89-121

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

К 872

Р5-89-121

Д.В.Ктитарев

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ФОРМУЛА ФЕЙНМАНА - КАЦА В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Направлено в журнал "Letters
in Mathematical Physics"

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

Связь между дифференциальными уравнениями в частных производных и интегрированием по пространству траекторий была обнаружена Фейнманом [1] при разработке нового подхода к квантовой механике. Кац [2] получил для решения уравнения теплопроводности формулу в виде интеграла по мере Винера в пространстве непрерывных функций, в дальнейшем известную как "формула Фейнмана - Каца". В настоящее время метод континуального интегрирования прочно занял свое место в современной квантовой теории поля и статистической физике [3]. Однако до сих пор не существует единого математически строгого определения функционального интеграла. Одним из подходов к решению этой проблемы является построение формул типа Фейнмана - Каца для различных видов дифференциальных уравнений [4,5].

В последние годы интенсивно развивается теория суперсимметричных моделей - суперанализ для функций коммутирующих и антикоммутирующих переменных [6,7]. Один из вариантов формулы Фейнмана - Каца в суперанализе - формальное выражение для символа оператора эволюции суперсимметричной системы - рассматривался в [8]. Для некоторых классов уравнений в суперпространстве такие формулы, содержащие хронологическую экспоненту, были получены в [9].

В настоящей статье приводится аналог формулы Фейнмана - Каца для другого класса линейных эволюционных уравнений в суперпространстве. Используется дифференциальное и интегральное исчисление в суперанализе [10], развитое для бесконечномерного случая в [9]. Псевдодифференциальные операторы для бесконечномерных распределений были определены в [11]. Решение эволюционного уравнения представлено в виде ряда, который может служить одним из возможных определений хронологической экспоненты символа псевдодифференциального оператора /ср. [5,12] /.

2. ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ - банахова коммутативная супералгебра /КСА/ над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ [10], а $A = A_0 \oplus A_1$ - бесконечномерная псевдотопологическая КСА над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, в которой четные элементы нильпотентны /кроме чисел/, а аннулятор нечетной части тривиален: ${}^{\perp}A_1 = \{a \in A \mid aA_1 = 0\} = 0$ /9/. Символом $\mathbb{R}_A^{n,m}$ обозначим суперпространство $\underbrace{A_o \times \ldots \times A_o}_{n} \times \underbrace{A_1 \times \ldots \times A_1}_{m}$ над КСА A.

Пусть, далее, f – финитная бесконечно дифференцируемая функция, определенная на $\mathbb{R}^n$ и принимающая значения в пространстве Λ-значных полиномов от антикоммутирующих переменных $\mathcal{P}(A_1^m, \Lambda)$. Структура КСА A позволяет продолжить функцию f с $\mathbb{R}^n$ на A_o^n /ср. /7, с. 58/ /. Назовем пространство таких продолжений пространством бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}_A^{n,m}$, финитных по вещественным направлениям, и обозначим его через $\mathfrak{D}(\mathbb{R}_A^{n,m}, \Lambda)$.

Преобразование фурье-функции $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}_A^{n,m}, \Lambda)$ определяется равенством

$$\mathcal{F} f(y, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times A_1^m} d^n t d^m \theta f(t, \theta) \exp\{i(y,t) + i(\theta, \xi)\},$$

где $t \in \mathbb{R}^n$, $y \in A_o^n$, $\theta, \xi \in A_1^m$,

$$(y, t) = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i, \qquad (\theta, \xi) = \sum_{j=1}^{m} \theta_j \xi_j .$$

Здесь и далее мы будем обозначать одной и той же буквой саму функцию $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}_A^{n,m}, \Lambda)$ и ее ограничение с A_o^n на $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $Z(\mathbb{R}_A^{n,m}, \Lambda)$ пространство фурье-образов функций из $\mathfrak{D}(\mathbb{R}_A^{n,m}, \Lambda)$. Оператор $\mathcal{F}$ является изоморфизмом пространств $\mathfrak{D}$ и Z, причем для $\phi \in Z$

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^n i^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times A_1^n} d^n y d^m \xi \, \phi(y, \xi) \times$$

$$\times \exp\{-i(y, x) - i(\theta, \xi)\}.$$

Пусть $H: \mathbb{R}_A^{n,m} \times \mathbb{R}_A^{n,m} \to \Lambda$ – бесконечно дифференцируемая функция. Суперпсевдодифференциальный оператор (S -ПДО) $H(x, \theta, -i\partial, iD)$ с pq-символом H определяется на пространстве $Z(\mathbb{R}_A^{n,m}, \Lambda)$ следующим образом:

$$H(x,\theta,-i\partial,iD)\,\phi(x,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n i^m}\int_{R^{2n}\times A_1^{2m}} d^n p\, d^n q\, d\xi_m d\eta_m \dots d\xi_1 d\eta_1 \times$$

$$\times H(x,\theta,p,\eta)\,\phi(q,\xi)\exp\{i(p,q)-i(p,x)+i\xi(\eta-\theta)\}.$$

Пусть $Z'(R_A^{n,m},\Lambda)$ – пространство Λ-линейных непрерывных функционалов $L: Z\to\Lambda$. Тогда S-ПДО $H(x,\theta,-i\partial,iD)$ с pq-символом H определяется равенством

$$<Hu,\phi> = <u,H^*\phi>,\quad u\in Z',\ \phi\in Z,$$

а оператор H^*действует по правилу

$$H^*(x,\theta,-i\partial,iD)\,\phi(x,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n i^m}\int_{R^{2n}\times A_1^{2m}} d^n p\, d^n q\, d\xi_m d\eta_m \dots d\xi_1 d\eta_1 \times$$

$$\times H(q,\xi,-p,-\eta)\,\phi(q,\xi)\exp\{i(p,q)-i(p,x)+i\xi(\eta-\theta)\}.$$

3. ФОРМУЛА ФЕЙНМАНА – КАЦА В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим следующую задачу Коши в суперпространстве:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x,\theta) = H(t,x,\theta,-i\partial,iD)\,u(t,x,\theta),\\ u(0,x,\theta) = u_o(x,\theta).\end{cases} \qquad /1/$$

Решением этой задачи будем называть дифференцируемую функцию $u:[0,T]\to Z'(R_A^{n,m},\Lambda)$, которая в точке 0 представляет собой регулярный функционал, определяемый функцией $u_o: R_A^{n,m}\to\Lambda$.

Предполагается, что символ S-ПДО H имеет вид

$$H(t,x,\theta,y,\xi) = \sum_{\substack{|\alpha|\le N\\ |\beta|\le m}} h_{\alpha\beta}(t,x,\theta)\,y^\alpha\xi^\beta,$$

где (x,θ), $(y,\xi)\in R_A^{n,m}$, $(\alpha,\beta)\in Z_+^{n+m}$, $Z_+ = \{0,1,2,\dots\}$,

$$y^\alpha\xi^\beta = y^{\alpha_1}\dots y^{\alpha_n}\,\xi^{\beta_1}\dots\xi^{\beta_m},\qquad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i,\quad |\beta| = \sum_{j=1}^m \beta_j,$$

а функции $h_{\alpha\beta} : [0,T] \times \boldsymbol{R}_A^{n,m} \to \Lambda$ удовлетворяют следующим условиям:

$$h_{\alpha\beta}(t,x,\theta) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n \times A_1^m} \exp\{i(x,p) + i(\theta,\eta)\} \tilde{h}_{\alpha\beta}(t, dp, \eta) d^m\eta ,$$

где $\tilde{h}_{\alpha\beta}$ - семейства борелевских Λ-значных мер на $\boldsymbol{R}^n$, зависящих от параметров $t \in [0,T]$, $\eta \in A_1^m$, причем

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(t, dp, \eta) = \sum_{|\ell| \le m} \tilde{h}^{\ell}_{\alpha\beta}(t, dp) \eta^{\ell}, \quad p \in \boldsymbol{R}^n, \ \eta \in A_1^m,$$

и для любых индексов α, β, ℓ и любого борелевского множества $B \subset \boldsymbol{R}^n$ функции $\tilde{h}^{\ell}_{\alpha\beta}(t, B) : [0,T] \to \Lambda$ измеримы, и

$$\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \| \tilde{h}^{\ell}_{\alpha\beta}(\tau, dp) \| < C_H, \ C_H > 0. \qquad /2/$$

Предполагается также, что для функции u_o выполнено следующее условие:

$$u_o(x,\theta) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n \times A_1^m} \exp\{i(x,p) + i(\theta,\eta)\} \tilde{u}_o(dp, \eta) d\eta,$$

где $\tilde{u}_o(dp, \eta)$ - семейство Λ-значных борелевских мер на $\boldsymbol{R}^n$, зависящих от параметра $\eta \in A_1^m$, причем

$$\tilde{u}_o(dp, \eta) = \sum_{|\beta| \le m} \tilde{u}_{o\beta}(dp) \eta^{\beta}, \quad p \in \boldsymbol{R}^n, \ \eta \in A_1^m ,$$

и для любых индексов β

$$\int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \| u_{o\beta}(dp) \| < C_{u_o}, \ C_{u_o} > 0. \qquad /3/$$

Введем обозначение

$$\tilde{H}(t, dp, \eta, y, \xi) = \sum_{\substack{|\alpha| \le N \\ |\beta| \le m}} \tilde{h}_{\alpha\beta}(t, dp, \eta) y^{\alpha} \xi^{\beta}.$$

Теорема. Функция

$$u(t,x,\theta) = \sum_{k=o}^{\infty} \int\limits_o^t ds_k \int\limits_o^{s_k} ds_{k-1} \dots \int\limits_o^{s_2} ds_1 \int \tilde{u}_o(dp_o, \eta_o) \tilde{H}(s_1, dp_1, \eta_1, -p_o, -\eta_o) \times$$

$$\times \ldots \times \tilde{H}(s_k, dp_k, \eta_k, -\sum_{j=1}^{k-1} p_j, -\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j) \times \qquad /4/$$

$$\times \exp\{i(x, \sum_{j=1}^{k} p_j) + i(\theta, \sum_{j=1}^{k} \eta_j)\} d\eta_k \ldots d\eta_o -$$

- решение задачи Коши /1/.

Доказательство. Покажем вначале, что ряд /4/ сходится в пространстве $Z'(R_A^{n,m}, \Lambda)$. Пусть $\phi \in Z(R_A^{n,m}, \Lambda)$, $\tilde{\phi} = \mathfrak{F}\phi$, $\operatorname{supp}\phi|_{R^n} \subset B_R$, $B_R = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq R\}$, $\tilde{\phi} = \sum_{|\gamma| \leq m} \tilde{\phi}_\gamma(x)\theta^\gamma$, $\|\tilde{\phi}|_{R^n}\| \leq C_{\tilde{\phi}}$.

Используя оценки /2/-/3/, получаем

$$\|(u,\phi)\| = \|\int_{R^n \times A_1^m} u(t,x,\theta)\phi(x,\theta)dxd\theta\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=o}^{\infty} \|\int_o^t ds_k \ldots \int_o^{s_2} ds_1 \int (\sum \tilde{u}_{o\beta_o}(dp_o)\eta_o^{\beta_o}) \times$$

$$\times (\sum \tilde{h}^{\ell_1}_{\alpha_1\beta_1}(s_1, dp_1)\eta_1 (-p_o)^{\alpha_1}(-\eta_o)^{\beta_1}) \times \ldots \times$$

$$\times (\sum \tilde{h}^{\ell_k}_{\alpha_k\beta_k}(s_k, dp_k)\eta_k^{\ell_k}(-\sum_{j=1}^{k-1} p_j)^{\alpha_k}(-\sum_{j=1}^{k-1}\eta_j)^{\beta_k} \times$$

$$\times (\sum \tilde{\phi}_\gamma(\sum_{j=1}^{k} p_j)(\sum_{j=1}^{k}\eta_j)^\gamma) d\eta_k \ldots d\eta_o \| \leq$$

$$\leq \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{\alpha\beta\ell\gamma} \|\int_o^t ds_k \ldots \int_o^{s_2} ds_1 \int \tilde{u}_{o\beta_o}(dp_o) \times$$

$$\times \tilde{h}^{\ell_1}_{\alpha_1\beta_1}(s_1, dp_1)(-p_o)^{\alpha_1} \times \ldots \times h^{\ell_k}_{\alpha_k\beta_k}(s_k, dp_k)(-\sum_{j=1}^{k-1} p_j)^{\alpha_k} \tilde{\phi}_\gamma(\sum_{j=1}^{k} p_j)\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k!}(4m)^{m^2}(N^n)^k C_{u_o} C_H^k R^k C_{\tilde{\phi}} = C_1 \exp C_2.$$

Далее, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t}(u,\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t ds_k \dots \int_0^{s_2} ds_1 \times \int \tilde{u}_0(dp_0, \eta_0) \times$$

$$\times \tilde{H}(s_1, dp_1, \eta_1, -p_0, -\eta_0) \dots \tilde{H}(s_k, dp_k, \eta_k, -\sum_{j=1}^{k-1} p_j, -\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j) \times$$

$$\times \tilde{H}(t, dp_{k+1}, \eta_{k+1}, -\sum_{j=1}^{k} p_j, -\sum_{j=1}^{k} \eta_j) \phi(x,\theta) \times$$

$$\times \exp\{i(x, \sum_{j=1}^{k+1} p_j) + i(\theta, \sum_{j=1}^{k+1} \eta_j)\} d\eta_{k+1} \dots d\eta_0 \, dx \, d\theta,$$

и

$$\int \tilde{H}(t, dp_{k+1}, \eta_{k+1}, -\sum_{j=1}^{k} p_j, -\sum_{j=1}^{k} \eta_j) \exp\{i(x, p_{k+1}) + i(\theta, \eta_{k+1})\} \times$$

$$\times \phi(x,\theta) \exp\{i(x, \sum_{j=1}^{k} p_j) + i(\theta, \sum_{j=1}^{k} \eta_j)\} ds \, d\theta =$$

$$= \int H(t, x, \theta, -\sum_{j=1}^{k} p_j, -\sum_{j=1}^{k} \eta_j) \phi(x,\theta) \exp\{i(x, \sum_{j=1}^{k} p_j) + i(\theta, \sum_{j=1}^{k} \eta_j)\} dx \, d\theta =$$

$$= \mathfrak{F}(H^*\phi)(\sum_{j=1}^{k} p_j, \sum_{j=1}^{k} \eta_j),$$

то $\frac{\partial}{\partial t}(u,\phi) = (u, H^*\phi)$.

Очевидно, что $u(0,x,\theta) = u_0(x,\theta)$. Тем самым доказано, что u - решение задачи Коши /1/.

Ряд /4/ можно считать определением континуального интеграла, представляющего оператор эволюции суперсимметричной системы с гамильтонианом $H(t,x,\theta,p,\eta)$:

$$U_t = \int T\text{-}\exp\{\int_0^t (H(\tau,x,\theta,p,\eta) - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i p_i - \sum_{j=1}^{m} \dot{\theta}_j \eta_j) d\tau\} \prod_{\tau \in [0,t]} dx(\tau) d\theta(\tau) dp(\tau) d\eta(\tau).$$

Таким обрвзом, мы видим, что при решении эволюционных уравнений в суперпространстве появляется континуальный интеграл в виде хронологического упорядочивания символов псевдодифференциального оператора. Такое определение континуального интеграла представляется вполне естественным, т.к. для некоторых гамильтонианов, зависящих только от коммутирующих аргументов, ряд /4/ можно записать в виде обычного интеграла по мере [5,12].

В заключение автор выражает благодарность А.Ю.Хренникову за многочисленные плодотворные дискуссии, а также проф. В.Г.Маханькову за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feynmann R.P. - Rev. Mod. Phys., 1948, v.20, p.367.
2. Kac M. - In: Proc. 2nd Berceley Symp. Math. Stat. and Prob. Berkeley: Univ. Calif. Press, 1951, p.189.
3. Попов В.Н. - Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
4. Рид. М., Саймон Б. - Методы современной математической физики, т.2. М.: Мир, 1978; см. также библиогр. к гл. X.II.
   Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. - Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983, см. также библиогр. к гл. VI.
5. Watanabe H. - J. Funct. Anal., 1986, v.65, p.204.
6. Rogers A. - J. Math. Phys., 1981, v.22, p.939.
   DeWitt B. - Supermanifolds. Cambridge: Camb. Univ. Press., 1984.
7. Березин Ф.А. - Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд. МГУ, 1983.
8. Березин Ф.А. - ТМФ, 1971, т.6, с.194.
9. Хренников А.Ю. - ТМФ, 1987, т.73, с.420; УМН, 1988, т.43, с.87.
10. Владимиров В.С., Волович И.В. - ТМФ, 1984, т.59, с.3; т.60, с.169.
11. Смолянов О.Г. - Доклады АН СССР, 1982, т.263, с.558.
12. Ктитарев Д.В. - Матем. заметки, 1987, т.42, с.40; препринт ОИЯИ Р5-88-119, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 февраля 1989 года.