объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-89-159

А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян *,
Г.С.Погосян*, И.В.Луценко*

СУПЕРСИММЕТРИЯ В ОДНОМЕРНОМ АТОМЕ ВОДОРОДА

Направлено в журнал "Physics Letters A"

*Ереванский государственный университет

1989

В квантовую механику суперсимметрия была впервые введена Виттеном /1/. В схеме Виттена существенную роль играет волновая функция ψ_0 основного состояния $E_0 = 0$. Во-первых, через ψ_0 выражается потенциал $V(x) = \psi_0''/2\psi_0$. Во-вторых, ψ_0 определяет явный вид супергамильтониана H_S и зарядовых операторов Q и Q^+:

$$\mathcal{H}_S = QQ^+ + Q^+Q ,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} , \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{I}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_x - \frac{\psi_0'}{\psi_0}\right) , \quad A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\partial_x - \frac{\psi_0'}{\psi_0}\right) .$$

В этой статье мы хотим обратить внимание на систему, в которой, с одной стороны, все возбужденные уровни двукратно вырождены (что характерно для суперсимметрии), с другой стороны, $E_0 = -\infty$, а ψ_0 имеет настолько экзотический вид,

$$\psi_0 = \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{-|x|\alpha}}{\sqrt{\alpha}} ,$$

что выражение ψ_0'/ψ_0, фигурирующее в (I), становится бессмысленным. Мы имеем в виду одномерный атом водорода /2/, описываемый уравнением

$$\hat{\mathcal{H}}\psi(x) = \left(-\tfrac{1}{2}\partial_x^2 - |x|^{-1}\right)\psi(x) = E\psi(x) . \tag{2}$$

Эта система не так далека от реальности, как может показаться. Она, например, хорошо отражает поведение атома водорода в сильном магнитном поле пульсара (10^{12} Гс). В самом деле, если $\vec{B} = (B, 0, 0)$, то $\sqrt{y^2 + z^2} = \rho_c = (c\hbar/eB)^{1/2} \cong 3 \cdot 10^{-11}$ см, т.е. поперечные размеры атома почти на три порядка меньше его продольного размера (боровского радиуса). В результате в экстремально сильном магнитном поле пульсара атом водорода значительно деформируется в поперечнике и приближается к одномерной системе (2).

На суперсимметричный характер одномерного атома водорода (IH) было указано сравнительно недавно в работах[3,4], однако при этом в стороне остался наиболее важный вопрос – явный вид зарядовых операторов Q и Q^{+}.

Как уже говорилось, схема Виттена в координатном представлении (2) не проходит. Ключ к решению вопроса лежит в совершенно другой плоскости.

В работах[5,6] было показано, что одномерному атому водорода присуща скрытая симметрия O(2), которая выявляет себя лишь в импульсном представлении. Ниже мы поймем, что то же самое относится и к суперсимметрии, т.е. что суперсимметрия, скрытая в координатном представлении, становится явной для перехода к импульсному представлению.

Умножим уравнение (2) на $2|x|$ и приведем его к виду

$$|x|(\hat{p}^2-2E)\psi = 2\psi. \tag{3}$$

Здесь через $\hat{p}$ обозначен оператор импульса $(-i\partial_x)$; как и в (2), приняты атомные единицы $\hbar = m = e = 1$. Подействуем на уравнение (3) слева оператором

$$\hat{\mathcal{K}} = (\hat{p}^2-2E)|x|(\hat{p}^2-2E)$$

и перейдем от $\psi(x)$ к новой функции

$$\chi(x) = (\hat{p}^2-2E)\psi(x).$$

Тогда вместо (3) получим уравнение

$$(\hat{p}^2-2E)|x|(\hat{p}^2-2E)|x|\,\chi(x) = 4\chi(x). \tag{4}$$

Далее, легко убедиться, что

$$|x|\hat{p}^2 - \hat{p}^2|x| = 2i\,\mathrm{sign}\,x - 2\delta(x).$$

Отсюда следует, что

$$|x|(\hat{p}^2-2E)|x| = (\hat{p}^2-2E)x^2 - 2i\hat{p}x. \tag{5}$$

Учитывая (5), получаем вместо (4) уравнение

$$\left[(\hat{p}^2-2E)^2x^2 + 2i(\hat{p}^2-2E)\hat{p}x\right]\chi(x) = 4\chi(x).$$

Теперь можно перейти к импульсному представлению, используя анзац

$$\hat{p} = -i\partial_x \to p \quad , \quad x \to i\partial_p \, .$$

На этом пути мы приходим к уравнению

$$(p^2-2E)^2 \frac{d^2\varphi}{dp^2} + 2(p^2-2E)p\frac{d\varphi}{dp} + 4\varphi = 0 \, , \tag{6}$$

которое заменяет первоначальное уравнение (2) и в котором через $\varphi(p)$ обозначен фурье-образ функции $\chi(x)$.

Есть подстановка

$$p = \sqrt{-2E} \cdot \mathrm{tg}\, \frac{\varphi}{2} \tag{7}$$

$(-\pi \le \varphi \le \pi)$, которая сильно упрощает уравнение (6). Эта подстановка является одномерным аналогом стереографической проекции, используемой в теории атома водорода [7]. Введем обозначение $\Phi(p) \equiv G(\varphi)$. Тогда, с учетом (7), вместо (6) имеем уравнение

$$\frac{d^2G}{d\varphi^2} - \frac{1}{2E}G = 0 \, .$$

Мы пришли к замечательному выводу - одномерный атом водорода на языке переменной φ тождествен плоскому ротатору с гамильтонианом $\hat{h} = (-i\partial_\varphi)^2$:

$$\hat{h}\, G(\varphi) \equiv (-i\partial_\varphi)^2 = \epsilon\, G(\varphi) \tag{8}$$

Здесь ϵ связано с E соотношением

$$\epsilon = -\frac{1}{2E} \, .$$

Система (8) суперсимметрична. В самом деле

$$\epsilon_n = n^2 \quad , \quad n = 0, 1, \ldots\ldots$$

Таким образом, основное состояние $\epsilon_0 = 0$, чему соответствует $E_0 = -\infty$. Все возбужденные уровни двукратно вырождены: каждому n -му уровню соответствуют две волновые функции (четная и нечетная)

$$G_n^{(+)} = C \cdot \cos n\varphi \quad , \quad G_n^{(-)} = C \cdot \sin n\varphi \, .$$

Функция основного состояния $G_0^{(+)} = const$.

Введем операторы

$$Q = \frac{1}{2}(1-\mathcal{P})(-i\partial_\varphi) \quad , \quad Q^+ = \frac{1}{2}(1+\mathcal{P})(-i\partial_\varphi) ,$$

где $\mathcal{P}$ – оператор четности:

$$\mathcal{P} f(\varphi) = f(-\varphi) .$$

Простые вычисления, учитывающие, что операторы $\mathcal{P}$ и $(-i\partial_\varphi)$антикоммутируют, убеждают, что

$$\hat{h} = QQ^+ + Q^+Q \quad ,$$

$$Q^2 = 0 \quad , \quad (Q^+)^2 = 0 ,$$

$$[Q, \hat{h}] = 0 \quad , \quad [Q^+, \hat{h}] = 0 .$$

Эти соотношения говорят о том, что $\hat{h}$ – супергамильтониан, Q и Q^+ – зарядовые операторы.

Супергамильтониан можно представить в виде суммы суперпартнеров

$$\hat{h}_B = Q^+Q = \frac{1}{2}(1+\mathcal{P})(-i\partial_\varphi)^2 ,$$

$$\hat{h}_F = QQ^+ = \frac{1}{2}(1-\mathcal{P})(-i\partial_\varphi)^2 .$$

Пары $(\hat{h}_B, G_n^{(+)})$ и $(\hat{h}_F, G_n^{(-)})$реализуют "бозонный" и "фермионный" секторы. Легко показать, что операторы Q и Q^+ устанавливают связи между этими секторами.

$$Q G_n^{(+)} = in G^{(-)} \quad , \quad Q G_n^{(-)} = 0 ,$$

$$Q^+ G_n^{(+)} = 0 \quad , \quad Q^+ G_n^{(-)} = -in G_n^{(+)} .$$

Теперь подведем итоги. В координатном представлении одномерный атом водорода выходит за рамки систем,поддающихся анализу Виттена. При переходе к импульсному представлению с последующим "стереографическим" проецированием (3) ситуация становится нормальной, т.е. проходит схема Виттена. Таким образом, мы приходим к выводу, что суперсимметрия одномерного атома водорода скрыта. Она выявляется лишь после перехода 1H к эквивалентному ему плоскому ротатору.

Литература

1. Witten E. Nucl. Phys. 1981, B188, 513.
2. Loudon R. Amer. J. Phys. 1959, 27, 649.
3. Umbo T.O. and Sukharte U.P. Phys. Rev. Lett. 1985, 54, 2184.
4. Haymaker R.N. and Rau A.R.P. Amer. J. Phys. 1986, 54, 928.
5. Davtyan L.S., Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M. J. Phys. A. 1987, 20, 2765,
6. Boya L.J., Kmiecik M., Bohm A. Phys. Rev. A, 1988, 37, 3567.
7. Bander M., Hzykson G. Rev. Modern. Phys. 1966, 38, 330, 346.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 марта 1989 года.