ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P5-88-875

Ч.Д.Палев *

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ gl_∞ СО СТАРШИМ ВЕСОМ

Направлено в журнал "Функциональный анализ
и его приложения"

*Институт ядерных исследований и ядерной
энергетики БАН, София

1988

В настоящей заметке рассмотрен класс неприводимых модулей общей бесконечномерной линейной алгебры Ли gl_∞. В каждом модуле введен базис и выписаны явные выражения для преобразований базиса под действием образующих алгебры.

Представления и свойства алгебры gl_∞ изучались многими авторами /см.[1] и цитированную там литературу/. В явном виде, однако, преобразования неприводимых gl_∞ модулей /в каком-то базисе/ выписаны только для узкого класса представлений[2].

Определим gl_∞ в виде

$$gl_\infty = \{(a_{ij})_{i,j \in \mathbf{Z}} \mid a_{i,j} \neq 0 \qquad /1/$$

для конечного множества индексов $i, j\}$.

Эта алгебра является алгеброй Ли группы $GL_\infty = \{A = (A_{ij})_{i,j \in \mathbf{Z}}$ $| A^{-1}$ существует; $A_{ij} - \delta_{ij} \neq 0$ для конечного множества индексов $i, j\}$.

Пусть $e_{ij} \in gl_\infty$ - бесконечная вейлевская матрица, т.е. (ij) -й элемент этой матрицы равен единице, а все остальные - нулю. Совокупность всех $e_{ij}, i,j \in \mathbf{Z}$ задает базис в gl_∞. Обозначим пару x, y через $(x, y)_0$, а y, x - через $(x, y)_1$. Тогда генераторы $e_{(-k,k-\theta)}$, где $k \in \mathbf{N}$, $\theta, \xi = 0,1$ и $e_{kk}, k \in \mathbf{Z}$ порождают всю алгебру.

Целью работы является построение всех неприводимых представлений алгебры gl_∞, таких, что:(i)- каждое представление интегрируемо до представления GL_∞ и, кроме того,(ii) - в пространстве представления содержится вектор,который аннулируется генераторами e_{ij}, $i < j$,т.е. всеми верхнетреугольными матрицами.Этот вектор будет по определению старшим вектором представления.
В более общем случае,выбирая "борелевскую" подалгебру в gl_∞ иным путем,можно строить также и другие, неэквивалентные, перечисленные ниже неприводимые представления со старшим весом.

Лемма. Неприводимые модули со старшим весом /в вышеупомянутом смысле/ алгебры gl_∞ находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством всевозможных числовых наборов $[m] = \{m_k \mid m_k \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z};\ i < j \to m_i \geq m_j\}$.

Доказательство леммы и последующих утверждений опускаются. Обозначим через $W([m])$ неприводимый gl_∞ модуль, соответствующий набору $[m]$. Пусть (m) - бесконечная числовая схема, состоящая из чисел $m_{i,2k-\theta}$, где $\theta = 0,1, k \in \mathbf{N}, i \in \mathbf{Z}, \theta - k \le i \le k-1$, которые удовлетворяют условиям:

/а/ $m_{i-\theta,2k+1-\theta} \ge m_{i,2k-\theta}$, $m_{i,2k-\theta} \ge m_{i+1-\theta,2k+1-\theta}$ для всех $\theta = 0,1, k \in \mathbf{N}, i \in \mathbf{Z}, \theta - k \le i \le k-1$;

/б/ существует $N[(m)] \in \mathbf{N}$, такое, что для всех $k > N[(m)]$ и для всех $i, \theta-k \le i \le k-1$, где $\theta = 0,1$, выполнено $m_{i,2k-\theta} = m_i$. Обозначим через $\Gamma([m])$ совокупность всех схем (m), удовлетворяющих условиям /а/ и /б/. Далее положим $\ell_{ij} = m_{ij} - i$ и пусть $(m)_{\pm ij}$ есть схема, которая получается из (m) заменой m_{ij} на $m_{ij} \pm 1$.

Предложение 1. Множество схем $\Gamma([m])$ задает базис в gl_∞ модуле $W([m])$. Генераторы /порождающие алгебру/ преобразуют этот базис следующим образом:

$$e_{(-k,k-\theta)\xi}(m) = \sum_{j=\theta-k}^{k-1} \left| \frac{\prod\limits_{i=-k}^{k-\theta} [\ell_{i,2k+1-\theta} - \ell_{j,2k-\theta} + \xi(1-2\theta)] \prod\limits_{i=1-k}^{k-1-\theta} [\ell_{i,2k-1-\theta} - \ell_{j,2k-\theta} + \xi(1-2\theta)]}{\prod\limits_{i \ne j=\theta-k}^{k-1} [\ell_{i,2k-\theta} - \ell_{j,2k-\theta} + (-1)^{\xi}\theta][\ell_{i,2k-\theta} - \ell_{j,2k-\theta} + (-1)^{\xi}(\theta-1)]} \right|^{1/2} \times$$

$$\times (m)_{(-1)^{\xi+\theta}j,2k-\theta}, \qquad /2/$$

где $k \in \mathbf{N}, \theta = 0,1 \quad \xi = 0,1$;

$$e_{kk}(m) = \Big\{ \sum_{i=-|k|}^{|k|+\theta(k)-1} m_{i,2|k|+\theta(k)} - \sum_{i=-|k|+1-\theta(k)}^{|k|-1} m_{i,2|k|+\theta(k)-1} \Big\}(m), \qquad /3/$$

где $k \in \mathbf{Z}$, $\theta(k) = \begin{cases} 1, k \ge 0 \\ 0, k \leqslant 0 \end{cases}$, а в случае $k = 0$ второе слагаемое в сумме следует убрать.

Из /3/ видно, что базис $\Gamma([m])$ состоит из собственных векторов /картановских/ генераторов e_{kk}, т.е. из весовых векторов. Схема $(m)_0$, у которой $m_{i,k} = m_i$ для любого $k \in \mathbf{N}$ и для любого допустимого i аннулируется генераторами $e_{-k,k-\theta}, k \in \mathbf{N}, \theta = 0,1$. Нетрудно

показать, что $(m)_0$ аннулируется также и всеми верхнетреугольными матрицами. Поэтому $(m)_0$ - старший вектор в $W([m])$. Более того, $e_{kk}(m)_0 = m_i(m)_0, \forall k \in \mathbf{Z}$ и потому числа $m_i, i \in \mathbf{Z}$ являются координатами старшего веса в базисе $e^k, k \in \mathbf{Z}$, сопряженном $e_{kk}, k \in \mathbf{Z}$.

Предложение 2. Введем метрику в $W([m])$, постулируя, что базис $\Gamma([m])$ ортонормирован. Тогда $(e_{ij})^+ = e_{ji}$, а представление вещественной формы u_∞, натянутой на генераторах $i(e_{pq} + e_{qp})$, $e_{pq} - e_{qp}$, $p, q \in \mathbf{Z}$ интегрируется до унитарного представления группы U_∞.

Формулы /2/ и /3/ задают также представление конечномерной подалгебры $gl(2N+1) \subset gl_\infty$ с генераторами $e_{ij}, -N \le i, j \le N$ для всякого фиксированного $N \in \mathbf{N}$. В частности, неприводимый $gl(2N+1)$ модуль, содержащий $(m)_0$, имеет сигнатуру $(m_{-N}, m_{-N+1}, \dots, m_{N-1}, m_N)$. Его базис состоит из всех схем (m), у которых $m_{i,k} = m_i$ для любого $k \ge 2N+1$ и для любого допустимого i. Этот базис несколько отличается от базиса Гельфанда - Цетлина[3], ибо здесь разложение идет вдоль цепочки подалгебр

$$gl(2N+1) \supset gl(2N) \supset \dots \supset gl(2k+1) \supset gl(2k) \supset \dots \supset gl(2) \supset gl(1),$$

где алгебра $gl(2k+1)$ [соотв. $gl(2k)$] натянута на e_{ij}, для $-k \ge i, j \ge k$ [соотв. $-k \ge i, j \ge k-1$]. По существу векторы в базисе Гельфанда - Цетлина и в возникающем здесь базисе для $gl(2N+1)$ одни и те же, однако занумерованы они по-разному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kac V.G., Raina A.K. Bomby Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras - Advanced Series in Mathematical Physics, v.2, 1987, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.
2. Kac V.G., Peterson D.H. - Proc. Nat. Acad. Sci. USA. - 1981, v.78, p.3308.
3. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л. - ДАН СССР. - 1950, т.71, с.825.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1988 года.