П.Гердт, А.Ю.Жарков*

РЕШЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ КЛАССИФИКАЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ТИПА СВЯЗАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ВРИЗА

*Саратовский государственный университет

1989

1. Введение

При классификации интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений [1] часто возникает необходимость решения громоздких систем полиномиальных уравнений. В частности, успешное решение этой проблемы позволяет полностью проклассифицировать многопараметрические семейства эволюционных уравнений вида [2-5]

$$\bar{u}_t = \Lambda\bar{u}_N + \bar{F}(x,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_{N-1},a_1,\ldots a_k),$$

где

$$\bar{u} = (u^1,\ldots,u^M),\ \bar{u}_i = \frac{d^i\bar{u}}{dx^i},$$

Λ-постоянная матрица $M\times M$ с различными и отличными от нуля собственными значениями, а вектор $\bar{F}$- полиномиально зависит от своих аргументов.

В работе [5] рассмотрена задача классификации нелинейных систем типа связанного уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ)*:

$$\begin{aligned} u_t &= \lambda_1 u_3 + a_1 uu_1 + a_2 vv_1 + a_3 uv_1 + a_4 vu_1, & \lambda_1 &\neq \lambda_2, \\ v_t &= \lambda_2 v_3 + b_1 vv_1 + b_2 uu_1 + b_3 vu_1 + b_4 uv_1 & \lambda_1 &\neq 0,\ \lambda_2 \neq 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

в результате которой был получен полный список интегрируемых систем (1), т.е. обладающих высшими симметриями.

Целью настоящей работы является подробное изложение вычислительных аспектов решения системы полиномиальных уравнений на параметры семейства (1), возникающей как следствие условий интегрируемости. Следует отметить, что вопросам алгоритмизации и реализации в системах аналитических вычислений методов точного решения систем полиномиальных уравнений уделяется в последнее время особое внимание [6]. Это обусловлено как быстрым ростом ресурсов ЭВМ, так и появлением новых конструктивных методов полиномиальной алгебры. Среди последних наиболее общим и развитым является подход, основанный на построении базисов Грёбнера [7]. Этот подход позволяет, например, за конечное число шагов исследовать совместность заданной системы полиномиальных уравнений, выяснить, конечно или бесконечно число её

---

*Мы будем рассматривать в качестве связанного уравнения КдВ только те системы семейства (1), в которых оба уравнения являются нелинейными.

решений и, в случае конечного числа решений, преобразовать её к эквивалентному виду с "разделёнными переменными". В настоящее время процедура построения базиса Грёбнера реализована практически во всех развитых системах аналитических вычислений, таких, например, как MACSYMA, REDUCE (версия 3.3), MAPLE и др. [8].

Непосредственное применение существующих пакетов для построения базисов Грёбнера в классификационных задачах, однако, не приводит к успеху. Это обусловлено, во-первых, тем обстоятельством, что получающиеся полиномиальные системы имеют бесконечное число решений, и, во-вторых, в силу их громоздкости вычисление базиса Грёбнера требует неимоверно больших ресурсов ЭВМ. С другой стороны, специфика классификационных задач позволяет применить менее общий, но гораздо более эффективный метод решения получающихся полиномиальных систем. Мы изложим этот метод на примере классификации эволюционных систем семейства (1). Исходные полиномиальные уравнения, возникающие как необходимые условия интегрируемости [5], получены с помощью программы, написанной на языке FORMAC [4]. Все остальные расчёты, связанные с анализом полученных полиномиальных систем, были выполнены в интерактивном режиме на ЭВМ ЕС-1061 с помощью системы REDUCE-3.2, которая имеет весь необходимый встроенный математический аппарат.

2. Предварительные замечания

Как легко видеть, семейство (1) инвариантно относительно следующих преобразований

1) $t \Rightarrow \alpha t,\ x \Rightarrow \beta x, \qquad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,$

2) $u \Rightarrow \mu u,\ v \Rightarrow \nu v, \qquad \mu \neq 0,\ \nu \neq 0, \quad \alpha,\beta,\mu,\nu \in \mathbb{C},$

что позволяет частично фиксировать параметрический произвол в (1).
В частности, ниже мы будем использовать следующие соотношения:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - 1, \tag{2.1}$$

Если $a_1 \neq 0$, $a_4 \neq 0$ и $a_1 b_1 = a_4 b_4$, то $a_1 = a_4$, $b_1 = b_4$. (2.2)

Если $a_3 \neq 0$, $b_3 \neq 0$, то $a_3 = b_3$. (2.3)

Отметим, что "калибровка" (2.1) вытекает из инвариантности относительно преобразования 1) и будет использована на протяжении всей работы. Калибровки (2.2) и (2.3) следуют из инвариантности относительно преобразования 2) и носят альтернативный характер. В дальнейшем в каждом конкретном случае мы будем выбирать одну из этих двух калибровок.

Учитывая симметрию (1) относительно замены

$$u \leftrightarrow v, \quad \lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2, \quad a_i \leftrightarrow b_i,$$

введём также в рассмотрение операцию сопряжения:

$$\bar f(u,v,a_i,b_i,\lambda_1,\lambda_2) \overset{\mathrm{def}}{=} f(v,u,b_i,a_i,\lambda_2,\lambda_1).$$

3. Канонические плотности

В рамках симметрийного подхода, описанного в работе (4) и применённого в работе [5] к семейству (1), на ЭВМ были вычислены следующие плотности канонических законов сохранения

$$\begin{gathered} R_1 = a_1 u + a_4 v, \quad \bar R_1 = b_1 v + b_4 u, \quad R_2 = \bar R_2 = 0, \\ R_3 = y_1 u^2 + y_2 v^2, \quad \bar R_3 = \bar y_1 v^2 + \bar y_2 u^2, \quad R_4 = r_4 u v_1, \ \bar R_4 = \bar r_4 v u_1, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$y_1 = 6\lambda_1 a_3 b_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(a_1^2 + a_4 b_2), \ y_2 = 6\lambda_1 b_3 a_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 a_2 + a_4 b_1)$$

и

$$\begin{aligned} r_4 = {} & 2(2\lambda_1^2 + 8\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2) a_3 b_3 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2) a_3 b_3 + 5(\lambda_1 - \lambda_2)^2 a_1 a_3 \\ & + (\lambda_1 - \lambda_2)(-7\lambda_1 + \lambda_2) a_4 b_3 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 a_4 b_4 - 5(\lambda_1 - \lambda_2)^2 a_1 a_4 - 6\lambda_1(\lambda_1 + 2\lambda_2) a_2 b_2. \end{aligned}$$

Необходимые условия интегрируемости семейства (1) имеют вид [5]

$$(R_i, \bar R_i)_t \in \mathrm{Im}\,\mathbb{D}, \ \mathbb{D} \equiv \frac{d}{dx}. \tag{4}$$

При $i=1 \div 4$ условия (4) эквивалентны следующим уравнениям на параметры семейства (1)

$$\begin{gathered} a_1(a_3 - a_4) = a_4(b_3 - b_4) \ (5.1), \quad b_1(b_3 - b_4) = b_4(a_3 - a_4) \ (5.1)', \\ (2a_3 - a_4) y_1 - b_2 y_2 = 0 \ (5.2), \quad (2b_3 - b_4)\bar y_1 - a_2 \bar y_2 = 0 \ (5.2)', \\ a_2 y_1 - (2b_3 - b_4) y_2 = 0 \ (5.3), \quad b_2 \bar y_1 - (2a_3 - a_4)\bar y_2 = 0 \ (5.3)', \\ 3\lambda_1(a_2 b_2 + a_3 b_3) + (\lambda_1 - \lambda_2)(b_3 + a_1) a_4 = 0 \ (5.4), \\ 3\lambda_2(a_2 b_2 + a_3 b_3) + (\lambda_2 - \lambda_1)(a_3 + b_1) b_4 = 0 \ (5.4)', \\ r_4 = 0 \ (5.5), \ \bar r_4 = 0, \ (5.5)' \end{gathered} \tag{5}$$

которые также были получены на ЭВМ.
Кроме того, частичное использование условия (4) для $i=5$ дает ещё два уравнения

$$r_5 = 0 \ (5.6), \ \bar r_5 = 0, \ (5.6)' \tag{5}$$

где

$$r_5=3\lambda_1((\lambda_1-\lambda_2)^3-3\lambda_1(\lambda_1+2\lambda_2)^2)(a_3b_3+a_2b_2)+3\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)^3a_1a_3$$
$$-9\lambda_1^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+2\lambda_2)a_3b_4-(\lambda_1-\lambda_2)(2\lambda_1^3-30\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_2^3)a_4b_3$$
$$+9\lambda_1^2(\lambda_1-\lambda_2)^2a_4b_4-2(\lambda_1-\lambda_2)^3(2\lambda_1+\lambda_2)a_1a_4.$$

4. Решение системы (5)

Структура плотностей сохранения (3) естественным образом приводит к следующим альтернативным возможностям

(1) Пусть $a_1 \neq 0$, $a_4 \neq 0$.

(1.1) Предположим, что $a_3 \neq a_4$, $b_3 \neq b_4$. Тогда из (5.1),(5.1)' следует $a_1b_1=a_4b_4$. Примем калибровку (2.2) и рассмотрим линейную комбинацию $\lambda_2\cdot(5.4) - \lambda_1\cdot(5.4)'$, которая приводит к уравнению

$$\lambda_2a_1(b_3+a_1) + \lambda_1b_1(a_3+b_1)=0. \tag{6}$$

и, следовательно, к двум подслучаям:

(1.1.1) $b_3+a_1 \neq 0$, $a_3+b_1 \neq 0$. Тогда из (5.1),(6) следует: $b_1=-\lambda_2/\lambda_1\cdot a_1$, $b_3=a_3-(1+\lambda_2/\lambda_1)a_1$. Выражая из (5.4) произведение a_2b_2 и подставляя полученные соотношения и калибровку (2.1) в (5.5),(5.5)', (5.6),(5.6)', приходим к уравнениям вида

$$c_1a_1^2 + c_2a_1a_3 + c_3a_3^2 = 0,\ c_i=c_i(\lambda_1).$$

Пусть, например, det((5.5),(5.5)',(5.6)) обозначает определитель матрицы для системы соответствующих уравнений, рассматриваемых как линейные относительно трёх "неизвестных": a_1^2, a_1a_3 и a_3^2. Поскольку $a_1\neq0$, то такая линейная система должна иметь нулевой определитель, что приводит к полиномиальному уравнению на λ_1. Аналогично, рассматривая другие тройки из уравнений (5.5),(5.5)',(5.6),(5.6)', получим, в частности*:

$$\text{НОД}\{\det[(5.5),(5.5)',(5.6)],\det[(5.5),(5.5)',(5.6)']\}=$$
$$-2\lambda_1^2(\lambda_1-1)(2\lambda_1-1)=0\ .$$

В силу (1) и (2.1) $\lambda_1\neq0$, $\lambda_1\neq1$, следовательно, $\lambda_1=1/2$.

Подставляя полученные соотношения в (5.5),(5.6), приходим к противоречивой системе

$$a_1^2-a_1a_3+a_3^2=0,\quad a_1(a_1-3a_3)=0.$$

*Здесь и ниже НОД означает наибольший общий делитель.

Случай (1.1.1) не имеет места∎

(1.1.2) $b_3=-a_1$, $b_1=-a_3$. Из (5.4) следует $a_2b_2=a_1a_3$. Рассматривая уравнения (5.5),(5.5)',(5.6),(5.6)' как линейные относительно a_1^2, a_1a_3, a_3^2, и используя калибровку (2.1), получаем

$$\text{НОД}\{\det[(5.5),(5.5)',(5.6)],\det[(5.5),(5.5)',(5.6)']\}=$$
$$144\lambda_1(9\lambda_1^2-9\lambda_1+1)=0\quad(\lambda_1\neq0). \tag{7}$$

Рассмотрим ещё одну альтернативу, связанную со структурой плотностей $R_3,\bar{R}_3$.

(1.1.2.1) $R_3=\bar{R}_3=0 \iff y_1=y_2=\bar{y}_1=\bar{y}_2=0$. С учётом предыдущих соотношений $\lambda_1\bar{y}_1-\lambda_2y_2=(\lambda_1-\lambda_2)(a_2-a_3)(\lambda_1a_3-\lambda_2a_1)=0$. Поскольку $\lambda_1\neq\lambda_2$, имеется две возможности: $\lambda_1a_3=\lambda_2a_1$ или $a_2=a_3$. В первом случае замена a_3 на $\lambda_2/\lambda_1\cdot a_1$ и использование калибровки (2.1) в уравнениях (5.6), (5.6)' приводит к уравнению на λ_1, не совместному с (7). Во втором случае из равенства $y_2=0$ с учётом $a_1\neq0$ получаем $a_2=a_3=0$. Тогда (5.5) в калибровке (2.1) даёт $\lambda_1=2/3$, что противоречит (7).

Случай (1.1.2.1) не имеет места∎

(1.1.2.2) $R_3\neq0$ и/или $\bar{R}_3\neq0$. Тогда не все $y_i,\bar{y}_i$ (i=1,2) обращаются в ноль. Рассматривая уравнения (5.2),(5.2)',(5.3),(5.3)' как линейные относительно $y_i,\bar{y}_i$ (i=1,2), приравнивая нулю их определители:

$$\det((5.2),(5.3))=\det((5.2)',(5.3)')=0,$$

и принимая во внимание соотношение $a_2b_2=a_1a_3$, приходим к уравнению

$$a_1^2-3a_1a_2+a_3^2=0.$$

Выражая из последнего уравнения a_3^2 и подставляя его в (5.5),(5.5)', получим $a_3=-1/3(\lambda_2/\lambda_1-1)a_1$. Теперь уравнения (5.6),(5.6)' выполняются автоматически в силу (7). В калибровке (2.1) из уравнения (5.2) с учётом равенства (7) и соотношения $a_2b_2=a_1a_3$ выразим a_2 и b_2 через a_1. Принимая во внимание, что λ_1 является корнем уравнения (7), в итоге получаем следующий окончательный вид решения для данного подслучая:

$$\begin{gathered}\lambda_1=(3\pm\sqrt{5})/6,\ a_1\neq0,\ a_2=a_1(9\lambda_1-7)/(12\lambda_1-1),\ a_3=a_1/(3\lambda_1),\ a_4=a_1,\\ b_1=-a_1/(3\lambda_1),\ b_2=a_1(3\lambda_1+1)/(9\lambda_1-7),\ b_3=-a_1,\ b_4=-a_1/(3\lambda_1).\end{gathered} \tag{8}$$

Покажем, что решение (8) с точностью до масштабных преобразований 1),2) (см. раздел 2) соотвествует известной интегрируемой системе Дринфельда-Соколова [9]:

$$U_t=(D^3+2(UD+DU))\frac{\partial H}{\partial U} = 4(8U_3-3V_3+48UU_1-12UV_1-6VU_1),$$
$$V_t=4(D^3+2(VD+DV))\frac{\partial H}{\partial V} = 8(V_3-6U_3+6VV_1-24VU_1-12UV_1),$$
$$H=16U^2+V^2-12UV.$$

Перепишем эту систему в матричном виде

$$\bar U_t = A\bar U + \bar F(\bar U),\quad \bar U=(U,V),\quad A=\begin{pmatrix} 32 & -12 \\ -48 & 8 \end{pmatrix},\quad \begin{aligned} F_1&=24(8UU_1-2UV_1-VU_1), \\ F_2&=48(VV_1-4VU_1-2UV_1). \end{aligned}$$

После диагонализующего преобразования

$$\bar U=B\bar u,\quad \bar u=(u,v),\quad B=\begin{pmatrix} 1 & (\sqrt5-1)/4 \\ 1-\sqrt5 & 1 \end{pmatrix}$$

рассматриваемая система принимает вид

$$\bar u_t=\Lambda\bar u + B^{-1}\bar F(B\bar u),\quad \Lambda=\mathrm{diag}(\Lambda_1,\Lambda_2),\quad \Lambda_{1,2}=4(5\pm3\sqrt5). \tag{9}$$

После преобразований $t\Rightarrow -i\sqrt5/120\ t$, $x\Rightarrow ix$, $u\Rightarrow -a_1u/2$, $v\Rightarrow a_1(1-\sqrt5)v/2$ система (9) переходит в систему (1) с коэффициентами (8) ■

(1.2) $a_3=a_4$, откуда в силу (5.1) следует $b_3=b_4$.

(1.2.1) Допустим, что $b_3=b_4=0$. Тогда из (5.4)' $a_2b_2=0$ и из (5.4) $a_1a_4=0$, что противоречит исходному предположению $a_1\neq0$, $a_4\neq0$ ■

(1.2.2) $b_3\neq0$. Так как $a_3\neq0$, то можно использовать калибровку (2.3). В этом случае из уравнений (5.5),(5.5)' следует $a_2b_2=a_3^2$. Далее, из уравнений (5.4),(5.4)' вытекают соотношения

$$a_1=\frac{7\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\,a_3,\quad b_1=\frac{7\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\,a_3.$$

Подставляя полученные равенства в (5.6),(5.6)' и накладывая калибровку (2.1), приходим к двум несовместным уравнениям, содержащим только λ_1. Случай (1.2) не имеет места ■

(2) $a_1\neq0$, $a_4=0$. В этом случае из (5.1) вытекает $a_3=0$, затем из (5.4) $a_2b_2=0$, из (5.4)' $b_1b_4=0$, из (5.1)' $b_1b_3=0$. Последние два равенства приводят к рассмотрению следующих подслучаев:

(2.1) $b_1\neq0$. Тогда $b_3=b_4=0$. Поскольку $a_2b_2=0$, то в силу (5.3)' получаем $a_2=b_2=0$, что даёт распадающуюся систему

$$\begin{aligned} u_t&=\lambda_1u_3+a_1uu_1, \\ v_t&=\lambda_2v_3+b_1vv_1, \end{aligned} \tag{10}$$

представляющую собой два несвязанных уравнения КдВ ■

(2.2) $b_1=0$. Соотношение $a_2b_2=0$ приводит к развилке:

(2.2.1) $a_2\neq0$, $b_2=0$. Линейная комбинация $\lambda_2\cdot$ (5.3) + $\lambda_1\cdot$ (5.2)' приводит к уравнению

$$(a_1-2b_3+b_4)(\lambda_2a_1+\lambda_1b_4)=0,$$

то есть к новому разветвлению:

(2.2.1.1) $b_4=2b_3-a_1$. Из (5.3) получаем $b_3=0$ и, соответственно, $b_4=-a_1$. Все уравнения (5) выполнены ■

(2.2.1.2) $b_4=-\lambda_2a_1/\lambda_1$, $b_4\neq2b_3-a_1$. Уравнение (5.3) даёт следующее соотношение на остальные параметры:

$$(\lambda_1-\lambda_2)^2a_1^2 - 12\lambda_1^2b_3^2 - 2\lambda_1(\lambda_1+2\lambda_2)a_1b_3=0, \tag{11}$$

при котором все уравнения (5) выполнены ■

(2.2.2) $a_2=0$. Уравнения (5) выполнены ■

(3) $a_1=0$, $a_4\neq0$. Из (5.1) и (5.1)' следует $b_3=b_4$ и $b_4(a_3-a_4)=0$. Если положить $b_4=0$, то при $b_1\neq0$ получим случай, "сопряженный" (т.е. совпадающий с точностью до замены $a_1\Leftrightarrow b_1$) с уже рассмотренным случаем (2.2), а при $b_1=0$ – случай, "сопряженный" случаю $a_1=a_4=0$, который будет рассматриваться ниже. Далее, пусть $b_4\neq0$. Тогда из (5.1)' заключаем, что $a_3=a_4$. В калибровке (2.3) из (5.5),(5,5)' $a_2b_2=a_3^2\neq0$, из (5.4) $\lambda_2=7\lambda_1$, а из (5.4)',(5.2) $b_1=a_2=-8a_3$. При этих значениях параметров $y_1=y_2=\bar y_1=0$. Тогда из (5.2)' с учётом $a_2\neq0$ должно следовать $\bar y_2=0$. Однако прямое вычисление показывает, что $\bar y_2=-6\lambda_1a_3b_2\neq0$. Таким образом, случай (3) не даёт новых решений ■

(4) $a_1=a_4=0$. Из уравнений (5.4),(5.4)' и (5.1) последовательно вытекают равенства $a_2b_2+a_3b_3=0$, $b_4(a_3+b_1)=0$, $b_1b_3=0$.

(4.1) Пусть $b_1=0$. Тогда (5.4)' приводит к $a_3b_4=0$, что порождает следующие альтернативы:

(4.1.1) $a_3=0$. Из (5.4) заключаем, что $a_2b_2=0$.

(4.1.1.1) $a_2=0$. Этот случай включается в (2.2.2) ■

(4.1.1.2) $a_2\neq0$, $b_2=0$. В соответствии с уравнениями (5.2)',(5.3) приходим ещё к двум подслучаям:

(4.1.1.2.1) $b_4=2b_3$. Все уравнения (5) выполнены ■

(4.1.1.2.2) $b_4\neq2b_3$. Из (5.2)' и (5.3) следует $\bar y_1=y_2=0$. Эти равенства с учётом $a_2\neq0$ дают $b_3=b_4=0$, что противоречит $b_4\neq2b_3$ ■

(4.1.2) $a_3\neq0$, что с учётом (5.4)' даёт $b_4=0$. Вид канонической плотности R_3 (3) приводит к дополнительному ветвлению:

(4.1.2.1) $y_1\neq0$ и/или $y_2\neq0$. Рассматривая уравнения (5.2),(5.3) как линейную систему относительно y_1,y_2 и приравняв нулю её определитель, получаем $a_2b_2=4a_3b_3$. Далее, из (5.4) $b_3=0$, т.е. $y_2=0$. Но тогда из уравнения (5.2) вытекает $y_1=0$, что противоречит сделанному предположению ■

(4.1.2.2) $y_1=y_2=0$. Равенство $y_1=0$ с учётом $a_3\neq 0$ даёт $b_2=0$, а уравнение (5.4) приводит к $b_3=0$. После "сопряжения" данный случай включается в уже рассмотренный случай **(4.1.1.1)** ■

(4.2) $b_1\neq 0$. Из уравнений (5.1)',(5.4) и (5.4)' последовательно вытекают равенства $b_3=0$, $a_2b_2=0$, $b_4(a_3+b_1)=0$.

(4.2.1) $b_4\neq 0$, $b_1=-a_3$. (5.5) и (5.5)' в калибровке (2.1) дают противоречивые уравнения на λ_1 ■

(4.2.2) $b_4=0$. Если $b_2=0$, то приходим к случаю, который после "сопряжения" включается в **(2.2.2)**. Если же $b_2\neq 0$, то $a_2=0$, что приводит к уравнению $y_2=0$, которое с учётом (5.2) даёт $a_3=0$. В этом случае (5.3)' выполняется лишь при условии $b_1b_2=0$, что противоречит сделанным предположениям. Случай **(4.2.2)** не приводит к новым решениям ■

5. Анализ высших условий интегрируемости

Выпишем все решения системы (5), кроме решения (8) и тривиального решения в случае (2.1) (оба отвечают интегрируемым системам):

(4.1.1.2.1)	$a_1=a_3=a_4=b_1=b_2=0,\ a_2\neq 0,\ b_4=2b_3,$	(12.1)
(2.2.1.2)	$a_3=a_4=b_1=b_2=0,\ a_1\neq 0, a_2\neq 0,\ b_4=-(\lambda_2/\lambda_1)a_1,$	(12.2)
	$(\lambda_1-\lambda_2)^2a_1^2-12\lambda_1b_3^2-2\lambda_1^2(\lambda_1+2\lambda_2)a_1b_3=0,$	
(2.2.1.1)	$a_3=a_4=b_1=b_2=b_3=0,\ a_1\neq 0,\ a_2\neq 0,\ b_4=-a_1,$	(12.3)
(2.2.2)	$a_2=a_3=a_4=b_1=0.$	(12.4)

Для каждого из 4-х типов эволюционных систем семейства (1) с параметрами (12.1)-(12.4) на ЭВМ были полностью просчитаны условия интегрируемости (4) с $i=5$, что привело к дополнительным полиномиальным уравнениям на свободные параметры. Рассмотрим их в каждом из 4-х случаев.

(12.1). Одно из уравнений, вытекающих из условия $(\bar{R}_5)_t\in \mathrm{Im}D$, имеет вид

$$108\lambda_1\lambda_2b_3^3a_2(\lambda_2-\lambda_1)=0.$$

С учётом $a_2\neq 0$ и ограничений на λ_1,λ_2 в (1) получаем $b_3=0$, т.е. все b_i в (1) равны нулю. Поскольку второе уравнение системы (1) - линейное, мы исключаем этот случай из дальнейшего рассмотрения (см.сноску на стр.2) ■

(12.2). Из условий $(R_5,\bar{R}_5)_t\in \mathrm{Im}D$ получаем ещё четыре уравнения

той же структуры, что и (11),

$$c_1a_1^2+c_2a_1b_3+c_3b_3^2=0,\quad c_i=c_i(\lambda_1,\lambda_2),$$

явный вид которых мы не приводим ввиду громоздкости. Так как $a_1\neq 0$, то эти линейные относительно a_1^2, a_1b_3, b_3^2 системы должны иметь нетривиальное решение. Рассматривая в калибровке (2.1) различные тройки из полученных уравнений, приравнивая нулю их определители (зависящие только от λ_1) и вычисляя попарно НОД этих определителей, найдём, что во всех случаях НОД=1 (на практике достаточно получить хотя бы один такой НОД). Решение (12.2) соответствует неинтегрируемой системе ■

(12.3). В этом случае условие $(R_5)_t\in \mathrm{Im}D$ выполняется автоматически, а из условия $(\bar{R}_5)_t\in \mathrm{Im}D$ возникает *единственное* уравнение на параметры

$$-3a_1^2a_2(\lambda_1-\lambda_2)^2(2\lambda_1+\lambda_2)=0,$$

откуда следует, что $2\lambda_1+\lambda_2=0$. Принимая во внимание калибровку (2.1), находим $\lambda_1=1/3$, $\lambda_2=-2/3$. В следующем разделе мы покажем, что полученное решение соответствует известной интегрируемой системе Хироты-Сатцумы [10] ■

(12.4). Для этого, требующего наибольшего объёма вычислений, случая учёт высших условий интегрируемости даёт:

$(R_5)_t\in \mathrm{Im}D, (\bar{R}_5)_t\in \mathrm{Im}D \Rightarrow$ единственное уравнение

$$e_5\equiv -2b_4^3\lambda_1+(3b_4^2\lambda_1-2b_4^2-6\lambda_1b_3b_4+6b_3b_4+6b_3^2\lambda_1-6b_3^2)a_1-\lambda_1b_4a_1^2=0$$

$(R_6,\bar{R}_6,R_7)\in \mathrm{Im}D$ - выполняются автоматически,

$(\bar{R}_7)_t\in \mathrm{Im}D$ - приводит к следующим двум уравнениям:

$$e_{71}=18b_4^3\lambda_1^2-9b_4^3\lambda_1-18b_4^2b_3\lambda_1^2+18b_4^2b_3\lambda_1+18b_4b_3^2\lambda_1^2-18b_4b_3^2\lambda_1+$$
$$a_1(-27b_4^2\lambda_1^2+24b_4^2\lambda_1-5b_4^2+63b_4b_3\lambda_1^2-78b_3b_4\lambda_1+15b_4b_3-63b_3^2\lambda_1^2+78b_3^2\lambda_1-$$
$$15b_3^2)+9b_4\lambda_1^2a_1^2=0.$$

$$e_{72}=-8\lambda_1b_4^4+a_1(12b_3b_4^2-12\lambda_1b_3b_4^2-12b_3^2b_4+12\lambda_1b_3^2b_4-6b_4^3+6\lambda_1b_4^3)+$$
$$+a_1^2(18b_3b_4-18\lambda_1b_3b_4-18b_3^2+18\lambda_1b_3^2-4b_4^2+5\lambda_1b_4^2)-3a_1^3b_4\lambda_1.$$

$(\bar{R}_8)_t\in \mathrm{Im}D$ даёт некоторое уравнение $e_8=0$, вместо которого удобно рассматривать следующую линейную комбинацию

$$e_8'=\frac{e_8-e_5}{2}=a_1b_3b_4+3(\lambda_1-1)a_1b_3^2+(3\lambda_1-5)b_3b_4^2-\lambda_1a_1^2b_3+15(1-\lambda_1)b_3^2b_4+$$
$$10(\lambda_1-1)b_3^3=0.$$

Будем считать $a_1\neq 0$. В противном случае, как и в (12.1), мы имеем систему (1), у которой одно из уравнений - линейное (в данном случае - первое). За счёт растяжения $u \to \mu u$ мы вправе положить $a_1=1$. Для дальнейшего счёта мы использовали встроенные в систему REDUCE команды вычисления результанта двух полиномов относительно заданной переменной и разложения полиномов на неприводимые множители над полем рациональных чисел. Исключим из уравнений e_5, e_{71}, e_{72} переменные λ_1, b_3:

$$\begin{aligned}&\mathrm{res}_{b_3}[\mathrm{res}_{\lambda_1}(e_5,e_{71}),\mathrm{res}_{\lambda_1}(e_5,e_{72})]=\\ &20736\cdot b_4^4(2b_4^2-b_4+1)^4(2b_4-1)^2(b_4+1)^2(b_4-1)^2=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Это вычисление (вместе с разложением на множители потребовало ≈30 с времени ЕС-1061. Из структуры уравнения (13) вытекают следующие альтернативные возможности для параметра b_4:

(12.4.1) $b_4=1$. Тогда из уравнения $e_5=0$ получаем

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{3b_3(b_3-1)}, \quad b_3\neq 0,\ b_3\neq 1.$$

Уравнения $e_{71}=e_{72}=0$ выполняются автоматически, а $e_8'=0$ даёт условие $(2b_3-1)(b_3-1)=0$, откуда заключаем, что $b_3=1/2$ и $\lambda_1=-1/3$. Дальнейший анализ содержится в следующем разделе ■

(12.4.2) $b_4=-1$. Уравнение $e_5=0$ позволяет найти λ_1:

$$\lambda_1=\frac{3b_3^2+3b_3+1}{3(b_3^2+b_3+1)}.$$

Подставляя это выражение в остальные уравнения, найдём

$$e_{71}=0 \Rightarrow b_3(b_3+1)(3b_3^2+3b_3+1)=0,$$

$$e_{72}=0 \to b_3(b_3+1)=0,$$

$$e_8'=0 \to (b_3+1)(2b_3+1)=0.$$

Отсюда следует, что $b_3=-1$ и, соответственно, $\lambda_1=1/3$, $\lambda_2=-2/3$. Дальнейшие заключения об этом случае содержатся в следующем разделе ■

(12.4.3) $b_4=1/2$. Из уравнения $e_5=0$ имеем

$$\lambda_1=\frac{12b_3^2-6b_3+1}{6b_3(2b_3-1)}.$$

Подстановка значений b_4 и λ_1 в выражение e_{72} даёт $e_{72}=1/4$, что противоречит условию $e_{72}=0$ ■

(12.4.4) Пусть теперь b_4 является корнем уравнения $2b_4^2-b_4+1=0$. Подставляя $b_4^2=(b_4-1)/2$ и исключая из уравнений $e_5=e_{71}=e_{72}=e_8'=0$ переменные b_3 и b_4, найдем

$$\begin{aligned}&\text{НОД}[\mathrm{res}_{b_4}[\mathrm{res}_{b_3}(e_{71},e_8'),\mathrm{res}_{b_3}(e_{72},e_8')],\\ &\quad \mathrm{res}_{b_4}[\mathrm{res}_{b_3}(e_5,e_8'),\mathrm{res}_{b_3}(e_{71},e_8')]]=1024(\lambda_1-1)^4=0.\end{aligned}$$

Но $\lambda_1\neq 0$ в силу принятой нами калибровки (2.1) и ограничений на λ_1,λ_2 в (1). Следовательно, данный случай не имеет места ■

(12.4.5) $b_4=0$. Тогда из уравнения $e_5=0$ получаем $b_3=0$, после чего уравнения $e_{71}=e_{72}=e_8'=0$ также удовлетворяются. Ниже показано, что данное решение, как и решение **(12.1)**, приводит к системе, одно из уравнений которой линейное, т.е. исключается из нашей классификации ■

6. Список интегрируемых нелинейных систем

В предыдущем разделе мы нашли всех нелинейных представителей семейства (1), соответствующих решениям (12.1)-(12.4) системы полиномиальных уравнений (5) и удовлетворяющих дополнительным уравнениям, вытекающим из высших условий интегрируемости. Эти представители соответствуют следующим значениям параметров семейства (1):

$$a_3=a_4=b_1=b_2=b_3=0,\ a_1\neq 0,\ a_2\neq 0,\ b_4=-a_1,\ \lambda_1=1/3,\ \lambda_2=-2/3, \tag{14.1}$$

$$a_2=a_3=a_4=b_1=0,\ a_1=1,\ b_3=1/2,\ b_4=1,\ \lambda_1=-1/3,\ \lambda_2=-4/3, \tag{14.2}$$

$$a_2=a_3=a_4=b_1=0,\ a_1=1,\ b_3=b_4=-1,\ \lambda_1=1/3,\ \lambda_2=-2/3, \tag{14.3}$$

$$a_2=a_3=a_4=b_1=b_3=b_4=0,\ a_1=1,\ \lambda_2=\lambda_1-1,\ \lambda_1\in\mathbb{C}. \tag{14.4}$$

Рассмотрим отдельно каждое из этих решений.

(14.1) Легко видеть, что соответствующая система семейства (1)

$$\begin{aligned}u_t&=1/3\ u_3+a_1uu_1+a_2vv_1,\\ v_t&=-2/3\ v_3-a_1uv_1,\qquad a_1,a_2\in\mathbb{C}\ \text{и}\ a_1\neq 0,\ a_2\neq 0\end{aligned}$$

с точностью до масштабных преобразований 1),2) (см. раздел 2) совпадает с известной интегрируемой системой Хироты-Сатцумы [10]

$$\begin{aligned}u_t&=u_3+uu_1+vv_1,\\ v_t&=-2v_3-uv_1.\end{aligned} \tag{15}$$

(14.2) В этом случае мы имеем систему

$$\begin{aligned}u_t&=-1/3\ u_3+uu_1,\\ v_t&=-4/3\ v_3+b_2uu_1+1/2\ vu_1+uv_1,\quad b_2\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

При $b_2=0$ она совпадает (вновь с точностью до масштабных преобразований) с интегрируемой системой

$$u_t=u_3+uu_1,\qquad v_t=4v_3+1/2\ vu_1+uv_1, \tag{16}$$

найденной в работе [4]. Расчёт на ЭВМ показывает, что при произвольном b_2 условия $(R_i,\bar{R}_i)_t \in \mathrm{Im}D$ для $i=9\div15$ выполняются автоматически (нет сомнения, что более высокие условия также будут выполняться при произвольных b_2). Однако симметрии четвертого и более высоких порядков существуют только при $b_2=0$. Явный вид симметрии 5-го порядка приведён в работах [4,5]. Следовательно, в данном случае существует только одна интегрируемая система (16).

(14.3) Эволюционная система, соответствующая этому решению, имеет вид

$$u_t=1/3\ u_3+uu_1,\qquad v_t=-2/3\ v_3+b_2uu_1-vu_1-uv_1,\quad b_2\in\mathbb{C}.$$

Всё, что сказано в предыдущем случае относительно коэффициента b_2, справедливо и для данной системы. Поэтому мы должны положить $b_2=0$. Очевидное масштабное преобразование позволяет переписать полученную систему

$$u_t=u_3+uu_1,\qquad v_t=-2v_3-vu_1-uv_1. \tag{17}$$

Тот факт, что эта система интегрируема, вытекает из существования у нее высших симметрий, одна из которых (5-го порядка) выписана в работе [5].

(14.4) Выпишем эволюционную систему для данного случая

$$u_t=\lambda_1u_3+uu_1,\qquad v_t=(\lambda_1-1)v_3+b_2uu_1,\quad \lambda_1,b_2\in\mathbb{C}.$$

Преобразование переменных $(u,v)\Rightarrow(u,V)$, где $V=v-b_2u$ переводит эту систему в систему

$$u_t=\lambda_1u_3+uu_1,\qquad V_t=(\lambda_1-1)V_3-b_2u_3,$$

у которой второе уравнение-линейное. Поэтому мы исключаем данный случай из нашей классификации (см. примечание на стр.2).

Таким образом, мы нашли все решения системы полиномиальных уравнений на параметры семейства (1), соответствующего интегрируемым нелинейным уравнениям типа связанного уравнения КдВ. Полный список таких уравнений исчерпывается уравнениями (9),(10),(15)-(17).

Авторы благодарят С.И.Свинолупова за полезное обсуждение вопросов, затронутых в настоящей работе.

Литература

1. Михайлов А.В.,Шабат А.Б.,Ямилов Р.И. Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем. УМН,т.42,вып.4,с.3-53,1987.
2. Гердт В.П.,Жарков А.Ю.,Швачка А.Б. Классификация интегрируемых уравнений высших порядков типа уравнений Кортевега-де Вриза. Препринт ОИЯИ Р5-84-489,Дубна,1984.
3. Гердт В.П.,Жарков А.Ю. Классификация на ЭВМ интегрируемых уравнений седьмого порядка типа модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза. Препринт ОИЯИ Р5-86-371,Дубна,1986.
4. Гердт В.П.,Жарков А.Ю.,Свинолупов С.И.,Шабат А.Б.Применение компьютерной алгебры для исследования интегрируемости нелинейных эволюционных систем.ЖВМ и МФ,т.28,№11,с.1674-1684,1988.
5. Gerdt V.P., Zharkov A.Yu. Computer Classification of Integrable Coupled KdV-Like Systems. Preprint JINR E5-89-232,Dubna,1989.
6. Caviness B.F. Computer Algebra: Past and Future. J.Symb.Comp., v.2, №3,pp.217-236,1986.
   Kobayashi H., Fujise T., Furukawa A. Solving Systems of Algebraic Equations by a General Elimination Method. J.Symb.Comp.,v.5, №3,pp. 303-320,1988.
7. Бухбергер Б. Базисы Грёбнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов. В кн.: Компьютерная алгебра.Символьные и алгебраические вычисления. М.,Мир,с.331-372,1986.
   Boege W.,Gebauer R.,Kredel H. Some Examples for Solving Systems of Algebraic Equations by Calculating Groebner Bases.J.Symb.Comp.,v.2, №1,pp.83-98,1986.
8. Гердт В.П.,Тарасов О.В.,Ширков Д.В. Применение систем для аналитических вычислений в физике высоких энергий. В трудах Международной школы по вопросам применения ЭВМ в физических исследованиях (Дубна, 28 ноября - 3 декабря 1988г.). ОИЯИ Д10-89-70,с.134-178,Дубна,1989.
9. Дринфельд В.Г.,Соколов В.В. Алгебра Ли и уравнения типа Кортевега-де Фриза. В кн.: Итоги науки и техники, "Современные проблемы математики". М.,ВИНИТИ,т.24,с.81-180.,1984.
10. Hirota R.,Satsuma J. Soliton Solutions of a Coupled Korteveg-de Vries Equation.Phys.Lett.,85A,pp.407-408,1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1989 года.