объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-160

А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян *, Г.С.Погосян*,
И.В.Луценко*

ОДНОМЕРНЫЙ АТОМ ВОДОРОДА В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Направлено в "Journal of Physics A:
Mathematical and General"

*Ереванский государственный университет

1989

I. Введение

Одномерным атомом водорода принято называть квантовую систему с потенциалом взаимодействия $U = -\alpha|x|^{-1}$. Неискушенному читателю эта система может показаться физически не примечательной и, уж во всяком случае, простой. Однако это далеко не так. Потенциал $U = -\alpha|x|^{-1}$ моделирует конкретную физическую ситуацию – атом водорода в сильном магнитном поле [1]. Кулоновское одномерье требует более изысканных математических методов [2], чем реальный атом водорода. Это объясняется тем, что в отличие от трехмерья в одномерье кулоновское поле настолько сингулярно в точке $x = 0$, что абсолютно изолирует друг от друга области $x > 0$ и $x < 0$ [3]. Отсюда и самая характерная черта этой области квантовой механики – наличие вопросов, на которые до сих пор нет вполне удовлетворительных ответов. Некоторые результаты и методы друг другу противоречат [4,5], другие дополняют друг друга [6,7].

Цель нашей статьи – развить квазиклассический подход к одномерному атому водорода. Нас будет интересовать как нерелятивистская область (уравнение Шредингера), так и релятивистская область (уравнение Клейна-Гордана). С физической точки зрения в релятивистской области, конечно, предпочтительней иметь дело с уравнением Дирака, однако оператор Дирака в случае одномерного кулоновского поля не имеет связанных состояний [8], которые интересуют нас в этой работе.

Чем объясняется наш интерес к квазиклассике кулоновского одномерья? В недавней публикации [9] был сделан вывод о несоответствии результатов, следующих из квазиклассического анализа, результатам, получающимся из точных формул [4,10] в квазиклассическом пределе. Это неверный вывод, и источник ошибки заключен в следующем. Так как $U(0) = -\infty$, то обычное условие квантования Бора-Зоммерфельда

$$\oint Q(x)\,dx = 2\pi(n+1/2), \tag{I.I}$$

соответствующее уравнению

$$\psi''(x) + Q^2(x)\psi(x) = 0, \tag{I.2}$$

не работает. В случае одномерного уравнения Шредингера

$$Q(x) = \frac{P(x)}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)} .$$

В квантовой механике факт несостоятельности условия квантования (I.I) для уравнений (I.2), в которых $Q(x)$ может обращаться в бесконечность при конечных x, достаточно хорошо известен [11]. Есть прием, с помощью которого в этих неудачных случаях в условии квантования (I.I) заменяется $Q(x)$ на вполне определенную функцию $Q_{эфф.}(x)$. Этот прием называется подстановкой Лангера [11].

Именно это важное обстоятельство было упущено Лапидусом [9]. В итоге было сделано непонятное заключение о том, что спектр нерелятивистского одномерного атома водорода должен по модулю превосходить в четыре раза боровский спектр, следующий из точного решения уравнения Шредингера [4]. В релятивистской области неучет подстановки Лангера обернулся в работе Лапидуса [9] расходимостью интеграла в условии квантования (I.I).

2. Нерелятивистская квазиклассика

Приведем правильное решение вопроса в нерелятивистской области. Начнем с уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left\{E + \frac{ze^2}{|x|}\right\}\psi = 0 . \qquad (2.I)$$

При $x \neq 0$ это уравнение может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + 2\left(\mathcal{E} + \frac{1}{\rho}\right)\psi = 0 . \qquad (2.2)$$

Здесь мы ввели обозначения

$$\rho = |x|/a , \quad a = \frac{\hbar^2}{m\alpha} , \quad \alpha = ze^2 , \quad E = \mathcal{E}\,\frac{m\alpha^2}{\hbar^2} .$$

Сравним теперь уравнение (2.2) с одномерным уравнением Шредингера для кулоновского поля $U(r) = -\alpha r^{-1}$. В атомных единицах это уравнение имеет вид [12]:

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\gamma}{\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right]\psi = 0 . \qquad (2.3)$$

Здесь $\mathcal{U}(\rho) = \rho R(\rho)$, $R(\rho)$ – радиальная кулоновская функция

$$R_{n\ell}(\rho) = C \cdot \rho^{\ell} e^{-\rho/2} F(-\gamma+\ell+1;\, 2\ell+2;\, \rho), \tag{2.4}$$

$$\gamma = (-2E)^{-1/2}, \qquad \rho = 2r/\gamma .$$

Из уравнения (2.3) получается правильная квазиклассика, если в нем сделать подстановку

$$\ell(\ell+1) \longrightarrow (\ell+1/2)^2 . \tag{2.5}$$

В данном случае это означает переход от $Q(x)$ к $Q_{эфф}(x)$, о котором говорилось во введении.

Уравнение (2.3) при $\ell = 0$ приобретает структуру уравнения (2.2). Это наблюдение говорит о том, что нам, перед тем как применить условие квантования (I.I) к одномерному атому водорода, нужно сделать подстановку (2.5), т.е. добавить в (2.2) к члену $2\cdot\rho^{-1}$ центробежный член $(-4\rho^2)^{-1}$:

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + Q^2_{эфф.}(\rho)\psi(\rho) = 0, \tag{2.6}$$

где

$$Q^2_{эфф}(\rho) = 2\left(\mathcal{E} + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{4\rho^2} . \tag{2.7}$$

Теперь, решая уравнение

$$Q_{эфф}(\rho) = 0,$$

находим точки поворота

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2\mathcal{E}} - \sqrt{\frac{1}{4\mathcal{E}^2} + \frac{1}{8\mathcal{E}}},$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2\mathcal{E}} + \sqrt{\frac{1}{4\mathcal{E}^2} + \frac{1}{8\mathcal{E}}} .$$

Отметим, что $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. Учитывая, что

$$Q_{эфф}(\rho) = 2\sqrt{-2\mathcal{E}}\,\frac{\sqrt{(\alpha_2-\rho)(\rho-\alpha_1)}}{\rho}, \tag{2.8}$$

приходим к правильному условию квантования

$$\sqrt{-2\mathcal{E}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\sqrt{(\alpha_2-\rho)(\rho-\alpha_1)}}{\rho}d\rho = \pi(n+1/2)\,. \tag{2.9}$$

Учтем, что входящий в (2.9) интеграл равен

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\sqrt{(\alpha_2-\rho)(\rho-\alpha_1)}}{\rho}d\rho = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1}\right)^2\,. \tag{2.10}$$

Вычисление этого интеграла элементарно, хотя и требует известных усилий /13/. Подставляя (2.10) в (2.9), приходим к уравнению

$$\sqrt{-2\mathcal{E}}\left(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1}\right)^2 = 2n+1\,, \tag{2.11}$$

в котором, как и в (2.9), n пробегает целые значения n = 0, I, 2,...

Решая уравнение (2.II), легко прийти к выводу, что

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2(n+1)^2}\,. \tag{2.12}$$

Мы видим, что квазиклассическое приближение приводит к точному результату, полученному Лоудоном /4/. Этот результат противоречит выводу, сделанному Лапидусом /9/. Отметим еще один момент. Наряду со спектром (2.I2) точная теория предсказывает существование в одномерном атоме водорода основного состояния $E_{осн} = -\infty$, которому соответствует ситуация, когда частица локализована в начале координат. Это состояние не описывается формулой (2.I2) и возникает вследствие сингулярного характера потенциала $U(x) = -\alpha|x|^{-1}$ в точке $x = 0$. В литературе высказывались сомнения по поводу "реальности" состояния с $E_{осн} = -\infty$. Если говорить точнее, то утверждается, что если такой уровень и существует, то интеграл от произведения соответствующей этому уровню волновой функции на любую квадратично интегрируемую функцию равен нулю, и потому неясно, как конкретно может себя проявить наличие уровня $E_{осн}$ /3,I4/.

Почему основное состояние оказалось за пределами квазиклассики? Дело в том, что подстановка (2.5) эквивалентна переходу от потенциала $U(\rho) = -\alpha\rho^{-1}$ к эффективному потенциалу

$$U_{эфф}(\rho) = -\frac{1}{\rho}+\frac{1}{8\rho^2}\,,$$

в котором $E_{min} < -\infty$.

3. Релятивистский одномерный атом водорода

Уравнение Клейна–Гордана для одномерного водородоподобного атома имеет вид [8,10]

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\left[E^2 + \frac{2Ze^2}{|x|}E + \frac{Z^2e^4}{x^2} - m^2c^4\right]\psi = 0. \qquad (3.1)$$

Введем удобные обозначения

$$\rho = 2\varepsilon|x|, \qquad \alpha = e^2/\hbar c,$$

$$\varepsilon = (\hbar c)^{-1}(m^2c^4 - E^2)^{1/2}, \qquad \lambda = Z\alpha E(m^2c^4 - E^2)^{-1/2}. \qquad (3.2)$$

Эти обозначения совпадают с обозначениями Спектора и Ли [10], за исключением того, что у этих авторов $\rho = 2\varepsilon x$, т.е. нет знака модуля, введенного нами в (3.2).

При $x \neq 0$ из (3.1) и (3.2) следует уравнение

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\rho} + \frac{Z^2\alpha^2}{\rho^2}\right]\psi = 0. \qquad (3.3)$$

Сравним уравнение (3.3) с уравнением (2.3). Эти уравнения переходят друг в друга, если

$$\lambda = \gamma, \qquad (3.4а)$$

$$Z^2\alpha^2 = -\ell(\ell+1). \qquad (3.4б)$$

Отсюда следует важный вывод. Действительно, из (3.4б) заключаем, что возможны два значения "момента" ℓ :

$$\ell_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4Z^2\alpha^2}}{2}, \qquad \ell_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4Z^2\alpha^2}}{2}. \qquad (3.5)$$

Таким образом, вместо уравнения Клейна–Гордана можно иметь дело с двумя уравнениями (2.3) – с $\ell = \ell_1$ и $\ell = \ell_2$. Здесь разыгрывается забавное обстоятельство. Как видно из (2.4), решение уравнения (2.3) определяется не произведением $\ell(\ell+1)$, а одним сомножителем ℓ. Поэтому, хотя $\ell_1(\ell_1+1) = \ell_2(\ell_2+1)$, т.е. уравнения (2.3) с $\ell = \ell_1$ и $\ell = \ell_2$ тождественны, им соответствуют различные решения, получающиеся из (2.4) подстановкой $\ell = \ell_1$ и $\ell = \ell_2$, т.е.

$$\psi^{(1)} = c\cdot\rho^{s_1} e^{-\rho/2} F(-\lambda+s_1;\, 2s_1;\, \rho), \tag{3.6а}$$

$$\psi^{(2)} = c\cdot\rho^{s_2} e^{-\rho/2} F(-\lambda+s_2;\, 2s_2;\, \rho). \tag{3.6б}$$

Здесь введено новое обозначение

$$S_1 = \frac{1+\sqrt{1-4z^2\alpha^2}}{2} = \ell_1+1, \quad S_2 = \frac{1-\sqrt{1-4z^2\alpha^2}}{2} = \ell_2+1. \tag{3.7}$$

Как S_1, так и S_2 при $z\alpha < 1/2$ положительны, а потому обе функции (3.6а) и (3.6б) регулярны в точке $\rho = 0$. Из (3.6а) и (3.6б) спектр определяется стандартным образом,

$$\lambda = n + S_1, \quad \lambda = n + S_2,$$

где $n = 0, 1, \ldots$. Учитывая связь параметра λ с энергией E, приходим к двум "сериям":

$$E_n^{(1)} = \frac{mc^2}{\left[1+\frac{z^2\alpha^2}{(n+s_1)^2}\right]^{1/2}}, \tag{3.8а}$$

$$E_n^{(2)} = \frac{mc^2}{\left[1+\frac{z^2\alpha^2}{(n+s_2)^2}\right]^{1/2}}. \tag{3.8б}$$

Легко показать, что $E_{n+1}^{(1)} > E_{n+1}^{(2)} > E_n^{(1)}$, т.е. что элементы серий $E_n^{(1)}$ и $E_n^{(2)}$ чередуются друг с другом. Формулы (3.8а) и (3.8б) были впервые получены Спектором и Ли /10/ посредством прямого анализа уравнения (3.3). Можно к тем же результатам прийти и другим путем /8/, а именно, работая с $\mathcal{D}$ – мерным волновым уравнением и переходя к пределу $\mathcal{D} \to 1$ (в радиальное уравнение размерность входит аналитическим образом и ее можно обобщить на непрерывные значения).

До сих пор все рассуждения проводились на языке переменной $\rho = 2\varepsilon|x|$. В терминах координаты x все удваивается, т.е. мы вместо двух решений (3.6) имеем четыре решения: два при $x > 0$ и два при $x < 0$. Так как $\psi^{(1)}(0) = \psi^{(2)}(0) = 0$, то сшивка этих решений в точке $x = 0$ должна производиться по тому же принципу, что и в нерелятивистском одномерном атоме водорода /4/, т.е. введением

$$\psi_{ns}^{(+)}(x) = \psi_{ns}(x), \tag{3.9а}$$

$$\psi^{(-)}_{ns}(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \psi^{(+)}_{ns}(x), \tag{3.9б}$$

где $\psi_{ns}(x)$ при $s = s_1$ и $s = s_2$ совпадает с (3.6а) и (3.6б) соответственно. Выпишем явный вид волновой функции $\psi^{(+)}_{ns}(x)$. Если принять условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{(+)}_{ns}|^2 dx = 1,$$

то для $\psi^{(+)}_{ns}(x)$ будем иметь ($s = s_1, s_2$)

$$\psi^{(+)}_{ns}(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon\,\Gamma(2s+n)}{2n!(n+s)}} \cdot \frac{(2\varepsilon|x|)^s}{\Gamma(2s)} e^{-\varepsilon|x|} \cdot F(-n;\, 2s;\, 2\varepsilon|x|). \tag{3.10}$$

4. <u>Нерелятивистский предел</u>

Выше мы пришли к выводу, что каждая из серий (3.8) двукратно вырождена. В нерелятивистском пределе $c \to \infty$, т.е. $z\alpha \to 0$, и потому $s_1 \to 1$, $s_2 \to 0$. Что происходит в этом пределе с сериями (3.8) и с волновыми функциями (3.9)? Легко показать, что

$$\tilde{\varepsilon}^{(1)}_n = E^{(1)}_n - mc^2 \longrightarrow -\frac{mz^2e^4}{2\hbar^2(n+1)^2}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(2)}_n = E^{(2)}_n - mc^2 \longrightarrow -\frac{mz^2e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(2)}_0 = E^{(2)}_0 - mc^2 \longrightarrow -\infty.$$

Таким образом, при $c \to \infty$ все уровни $\tilde{\varepsilon}^{(1)}_n$ ($n = 0, 1, \ldots$) сливаются с уровнями $\tilde{\varepsilon}^{(2)}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), а уровень $\tilde{\varepsilon}^{(2)}_0$ реализует нерелятивистское падение на центр.

Далее, при $s = s_1 \to 1$, как это видно из (3.10),

$$\psi^{(+)}_{ns_1}(x) \longrightarrow \left[\frac{2z}{(n+1)a}\right]^{3/2} |x| e^{-\frac{z|x|}{(n+1)a}} F\left(-n;\, 2;\, \frac{2z|x|}{(n+1)a}\right),$$

где $n = 0, 1, \ldots$ и $a = \hbar^2/m\alpha$ – боровский радиус.

Сложнее осуществить переход к нерелятивизму при $S = S_2 \to 0$, т.к. при этом вырожденная гипергеометрическая функция (3.10) расходится. Такое же поведение имеет $\Gamma(2S)$ в нормировочном множителе. Пользуясь формулой

$$\lim_{c \to 1-p} \frac{F(a,c,x)}{\Gamma(c)} = \frac{(a)_p}{p!} x^p F(a+p;\, 1+p;\, x),$$

где p = 1, 2, ... /15/ и применяя ее к выражению (3.10) при p = 1, имеем

$$\psi^{(+)}_{ns_2}(x) \to \left(\frac{2z}{na}\right)^{3/2} |x| e^{-\frac{z|x|}{na}} F\left(-n;\, 2;\, \frac{2z|x|}{na}\right),$$

где n = 1, 2, ... Спектором и Ли /10/ было доказано, что в случае основного состояния

$$\psi^{(+)}_{0s_2} \longrightarrow \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{1/2} e^{-|x|/\alpha a}. \qquad (4.1)$$

Мы видим, что в нерелятивистском пределе функции $\psi^{(+)}_{ns_1}$ (n = 0, 1, ...) сливаются с функциями $\psi^{(+)}_{ns_2}$ (n = 1, 2, ...). В результате нерелятивистский спектр оказывается не четырехкратно вырожденным, а двукратно вырожденным, как это имеет место у Лаудона /4/.

При $\alpha \to 0$ в (4.1) функция $\psi^{(+)}_{0s_2}$ ведет себя сингулярно:

$$\psi^{(+)}_0(x) \equiv \lim_{\alpha \to 0} \psi^{(+)}_{0s_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Тем не менее

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(+)}_0(x) f(x)\, dx = 0$$

для любой квадратично интегрируемой функции. Функция (4.2) не имеет своих аналогов в известной нам математике. Вместе с тем

$$\lim_{\alpha \to 0} |\psi^{(+)}_{0s_2}(x)|^2 = \delta(x),$$

что, конечно же, интерпретируется как падение на центр /4/.

Мы хотели бы закончить этот раздел следующим замечанием. Мосс /8/ в своей работе приводит обе серии (3.8) и объясняет, что при переходе к нерелятивизму только уровень $E^{(2)}_0$ обеспечивает

нужное падение на центр. Тем не менее он считает эту серию нефизической, т.к.:

а) средние $\langle\psi|r^{-2}|\psi\rangle$ и $\langle\psi|\Delta|\psi\rangle$ равны бесконечности, если под ψ понимать волновые функции, соответствующие серии $E_n^{(2)}$;

б) оператор $\Delta = d^2/dx^2$ не эрмитов на волновых функциях серии $E_n^{(2)}$.

Приведенные аргументы нам не кажутся убедительными. Во-первых, в уравнении Клейна-Гордана (3.I) после усреднения по состояниям, соответствующим серии $E_n^{(2)}$, указанные расходящиеся члены сокращаются. Во-вторых, нам неясно, зачем нужно требовать эрмитовости оператора Δ на собственных функциях серии $E_n^{(2)}$.

5. Релятивистская квазиклассика

Перейдем к квазиклассическому анализу уравнения (3.3). Уравнение (3.3) имеет сингулярность в точке $\rho = 0$ и потому относится к классу уравнений, к которым должна быть применена подстановка Лангера. Как известно /II/, подстановка Лангера - это переход к новой независимой переменной $\xi \in (-\infty, \infty)$, согласно соотношению $e^{-\xi} = \rho$, и последующая замена функции ψ на функцию ϕ, согласно $\psi = e^{\xi/2}\phi$.

Следуя указанному рецепту, вместо уравнения (3.3) приходим к уравнению

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + Q^2(\xi)\phi = 0, \tag{5.I}$$

в котором функция $Q^2(\xi)$ имеет вид

$$Q^2(\xi) = -\frac{1}{4} + z^2\alpha^2 + \lambda e^{\xi} - \frac{1}{4}e^{2\xi}. \tag{5.2}$$

Функция (5.2) конечна при конечных ξ, и поэтому к уравнению (5.I) применимо условие квантования (I.I), которое в данном случае записывается в следующем виде

$$\int_a^b \sqrt{z^2\alpha^2 - \frac{1}{4} + \lambda e^{\xi} - \frac{1}{4}e^{2\xi}}\, d\xi = \hbar(n + 1/2), \tag{5.3}$$

где $n = 0, I, \ldots$. Переходя в (5.3) от ξ к прежней переменной ρ, после небольших вычислений имеем

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sqrt{(\alpha_2-\rho)(\rho-\alpha_1)}}{\rho}\, d\rho = \pi(2n+1). \qquad (5.4)$$

Здесь точки поворота α_1 и α_2 даются выражениями

$$\alpha_1 = 2\lambda - \sqrt{4\lambda^2+4Z^2\alpha^2-1}\,,$$
$$\alpha_2 = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+4Z^2\alpha^2-1}\,. \qquad (5.5)$$

Выражение для интеграла (5.4) мы уже приводили (см. (2.10)), и поэтому, учитывая (2.10), (5.4) и (5.5), легко вычислить квазиклассическое выражение для спектра

$$E_n = \frac{mc^2}{\left[1+\frac{Z^2\alpha^2}{(n+s_1)^2}\right]^{1/2}}\,,$$

где s_1 определено так же, как и в (3.7).

Таким образом, мы пришли к двум выводам:

а) квазиклассический спектр совпадает с точным результатом серии (3.8);

б) серии (3.8б) нет в квазиклассике.

Вывод (а) поправляет ошибочное заключение Лапидуса /9/. Более интригующим является вывод (б), но его легко объяснить. Вспомним, что именно из серии (3.8б) получалось падение на центр в нерелятивистском пределе. Если бы релятивистская квазиклассика предсказала серию (3.8б), то это автоматически означало бы квазиклассическое объяснение падения на центр в нерелятивизме, чего, как мы уже знаем, нет (см. текст после формулы (2.12)). С другой стороны, мы уже говорили о том, что уравнение (3.3) эквивалентно двум уравнениям Шредингера для трехмерного атома водорода – с $\ell = \ell_1$ и $\ell = \ell_2$. Так почему же не возникает одновременно двух серий? Дело в том, что подстановка Лангера для ℓ_1 и ℓ_2 приводит к одному и тому же результату:

$$(\ell_1+1/2)^2 = (\ell_2+1/2)^2 = (1-4Z^2\alpha^2)/4\,,$$

и поэтому после этой подстановки оба уравнения становятся тождественными, и условия квантования совпадают.

Литература

1. Haymaker R.W., Rau A.R.P., Amer. J. Phys. 1986, 54, 928.
2. Hammer C.L., Weber T.A., Amer, J. Phys. 1988, 56, 1281.
3. Andrew M., Amer. J. Phys. 1966, 34, 1194; 1981, 49, 1074.
4. Loudon R., Amer. J. Phys. 1959, 27, 649.
5. Haines L.K., Roberts D.H., Amer. J. Phys. 1969, 37, 1145.
6. Davtyan L.S., Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M., J. Phys. A, 1987, 20, 2765.
7. Boya L.J., Kmiecik M., Bohm A. Phys. Rev. A, 1988, 37, 3567.
8. Moss R.E. Amer. J. Phys. 1987, 55. 397.
9. Lapidus J.R. Amer. J. Phys. 1988, 56, 92.
10. Spector H., Johnson Lee, Amer. J. Phys. 1985, 53, 249.
11. Berry M.V., Mount K.E. Rep. Prog. Phys. 1972, 35, 315.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, М.,Наука,1974.
13. Flügge S. Practical Quantum mechanics VI, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1971.
14. Nuhez Yépez, A.L.Salas Brito. Eur. J. Phys. 1987, 8, 307.
15. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions, v. 1, New York Toronto, London 1953.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 марта 1989 года.