сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-161

В.М.Лебеденко

ПАРЫ ОБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ КЛАССИЧЕСКОГО ТИПА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ osp (m,n)

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе нами предлагается один удобный метод исследования супералгебр с помощью образующих и определяющих соотношений. Под супералгеброй Ли с двумя образующими a и b (a — четный, b — нечетный) мы будем подразумевать линейную оболочку всевозможных одночленов типа

$$[a,[a,[a,b]]], \quad [a,[b,b]],$$

$$[[[[b,b],[b,b]],a],b],\ldots$$

и т.п.* Мы покажем, что (почти) все супералгебры классического типа (см/1/), в том числе и алгебры типа $osp(m,n)$, обладают двумя образующими.

Далее нами будут указаны конкретные пары образующих для алгебр типа $osp(1,2)$, $osp(1,4)$, $osp(2,2)$ и рассмотрены соотношения между ними. В частности, будут получены определяющие соотношения для супералгебр типа $osp(1,2)$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} &[h,[h,b]] = b, \\ &[h,[h,[b,b]]] = 4[b,b] - 8h. \end{aligned} \tag{1}$$

Далее с помощью этих соотношений мы получим новые линейные реализации алгебры $osp(1,2)$, как конечномерные, так и бесконечномерные (см. разд. 7, 8), заданные на образующих h и b. Каждое такое представление задается *двумя операторами*, и формулы, задающие его действие, очень компактны.

Это обстоятельство выгодно отличает полученные представления от уже известных и позволяет надеяться на подобные же результаты и в случае других супералгебр.

---

* *Здесь, как и ниже, мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в теории супералгебр Ли (см. работу В.Г.Каца/1/). В частности, скобки [,] будут означать (единую) билинейную операцию в супералгебре Ли.*

2. О СУЩЕСТВОВАНИИ ПАР ОБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ У СУПЕРАЛГЕБР КЛАССИЧЕСКОГО ТИПА

Существование пар образующих элементов у алгебр типа $A(m, n)$ было доказано автором в работе /2/. Здесь будет доказано, что почти любая суперaлгебра Ли классического типа обладает двумя образующими. Сначала докажем такое

Предложение. Пусть дана суперaлгебра Ли $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$ (тут $G_{\bar 0}$ — четная часть, $G_{\bar 1}$ — нечетная часть), H — подалгебра Картана четной части $G_{\bar 0}$,

$$G_{\bar 1} = \underset{\alpha \in \Delta_{\bar 1}}{\oplus} G_\alpha \quad (\Delta_{\bar 1} = \{\alpha_1; \dots, \alpha_n\})$$

— разложение нечетной части $G_{\bar 1}$ по корневым (относительно H) подпространствам, причем все G_α одномерны, и

$$[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = G_{\bar 0}.$$

Тогда суперaлгебра G обладает двумя образующими.

Доказательство. Пусть $G_{\alpha_i} = \langle x_{\alpha_i} \rangle$ — одномерное подпространство, натянутое на элемент x_{α_i}, $i = 1, \dots, n$,

$$G_{\bar 1} = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \langle x_{\alpha_i} \rangle, \quad [h, x_{\alpha_i}] = \alpha_i(h) x_{\alpha_i} \quad (h \in H)$$

(тут все α_i — различные функционалы на H). Тогда в силу леммы (см. приложение) существует такой элемент $h^* \in H$, что все значения $\alpha_i(h^*)$ отличны от нуля и попарно различны. Отсюда получается, что два элемента: h^* и $b = \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i}$, порождают G. Действительно, в силу свойств определителя Вандермонда и выбора h^* все элементы типа

$$(\mathrm{ad}(h^*))^k b, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

линейно независимы (нечетны) и, следовательно, подалгебра алгебры G, порожденная элементами h^* и b, содержит всю нечетную часть $G_{\bar 1}$. Но так как тут $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = G_{\bar 0}$, то окончательно получаем, что алгебра G порождается своими элементами h^* и b. Это и требовалось доказать.

Замечание. Можно было бы указать алгоритм выбора h^* и b на основе метода доказательства леммы (см. приложение). Теперь видно, что все супералгебры Ли классического типа (см. /1/), у которых нечетные корневые подпространства одномерны (в том числе и алгебры типа $\mathrm{osp}(m,n)$), обладают двумя образующими элементами.

3. ПАРА ОБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБРЫ osp (1,2)

Супералгебра osp (1,2) может быть реализована (см. /1/) в виде матрицы над C вида

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & z & z_1 \\ \hline z_1 & d & e \\ \hline -z & f & -d \end{array}\right),$$

где $z, z_1, d, e, f \in C$. Пусть $h = E_{22} - E_{33}$, $e_1 = E_{12} - E_{31}$, $e_2 = E_{13} + E_{21}$ (тут E_{ij} — элемент стандартного матричного базиса; h — четный, e_1, e_2 — нечетные элементы). Тогда $[h, e_1] = -e_1$, $[h, e_2] = e_2$ и при $b = e_1 + e_2$ получаем, что

$$[h, [h, b]] = b. \qquad (*)$$

Используя рассуждения из доказательства предложения (см.раздел 2), получаем, что элементы h и b порождают супералгебру osp (1,2). Непосредственно проверяем, что следующие элементы: h, $[b, b]$, $[h, [b, b]]$ — четные, b, $[h, b]$ — нечетные, составляют ее базис.

Далее легко проверить, что элементы h и b связаны такими соотношениями:

$$\begin{aligned} &[h, [h, b]] = b, \\ &[h, [h, [b, b]]] = 4[b, b] - 8h. \end{aligned} \qquad (1)$$

Изучая соотношения между элементами этого базиса, получаем, что все они вытекают из соотношений (1). Так как osp (1,2) — простая супералгебра, то это ее определяющие соотношения. Другими словами, любая супералгебра с такими соотношениями между образующими изоморфна osp (1,2).

4. ПАРА ОБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СУПЕРАЛГЕБРЫ osp (2,2)

Эта супералгебра Ли (G) состоит из всех матриц вида (см.[1])

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & x & x_1 \\ 0 & -\alpha & y & y_1 \\ \hline y_1 & x_1 & \beta & \gamma \\ -y & -x & \delta & -\beta \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \dim G_{\bar 0} = 4, \\ \dim G_{\bar 1} = 4. \end{array}$$

Пусть

$h_1 = E_{11} - E_{22}$,

$h_2 = E_{33} - E_{44}$

(четные элементы),

$e_1 = E_{13} - E_{42}$, $e_2 = E_{14} + E_{32}$,

$e_3 = E_{23} - E_{41}$, $e_4 = E_{24} + E_{31}$

(нечетные элементы). Тогда

$[h_1, e_1] = e_1$, $[h_2, e_1] = -e_1$,

$[h_1, e_2] = e_2$, $[h_2, e_2] = e_2$,

$[h_1, e_3] = -e_3$, $[h_2, e_3] = -e_3$,

$[h_1, e_4] = -e_4$, $[h_2, e_4] = e_4$.

При $a = h_1 + 2h_2$ получаем, что

$[a, e_1] = -e_1$, $[a, e_2] = 3e_2$,

$[a, e_3] = -3e_2$, $[a, e_4] = e_4$.

Отсюда в силу рассуждений раздела 2 получаем, что *два элемента* a *и* $b = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ *порождают супералгебру* osp *(2,2)*.

5. ПАРА ОБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СУПЕРАЛГЕБРЫ osp (1,4)

Эта супералгебра Ли состоит из всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & k,\ e & m,\ n \\ \hline \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & d & e \\ \hline -k & f & -d^{T} \end{array}\right),$$

тут d , e , f — 2x2 матрицы над C, e и f — симметричные матрицы, k , e , m , $n \in C$.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= E_{22} - E_{44} \\ h_2 &= E_{33} - E_{55} \end{aligned}\right\} \text{ — четные элементы,}$$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= E_{12} - E_{41} \\ e_2 &= E_{13} - E_{51} \\ e_3 &= E_{14} + E_{21} \\ e_4 &= E_{15} + E_{31} \end{aligned}\right\} \text{ — нечетные элементы.}$$

Тогда

$[h_1, e_1] = -e_1$, $[h_2, e_1] = 0$,

$[h_1, e_2] = 0$, $[h_2, e_2] = -e_2$,

$[h_1, e_3] = e_3$, $[h_2, e_3] = 0$,

$[h_1, e_4] = 0$, $[h_2, e_4] = e_4$.

Обозначив $h = h_1 + 2h_2$, получаем, что

$[h , e_1] = -e_1$, $[h, e_2] = -2e_2$,

$$[h, e_3] = e_3, \quad [h, e_4] = 2e_4.$$

Если положить $b = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, то *два элемента* h *и* b *порождают супералгебру* osp *(1,4)*. Тут, как и в случае osp (1,2), можно найти определяющие соотношения для алгебры osp (1,4) относительно элементов h и b. Одним из таких соотношений может быть такое:

$$[h, [h, [h, [h, b]]]] = -4b + 5[h, [h, b]].$$

6. О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СУПЕРАЛГЕБРЫ osp (1,2)

В силу построений (см. раздел 3) для того, чтобы задать некоторую линейную реализацию супералгебры osp (1,2), *достаточно определить, во что переходят ее образующие* h *и* b (связанные соотношениями (1)).

Отсюда мы заключаем, что для нахождения любой линейной реализации алгебры osp (1,2) достаточно определить такие линейные операторы H и B в некотором суперпространстве V, которые удовлетворяют двум соотношениям:

$$\begin{aligned} &[H, [H, B]] = B, \\ &[H, [H, [B, B]]] = 4[B, B] - 8H. \end{aligned} \tag{2}$$

Такое задание представления osp (1,2) равносильно заданию трех операторов H, B_1, B_2, связанных более простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} &[H, B_1] = B_1 \\ &[H, B_2] = -B_1 \qquad ([B_1, B_2] = B_1 B_2 + B_2 B_1). \\ &[B_1, B_2] = H \end{aligned} \tag{3}$$

Для доказательства этого достаточно положить

$$B_1 = B + [H, B], \quad B_2 = B - [H, B]$$

$$\left(B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)\right).$$

Ниже мы приводим представления супералгебры osp (1,2), заданные на образующих H, B_1, B_2 $\left(B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)\right)$. При этом рассмотрены как конечномерные, так и бесконечномерные представления, для которых оператор H имеет собственный вектор.

7. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБРЫ osp (1,2)

Каждое неприводимое конечномерное представление алгебры osp (1,2) (см. разделы 3 и 4) с точностью до эквивалентности может быть задано размерностью $m+1$ пространства представления $V = \bigoplus_{k=0}^{m} \langle x_k \rangle$ (тут $[x_k]_{k=0}^{m}$ — базис V, где x_{2t} — четные, x_{2t+1} — нечетные элементы) на ее образующих элементах с помощью операторов H, B_1, B_2 (следовательно, и на h, b) следующим образом:

$$Hx_k = \left(\frac{m}{2} - 1\right) x_k$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m),$$

$$\begin{cases} B_1 x_0 = 0, \\ B_1 x_{2k} = -k x_{2k-1}, \\ B_1 x_{2k+1} = \left(\frac{m}{2} - k\right) x_{2k}, \end{cases}$$

$$B_2 x_k = x_{k+1} \qquad (x \leq m - 1),$$

$$B_2 x_m = 0.$$

Эти представления получены путем последовательного подбора операторов H и B_1, B_2, удовлетворяющих соотношениям (3) (за основу берется собственный вектор оператора H), с учетом того, что суперслед любого такого оператора должен равняться нулю.

8. О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СУПЕРАЛГЕБР osp (1,2)

Ниже мы приводим неприводимые бесконечномерные представления алгебры osp (1,2), для которых оператор H имеет собственный вектор (см. разделы 3 и 4). Тут мы поступили аналогично предыдущему. При этом мы получили неприводимые представления двух типов.

Тип А. $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ — базис пространства V и

$$Hx_k = (\alpha - k)\,x_k,$$

$$\begin{cases} B_1 x_0 = 0, \\ B_1 x_{2k} = -k x_{2k-1} \quad (k \geq 1), \\ B_1 x_{2k+1} = (\alpha - k)\,x_{2k}, \end{cases}$$

$$B_2 x_k = x_{k+1}.$$

Константа α определяет представление такого типа однозначно, с точностью до эквивалентности.

Тип Б

$$Hx_k = (\alpha + k)\,k_k,$$

$$\begin{cases} B_1 x_{2k} = (\alpha - k - \beta)\,x_{2k-1}, \\ B_1 x_{2k+1} = (\beta - k)\,x_{2k}, \\ B_1 x_0 = 0, \end{cases}$$

$$B_2 x_k = x_{k+1},$$

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots .$$

В заключение отметим, что подобные построения возможны и для многих других супералгебр.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма. Пусть V — линейное пространство над некоторым полем K (char K = 0) :

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \langle v\alpha_i \rangle,$$

где α_i — различные ($\neq 0$) функционалы над H — линейной оболочкой операторов $h_1, \ldots, h_n$:

$$h_j x\alpha_i = \alpha_i(h_j) x\alpha_i' .$$

Тогда существует такой элемент $h^* \in H$, что все значения

$$\alpha_i(h^*) \in K$$

попарно различны и не равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим множество P, состоящее из всех функционалов вида

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \quad \alpha_i - \alpha_j, \ldots \qquad (i \neq j).$$

Пусть элементы $\lambda_i \neq 0$ $(\lambda_i \in K)$ попарно различны.

Рассмотрим бесконечную последовательность элементов

$$q_\ell = \lambda_1^\ell h_1 + \lambda_2^\ell h_2 + \ldots + \lambda_n^\ell h_n \quad (\ell = 1, 2, \ldots).$$

В силу конечности множества P и конечномерности H получаем, что если бы требуемый элемент не существовал, то бесконечное множество элементов q_ℓ содержится в одном из множеств типа

$$H_\alpha = \{x, \; x \in H) \; \alpha(x) = 0\} \quad (\alpha \in P).$$

А отсюда вытекало бы в силу свойств обобщенного определителя Вандермонда, что $H \subseteq H_\alpha$. Но тогда или $\alpha_k = 0$, или $\alpha_k = \alpha_\ell$ для некоторого k или для некоторых $k_n \ell$. Это приводит нас к противоречию. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kac V.G. – Advancis in Mathematics, 1977, 26, 8-96.*
2. *Лебеденко В.М. – Препринт ОИЯИ Р5-87-462, Дубна, 1987.*

Рукопись поступила в издательский отдел
10 марта 1989 года.