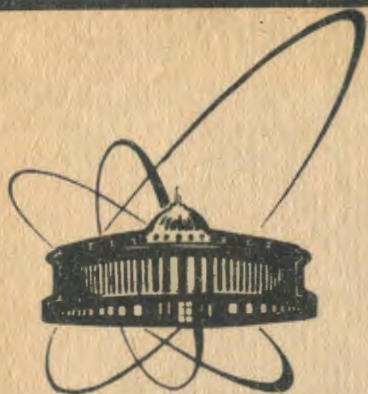


89-173



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

e  
+

Б 869

P5-89-173

Т.Л.Бояджиев, Д.В.Павлов, И.В.Пузынин

ВЫЧИСЛЕНИЕ БИФУРКАЦИЙ  
УСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ  
В ДВУХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ  
ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ

1989

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время большое внимание уделяется проблеме сверхпроводимости, в частности джозефсоновским контактам. В цикле работ <sup>/1-5/</sup> рассматриваются математические модели и расчеты характеристик однослойных джозефсоновских переходов с микронеоднородностями. Аналогичная методика применена в представляемой работе для двухслойного перехода.

Рассмотрим систему, состоящую из двух джозефсоновских контактов длины  $2R$ , в первом из которых имеется неоднородность ширины  $\mu$ . Если переходы находятся на расстоянии, меньшем, чем радиус корреляции куперовских пар, то переходы оказываются связанными <sup>/6/</sup>. Такая система описывается функциями  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$ , которые являются распределениями магнитного потока соответственно вдоль первого и второго переходов и удовлетворяют следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений с граничными условиями второго рода:

$$\phi_1'' + \alpha \phi_2'' = j_D(x) \sin \phi_1 + \gamma(x), \quad (1.1)$$

$$\phi_2'' + \alpha \phi_1'' = \sin \phi_2 + \gamma(x), \quad (1.2)$$

$$\phi_1'(\pm R) = h_0, \quad (1.3)$$

$$\phi_2'(\pm R) = h_0, \quad (1.4)$$

где  $\alpha$  — константа связи между переходами,  $0 \leq \alpha < 1$ ;  $j_D(x)$  — заданная функция, моделирующая неоднородность ширины  $\mu$  в первом джозефсоновском переходе <sup>/2/</sup>,  $j_D(x) = 1 - \operatorname{sech}^2\left(\frac{2}{\mu}x\right)$ ;  $\gamma(x)$  — плотность внешнего тока, согласно модели, предложенной в <sup>/4/</sup>,

$$\gamma(x) = \frac{2R\gamma}{\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\delta}{R}} (R^2 + \delta^2 - x^2)^{1/2};$$

здесь  $\gamma$  — средняя плотность тока, а  $\delta$  — параметр,  $\delta \ll R$ .

Величина  $h_0$  представляет собой значение магнитного поля на концах перехода.

Устойчивость или неустойчивость решения  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  задачи (1.1-4) определяется знаком минимального собственного числа  $\lambda_{\min}$  спектральной задачи, порожденной этим решением:

$$-\psi_1'' - \alpha\psi_2'' + j_D(x) \cos \phi_1 \psi_1 = \lambda \psi_1, \quad (1.5)$$

$$-\psi_2'' - \alpha\psi_1'' + \cos \phi_2 \psi_2 = \lambda \psi_2, \quad (1.6)$$

$$\psi_1'(\pm R) = 0, \quad (1.7)$$

$$\psi_2'(\pm R) = 0. \quad (1.8)$$

При  $\lambda_{\min} > 0$  решение устойчиво, при  $\lambda_{\min} < 0$  — неустойчиво. Случай  $\lambda_{\min} = 0$  соответствует бифуркации решения.

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Пусть геометрические параметры джозефсоновских переходов  $R, \mu, \delta$  зафиксированы, а также будем считать заданными величинами  $\gamma, \lambda$ . Рассмотрим функцию

$$F(z) = \begin{cases} -\phi_1'' - \alpha\phi_2'' + j_D(x) \sin \phi_1 + \gamma(x), \\ -\phi_2'' - \alpha\phi_1'' + \sin \phi_2 + \gamma(x), \\ \phi_1'(\pm R) - h_0, \\ \phi_2'(\pm R) - h_0, \\ -\psi_1'' - \alpha\psi_2'' + (j_D(x) \cos \phi_1 - \lambda) \psi_1, \\ -\psi_2'' - \alpha\psi_1'' + (\cos \phi_2 - \lambda) \psi_2, \\ \psi_1'(\pm R), \\ \psi_2'(\pm R), \end{cases}$$

где переменная  $z = (\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2, h_0)$ . Основная идея /4, 5/ заключается в рассмотрении уравнения

$$F(z) = 0 \quad (2.1)$$

как нелинейной задачи на собственные значения со спектральным параметром  $h_0$ . Будем искать решение  $z^*$  в классе функций, удовлетворяющих условию нормировки собственной функции первого джоузефсоновского перехода

$$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle \equiv \int_{-R}^R \psi_1^2(x) dx = 1. \quad (2.2)$$

Предположим, что такое решение существует и является изолированным. Тогда для отыскания  $z^*$  будем использовать непрерывный аналог метода Ньютона [7,8]. Параметризуем  $z$  в (2.1) непрерывным параметром  $t$ :  $z = z(t)$ ,  $0 \leq t < +\infty$  и рассмотрим эволюционный процесс

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} + F(z(t)) = 0, \\ z(0) = z_0, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

где через  $F'(z)$  обозначена производная Фреше оператора  $F(z)$ , а  $z_0$  есть начальное приближение к искомому решению. При условии непрерывности функции  $F(z)$  и  $F'(z)$ , а также ограниченности  $F'(z)^{-1}$  в некоторой окрестности точки  $z^*$  функция  $z(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  сходится с точным решением  $z^*$ .

Дискретизация уравнения (2.3) проведена по явной схеме Эйлера с переменным шагом. Выбор итерационного шага делается способом, предложенным в [9]. На  $k$ -й итерации при известном значении переменной  $z^k$ , решая линейную задачу,

$$F'(z^k) w^k + F(z^k) = 0, \quad (2.5)$$

ищут приращение  $w^k$ . Следующее приближение находится по формуле

$$z^{k+1} = z^k + \tau_k w^k.$$

Оптимальный шаг

$$\tau_k = \begin{cases} 0,1, & \frac{\delta(0)}{\delta(0) + \delta(1)} \leq 0,1, \\ \frac{\delta(0)}{\delta(0) + \delta(1)}, & \\ 1, & \frac{\delta(0)}{\delta(0) + \delta(1)} \geq 0,97, \end{cases}$$

где  $\delta(\tau) = \|F(z^k + \tau w^k)\|^2 = \langle F(z^k + \tau w^k), F(z^k + \tau w^k) \rangle$ .

Приведем подробную запись соотношений (2.5); при этом приращение обозначим через

$$w^k = (f_1^k, f_2^k, p_1^k, p_2^k, g^k),$$

а известный вектор

$$z^k = (\phi_1^k, \phi_2^k, \psi_1^k, \psi_2^k, h_0^k)$$

(для упрощения записи в дальнейшем индекс  $k$  итерации опускаем)

$$(f_1 + \alpha f_2 + \phi_1 + \alpha \phi_2)'' = j_D \cos \phi_1 f_1 + j_D \sin \phi_1 + \gamma(x) = 0, \quad (2.6)$$

$$(f_2 + \alpha f_1 + \phi_2 + \alpha \phi_1)'' = \cos \phi_2 f_2 + \sin \phi_2 + \gamma(x) = 0, \quad (2.7)$$

$$(f_1 + \phi_1)'(\pm R) = g + h_0, \quad (2.8)$$

$$(f_2 + \phi_2)'(\pm R) = g + h_0, \quad (2.9)$$

$$(p_1 + \alpha p_2 + \psi_1 + \alpha \psi_2)'' = (j_D \cos \phi_1 - \lambda) p_1 - \\ - j_D \sin \phi_1 \psi_1 f_1 + (j_D \cos \phi_1 - \lambda) \psi_1 = 0, \quad (2.10)$$

$$(p_2 + \alpha p_1 + \psi_2 + \alpha \psi_1)'' = (\cos \phi_2 - \lambda) p_2 - \\ - \sin \phi_2 \psi_2 f_2 + (\cos \phi_2 - \lambda) \psi_2 = 0, \quad (2.11)$$

$$(p_1 + \psi_1)'(\pm R) = 0, \quad (2.12)$$

$$(p_2 + \psi_2)'(\pm R) = 0. \quad (2.13)$$

Сюда надо добавить также соотношение ортогональности

$$\langle \psi_1, p_1 \rangle = 0, \quad (2.14)$$

вытекающее из условия кормировки (2.2).

Для решения системы (2.6-14) воспользуемся "методом окаймления" — будем искать решение в виде

$$\begin{cases} f_1(x) = a_1(x) + g b_1(x), \\ f_2(x) = a_2(x) + g b_2(x), \\ p_1(x) = c_1(x) + g d_1(x), \\ p_2(x) = c_2(x) + g d_2(x). \end{cases} \quad (2.15)$$

Для новых неизвестных функций  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$  получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 (a_1 + \alpha a_2 + \phi_1 + \alpha \phi_2)'' &= j_D \cos \phi_1 a_1 + j_D \sin \phi_1 + \gamma(x), \\
 (a_2 + \alpha a_1 + \phi_2 + \alpha \phi_1)'' &= \cos \phi_2 a_2 + \sin \phi_2 + \gamma(x), \\
 (a_1 + \phi_1)'(\pm R) &= 0, \\
 (a_2 + \phi_2)'(\pm R) &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 (b_1 + \alpha b_2)'' &= j_D \cos \phi_1 b_1, \\
 (b_2 + \alpha b_1)'' &= \cos \phi_2 b_2 \\
 b_1'(\pm R) &= 1, \\
 b_2'(\pm R) &= 1,
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
 (c_1 + \alpha c_2 + \psi_1 + \alpha \psi_2)'' &= (j_D \cos \phi_1 - \lambda) c_1 - \\
 &\quad - j_D \sin \phi_1 \psi_1 a_1 + (j_D \cos \phi_1 - \lambda) \psi_1, \\
 (c_2 + \alpha c_1 + \psi_2 + \alpha \psi_1)'' &= (\cos \phi_2 - \lambda) c_2 - \\
 &\quad - \sin \phi_2 \psi_2 a_2 + (\cos \phi_2 - \lambda) \psi_2,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$(c_1 + \psi_1)'(\pm R) = 0,$$

$$(c_2 + \psi_2)'(\pm R) = 0,$$

$$(d_1 + \alpha d_2)'' = (j_D \cos \phi_1 - \lambda) d_1 - j_D \sin \phi_1 \psi_1 b_1,$$

$$(d_2 + \alpha d_1)'' = (\cos \phi_2 - \lambda) d_2 - \sin \phi_2 \psi_2 b_2, \tag{2.19}$$

$$d_1'(\pm R) = 0,$$

$$d_2'(\pm R) = 0.$$

Приращение  $g$  находится так:

$$g = - \langle c_1, \psi_1 \rangle / \langle d_1, \psi_1 \rangle . \quad (2.20)$$

Таким образом, замена (2.15) позволяет свести задачу о вычислении приращений функций к решению четырех граничных задач с попарно одинаковыми дифференциальными операторами и разными правыми частями.

### 3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных  $u(x)$ ,  $v(x)$ :

$$\begin{cases} u'' + \alpha v'' = q_1(x)u + r_1(x), & (3.1) \\ v'' + \alpha u'' = q_2(x)v + r_2(x), & -R \leq x \leq R, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} u'(\pm R) = s_1, & (3.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'(\pm R) = s_2, & (3.4) \end{cases}$$

считая  $q_1(x)$ ,  $q_2(x)$ ,  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$ ,  $\alpha$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  известными. К аналогичному виду путем простого переобозначения приводится любая из граничных задач (2.16-19). Для численного решения введем на интервале  $[-R, R]$  равномерную сетку

$$\omega = \{x_i, i = 0, 1, 2, \dots, N; x_0 = -R, x_N = R\}$$

с шагом  $h = 2R/N$ . Для произвольной функции  $f(x)$  через  $f_i$  обозначим

$$f_i = f(x_i).$$

Для аппроксимации уравнений (3.1-2) во внутренних узлах сетки  $\omega$  применяем формулы неявного численного дифференцирования

$$y_i'' = D y_i^{(2)} - T y_i + O(h^4), \quad (3.5)$$

где

$$D y_i^{(2)} = \frac{1}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}); \quad T y_i = \frac{1}{12} (y_{i-1} + 10y_i + y_{i+1}).$$

В правых частях формулы (3.5)  $M_i$  найдем из равенства

$$M_i = q_i y_i + r_i,$$

которое считаем справедливым во всех внутренних точках сетки  $\omega$ .

Граничные условия (3.3-4) для численного решения заменим при помощи формул

$$y'_0 = \frac{1}{12h} (-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + O(h^4),$$

$$y'_N = \frac{1}{12h} (25y_N - 48y_{N-1} + 36y_{N-2} - 16y_{N-3} + 3y_{N-4}) + O(h^4).$$

Проведенная аппроксимация имеет четвертый порядок по шагу сетки.

Итак, после дискретизации задачи (3.1-4) приходим к системе линейных уравнений относительно неизвестных

$$u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{N-1}, v_{N-1}, u_N, v_N.$$

Далее при помощи седьмого и восьмого уравнений линейной системы, в которые входят неизвестные  $u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4$ , исключим из первого и второго уравнений, получающихся из граничных условий в точке  $x = -R$ , неизвестные  $u_4, v_4$ . А потом, используя пятое и шестое уравнения с неизвестными  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ , исключим из первых двух уравнений  $u_3, v_3$ . Затем из последних двух уравнений системы, аппроксимирующих граничные условия в точке  $x = R$ , аналогично исключим  $u_{N-4}, v_{N-4}, u_{N-3}, v_{N-3}$ . После этих преобразований матрица линейной системы будет состоять из блоков одинакового размера: высоты 2 и ширины 6. Такая матрица известным способом приводится к верхнему треугольному виду<sup>11/</sup>. Заметим, что матрицы линейных задач у пар задач для  $a_1, a_2$  и  $b_1, b_2$ , а также  $c_1, c_2$  и  $d_1, d_2$  одинаковы, отличаются лишь векторы правых частей. Поэтому для четырех задач необходимо только дважды провести операции приведения матрицы линейной системы к треугольному виду.

В формулу (2.20) для приращения  $g$  входят интегралы, которые вычисляются по формуле Симпсона.

Задание собственного числа  $\lambda > 0$  не означает того, что заданное  $\lambda$  будет минимальным в наборе собственных чисел: заданное  $\lambda$  может оказаться вторым, третьим, ...,  $n$ -м собственным значением. Для одно-



слояного перехода /4, 5/ минимальность  $\lambda$  проверяется достаточно просто при помощи осцилляционной теоремы. В рассматриваемом случае необходимая проверка минимальности заданного собственного числа  $\lambda$  проводится следующим образом. В уравнениях (1.5-8) перейдем к новым неизвестным функциям  $\xi(\mathbf{x})$ ,  $\eta(\mathbf{x})$ ,

$$\xi(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x}) + \psi_2(\mathbf{x}), \quad \eta(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x}) - \psi_2(\mathbf{x}).$$

Тогда система относительно  $\xi(\mathbf{x})$ ,  $\eta(\mathbf{x})$  будет выглядеть так:

$$\xi'' = \frac{1}{2(1+\alpha)} (j_D \cos \phi_1 + \cos \phi_2) \xi + \frac{1}{2(1+\alpha)} (j_D \cos \phi_1 - \cos \phi_2) \eta - \lambda \xi,$$

$$\eta'' = \frac{1}{2(1-\alpha)} (j_D \cos \phi_1 - \cos \phi_2) \xi + \frac{1}{2(1+\alpha)} (j_D \cos \phi_1 + \cos \phi_2) \eta - \lambda \eta,$$

$$\xi'(\pm R) = 0, \tag{3.6}$$

$$\eta'(\pm R) = 0.$$

Аппроксимируя получившуюся систему на сетке  $\omega$  со вторым порядком аппроксимации по шагу сетки, получим линейную систему относительно неизвестных

$$\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_{N-1}, \eta_{N-1}, \xi_N, \eta_N.$$

Матрица линейной системы пятидиагональна и, следовательно, может быть легко проверена на положительную определенность при помощи LU-разложения. Требование положительной определенности дискретизированной задачи (3.6) эквивалентно требованию минимальности заданного собственного числа  $\lambda$ :  $\lambda_{\min} = \lambda$ .

#### 4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В ходе численного эксперимента исследовались джоузефсоновские переходы длин  $2R = 10$  и с размером неоднородности на первом переходе  $\mu = 1$ . Для расчетов бралась сетка с шагом  $h=0,1$ , параметр  $\delta$  в распределении тока считался равным  $0,2$ . Искались устойчивые решения

вблизи точки бифуркации, принималось значение минимального собственного числа  $-0,05$ .

В качестве начальных приближений брались либо флюксон, либо константа, в зависимости от конкретных условий.

Естественно, что в системе из двух джозефсоновских переходов существуют так называемые мейсснеровские решения — такие распределения магнитного потока, когда поле проникает в переходы только на длины, сравнимые с лондоновской длиной. Оказалось, что влияние величины константы связи  $\alpha$  на критические кривые, то есть зависимость  $\gamma(h_0)$  при заданном собственном значении  $\lambda > 0$ , близком к нулю, слабое.

Обнаружены решения следующего вида: в переходе с неоднородностью магнитное поле локализовано на микро неоднородности; в однородном переходе наблюдается похожее распределение магнитного поля (рис.1), но смещенное от центра. (Напомним, что если функция  $\phi(x)$  — распределение магнитного потока, то  $\phi'(x)$  — значение магнитного поля в точке с координатой  $x$ ). Проведен анализ влияния константы связи на критические кривые для таких решений. При  $\alpha$ , близких к нулю, подобные состояния существуют лишь в узкой "щели" в плоскости  $(\gamma, h_0)$ . При увеличении константы связи область существования аналогичных распределений магнитного поля расширяется при ненулевых токах через переход. В окрестности точки  $\alpha = 0,192$  кривая  $\gamma(h_0)$  касается оси  $\gamma = 0$  и при дальнейшем увеличении константы связи пересекает ее, пере-

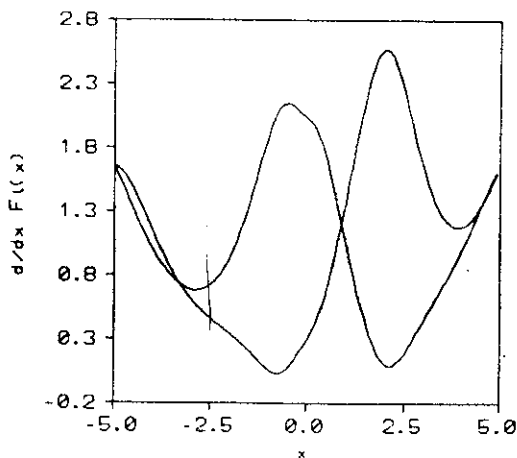


Рис. 1

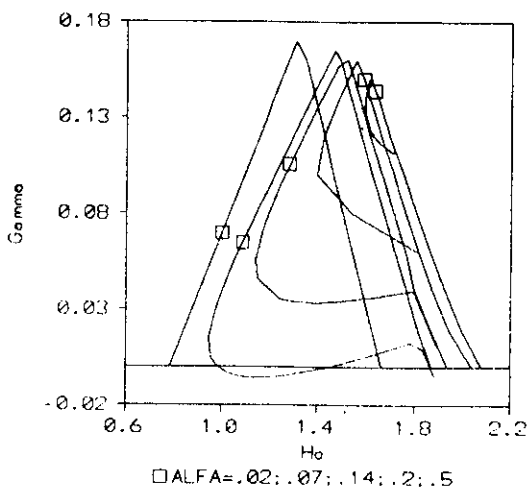


Рис. 2

ходя в кривую, соединяющую две точки на оси  $\gamma = 0$  (рис.2). Отметим, что критические кривые при всех допустимых  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ) для этого типа решений не пересекают ось  $h_0 = 0$ , то есть такие конфигурации существуют в достаточно больших магнитных полях. Отсюда можно сделать вывод, что солитон на неоднородности отталкивает солитон в однородном переходе, но большое магнитное поле на краях перехода не дает "развалиться" устойчивому состоянию при всех значениях константы связи  $\alpha$ .

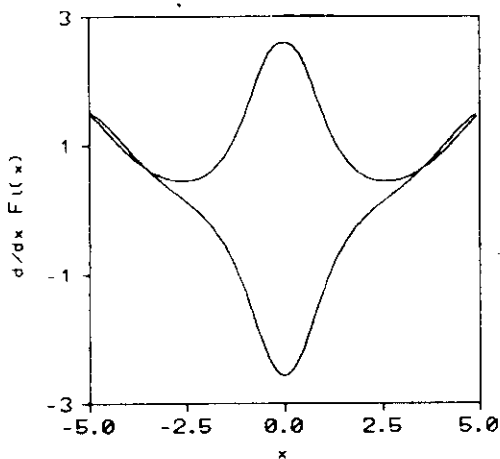


Рис. 3

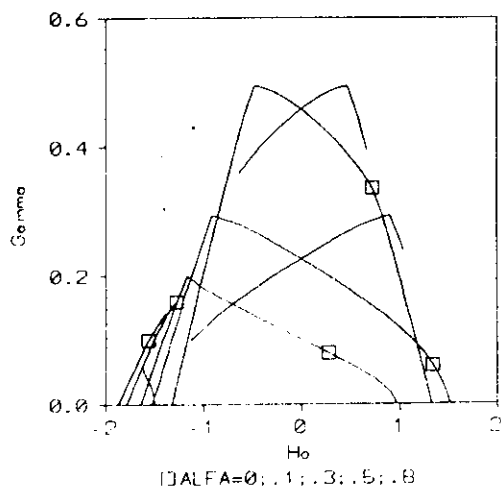


Рис. 4

Теперь можно предположить, что в двухслойном джозефсоновском переходе существуют решения и такого типа: в первом переходе на неоднородности сосредоточено магнитное поле (солитон), а в центре однородного перехода также локализовано магнитное поле, но обратного знака (антисолитон). Такие распределения магнитного поля (рис.3) должны притягиваться. Численный эксперимент подтвердил выдвинутое предположение. При  $\alpha = 0$  область существования решения солитон — антисолитон очень мала ("щель"). Увеличение константы связи влечет за собой области существования подобных состояний сначала при малых токах и отрицательном магнитном поле, а затем при константах связи  $\alpha > 0,214$  происходит образование характерных крестообразных структур в плоскости  $(\gamma, h_0)$  (рис.4).

Приведенный анализ полученных результатов не претендует на полноту и законченность. Более подробное обсуждение численного эксперимента с точки зрения физики джозефсоновских переходов будет проведено отдельно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. – ЖЭТФ, 1984, 86, с.1527.
2. Бояджиев Т.Л. и др. – Сообщения ОИЯИ, P11-85-807, Дубна, 1985.
3. Бояджиев Т.Л. и др. – Сообщения ОИЯИ, P17-86-506, Дубна, 1986.
4. Бояджиев Т.Л. и др. – Сообщения ОИЯИ, P11-88-409, Дубна, 1988.
5. Бояджиев Т.Л. и др. – В сб.: "Численные методы и приближения". Труды Международной конференции по численным методам и приложениям, София, Изд-во БАН, 1988.
6. Бароне А., Паттерно Дж – Эффект Джозефсона, М., Мир, 1984.
7. Гавурин М.К. – Изв. ВУЗ, Математика, 1958, т.5/6, с.18.
8. Жидков Е.П., Пузынин И.В. – ДАН СССР, 1987, 174, 2, с.271.
9. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. – ЖВМиМФ, 1981, т.21, №2, с.491.
10. Завьялов Ю.С. и др. – Методы сплайн-функций, М., Наука, 1980, с.191.
11. Де Бор К. – Практическое руководство по сплайнам, М., Радио и связь, 1985, с.281.

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 марта 1989 года.