

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Б-742

P5-88-873

А.А.Боголюбская, И.Л.Боголюбский

ДВУМЕРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ
В МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ
АНИЗОТРОПНОГО МАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

1988

I. Настоящая работа является продолжением исследований авторами D-мерных ($D=2,3$) топологических солитонов в моделях Гейзенберга с положительно-определенными слагаемыми в гамильтониане, имеющими четвертый порядок по пространственным производным^{/1-3/}. Изучение условий существования устойчивых неодномерных солитонов в рамках моделей Гейзенберга представляет очевидный интерес ввиду разнообразных приложений модели, в том числе ее использования при поисках механизмов высокотемпературной (ВТ) сверхпроводимости^{/4/}. Отметим, что вследствие анизотропии и слоистой структуры ВТ-сверхпроводников (см., например,^{/5/}) особенно интересными представляются исследования двумерной анизотропной модели Гейзенберга. В работах^{/1,6,2/} было показано, что для существования устойчивых стационарных солитонов эта модель должна быть дополнена стабилизирующими членами; отметим, что подобные члены со старшими порядками производных появляются, например, при учете коротковолновых флуктуаций Померанчука, физическая природа которых обсуждается в^{/4/}. В работах^{/2,3/} стабилизирующий член был выбран в форме, аналогичной члену Скирма в трехмерном пространстве^{/7/}, и с помощью ЭВМ были найдены двумерные стационарные топологические солитоны. В данной работе мы изучаем двумерную анизотропную модель с другим членом четвертого порядка и сравниваем результаты с ранее полученными в^{/2,3/}.

2. Как и в работах^{/2,3,6/}, будем рассматривать анизотропию типа "легкая ось"^{/8/}. Пусть плотность гамильтониана имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 = \alpha^2 (\partial_i s^a)^2 + \beta^2 \sin^2 \theta + \gamma^2 (\partial_i s^a \partial_i s^a)^2, \quad (I)$$

где α, β, γ - постоянные, $i=1,2$, $a=1,2,3$, $s^a s^a=1$, θ - угол между ортом \vec{e}_3 оси "легкого намагничивания" и единичным вектором $\vec{s} = (s^1, s^2, s^3)$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Система (I) имеет два вакуумных состояния, $\vec{s}(x) = \vec{s}_0 = \pm \vec{e}_3$, для которых $\mathcal{H}_k \equiv 0$, $k=1,2,3$. Солитонном будем называть локализованное возмущение вакуумного состояния (для определенности выберем $\vec{s}_0 = +\vec{e}_3$), являющееся решением уравнений движения и обладающее конечной энергией $H = \int \mathcal{H} d^2x$. Стационарные солитоны удовлетворяют уравнению $\frac{\delta H}{\delta s^a} = 0$. Устойчивые солитоны должны соответствовать минимумам функционала H (эти минимумы могут быть локальными).

Как и в работе^{/2/}, методом масштабных преобразований^{/9/} нетрудно показать, что двумерные солитоны существуют только при $\gamma \neq 0$, причем для солитонных решений выполняется равенство

$$H_2 = H_3, \quad (2)$$

где $H_k = \int \mathcal{H}_k d^2x$, $k=1,2,3$.

3. После перехода к безразмерным переменным $\vec{z} = (x_d, y_d) = \alpha^{-1} \beta \vec{R}$, $\vec{R} = (x_1 = x, x_2 = y)$, соотношение (I) принимает вид

$$\mathcal{H} = \beta^2 [(\partial_i s^a)^2 + \sin^2 \theta + \rho (\partial_i s^a \partial_j s^a)^2] \quad (3)$$

где $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_d}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y_d}$, $\rho = \beta^2 \gamma^2 \alpha^{-4}$.

Граничное условие $\vec{s}(\infty) = \vec{e}_3$ компактифицирует пространство R^2 и позволяет осуществлять взаимно-однозначные непрерывные отображения R^2 на единичную сферу S^2 . Локализованные распределения $\vec{s}(\vec{x})$, осуществляющие такие отображения, распадаются на классы с различными значениями целочисленного топологического индекса, или степени отображения $R^2_{comp} \rightarrow S^2$, который мы обозначим Q_t ,

$$Q_t = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{ik} \varepsilon^{abc} s^a \frac{\partial s^b}{\partial x^i} \frac{\partial s^c}{\partial x^k} d^2x, \quad (4)$$

ε_{ik} , ε^{abc} - абсолютно антисимметричные единичные псевдотензоры, $i, k=1,2$, $a, b, c=1,2,3$ /70,10/.

Для получения локализованных распределений $s^a(x_i)$ будем использовать известную подстановку (см., напр., /70,8/):

$$s^1 = \sin \theta \cdot \cos \chi, \quad s^2 = \sin \theta \cdot \sin \chi, \quad s^3 = \cos \theta, \quad (5)$$

$$\chi = m\varphi, \quad (6)$$

$$\theta = \theta(z), \quad z^2 = x_d^2 + y_d^2, \quad (7)$$

где $x_d = z \cdot \cos \varphi$, $y_d = z \cdot \sin \varphi$.

Топологический заряд Q_t распределений $s^a(x_i)$, задаваемых формулами (5), (6), (7), вычисляется по формуле^{/8/}

$$Q_t = \frac{m}{2} [\cos \theta(\infty) - \cos \theta(0)]. \quad (8)$$

В случае $Q_t = 1$ подстановка (5), (6), (7) дает хорошо обоснованный способ искать солитонное решение^{/70,11,3/}. При $Q_t > 1$ вопрос о выборе эффективной подстановки для нахождения абсолютного минимума функционала энергии при фиксированном Q_t остается открытым^{/3/}. Однако при любом Q_t подстановка (5), (6), (7) приводит к распределению $\mathcal{H}(x_i)$, не зависящему от угла φ ,

$$\mathcal{H}(z) = \beta^2 \left\{ \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \frac{m^2}{z^2} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta + \rho \left[\left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \frac{m^2}{z^2} \sin^2 \theta \right]^2 \right\}. \quad (9)$$

4. В отличие от случая, рассмотренного в работах^{/2,3/}, где член \mathcal{H}_3 четвертого порядка выбирался в форме

$$\mathcal{H}_3 = \gamma^2 [(\partial_i s^a \partial_j s^a)^2 - (\partial_i s^a \partial_j s^a)^2], \quad (10)$$

в рассматриваемой модели (I) заранее не исключено существование нетопологических ($Q_t = 0$) стационарных солитонов вида

$$s^1 = \sin \theta, \quad s^2 = 0, \quad s^3 = \cos \theta, \quad \theta = \theta(z). \quad (11)$$

Для распределений вида (II)

$$\mathcal{H}(x_d, y_d) = \mathcal{H}(z) = \beta^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \sin^2 \theta + \rho \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^4 \right] \quad (12)$$

варьированием (I2) получаем уравнение для поиска нетопологических солитонов, описываемых функцией $\theta(z)$,

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} \left[1 + 6\rho \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right] + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} \left[1 + 2\rho \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right] - \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (13)$$

которое вместе с граничными условиями $\frac{d\theta}{dz}(0) = 0$, $\theta(\infty) = 0$, определяет краевую задачу. Представляя решение $\theta(z)$ при малых z в виде

$$\theta(z) = C_0 + C_2 z^2 + \dots, \quad (14)$$

из уравнения (I3) находим

$$C_2 = \frac{1}{4} \sin C_0 \cos C_0. \quad (15)$$

Поиск солитонов выполнялся методом стрельбы с использованием соотношений (I4), (I5). Параметр C_0 варьировался на всем интервале $(0, \pi)$, однако полученные при счете на ЭВМ уравнения (I3) кривые $\theta(z)$ не удовлетворяют условию $\theta(\infty) = 0$ при $0 < C_0 < \pi$. Таким образом, и в модели (I) нетопологические солитоны вида (II) найти не удается.

5. Топологические солитоны с $Q_t = 1$ и локализованные распределения (возможно, не являющиеся солитонами) с $Q_t > 1$ и не зависящей от угла φ плотностью энергии, $\mathcal{H}(x_i) = \mathcal{H}(z)$, будем искать как решения уравнения $\delta H = 0$, где $\mathcal{H}(z)$ задается соотношением (9), а граничные условия имеют вид $\theta(0) = \pi$, $\theta(\infty) = 0$. Варьированием (9) получаем

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} \left[1 + 6\rho \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + 2\rho m^2 \frac{\sin^2\theta}{z^2} \right] +$$

$$+ \frac{d\theta}{dz} \left[\frac{1}{z} + \frac{2\rho}{z} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - 2\rho m^2 \frac{\sin^2\theta}{z^3} + 2\rho m^2 \frac{\sin\theta\cos\theta}{z^2} \left(\frac{d\theta}{dz} \right) \right] -$$

$$- \sin\theta\cos\theta \left(\frac{m^2}{z^2} + 1 \right) - 2\rho m^4 \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{z^4} = 0. \quad (I6)$$

Рассмотрим сначала солитоны с $Q_t = 1$, используя анзац (5)–(7) и полагая

$$\theta(0) = \pi, \quad \theta(\infty) = 0. \quad (I7)$$

Из соотношения (8) следует, что $m=1$. При этом формулы (5)–(7) описывают трехкомпонентные "ежи" в двумерном пространстве. Краевая задача для нахождения солитонов $\theta_1(z)$ определяется уравнением (I6) с $m=1$ и граничными условиями (I7). Подставляя разложение решения $\theta_1(z)$ при малых z в уравнение (I6) с $m=1$, находим, что при $z \rightarrow 0$

$$\theta_1(z) = \pi - C_1 z + o(z). \quad (I8)$$

Используя (I8), методом "стрельбы", т.е. варьированием C_1 , находим решение $\theta_1(z)$, удовлетворяющее условию $\theta_1(\infty) = 0$. Солитонные функции $\theta_1(z)$ были найдены с помощью ЭМ для различных значений ρ (см. таблицу). В таблице приведены значения $C_1(\rho)$, соответствующие солитонам, и значения безразмерной энергии солитонов $h_3 = \alpha^{-2} H_3$, подсчитанные численным интегрированием по формуле (9) с $m=1$. Вид функций $\theta_1(z)$ представлен на рис.1; как и в модели, рассмотренной в [2], размер солитона монотонно увеличивается с ростом значения параметра ρ при $0 < \rho < \infty$. Из анализа численных расчетов при малых ρ следует, что полуширина солитона R_3 при $\rho \rightarrow 0$ пропорциональна $\rho^{1/2}$, $\gamma_3 \approx 0.27$ ($R_3 \approx 3.8 \cdot 10^{-2}$ при $\rho = 10^{-6}$, $R_3 \approx 0.46$ при $\rho = 10^{-2}$). Зависимость энергии солитона h_3 от величины ρ представлена на рис.2; при малых ρ она может быть выражена формулой

$$h_3 = 8\pi + B\rho^\alpha, \quad \alpha \approx 0.42, \quad B = \text{const}. \quad (I9)$$

Используя (I9) и соотношение $R_3 \propto \rho^{1/2}$, получаем зависимость $h_3(R_3)$ для солитонов малого радиуса, $R_3 \ll 1$,

$$h_3 = 8\pi + \text{const} \cdot R_3^a, \quad a \approx 1.5.$$

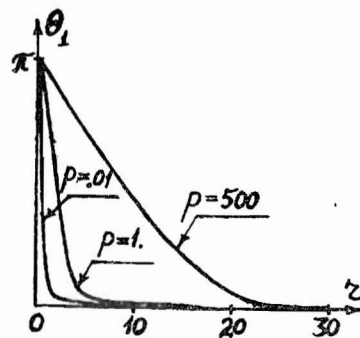


Рис.1

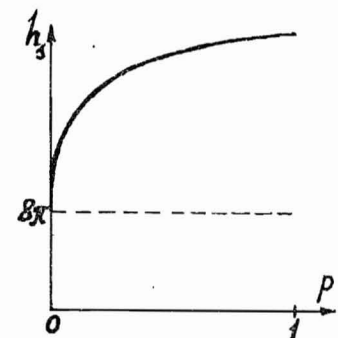


Рис.2

Аналогичные численные исследования были выполнены и при $Q_t = 2$. Распределения (5)–(7) с $\theta(0) = \pi, \theta(\infty) = 0$ имеют такой топологический заряд, если положить $m=2$. Из уравнения (I6) при $m=2$ следует, что при малых z решение краевой задачи в этом случае имеет вид

$$\theta_2 = \pi - C_2 z^2 + o(z^2). \quad (20)$$

Значения $C_2(\rho)$, как и ранее, находились методом "стрельбы". Решения $\theta_2(z)$ при некоторых ρ изображены на рис.3. Как и в случае $Q_t = 1$ ($m=1$), полуширина решений монотонно растет с увеличением ρ , причем при малых ρ полуширина $R_2 \propto \rho^{1/2}$, $\gamma_2 \approx 0.25$. Значения $C_2(\rho)$ и безразмерной энергии локализованных распределений, соответствующих $\theta_2(z)$, $h_2 = \alpha^{-2} H[\theta_2(z)]$, представлены в таблице.

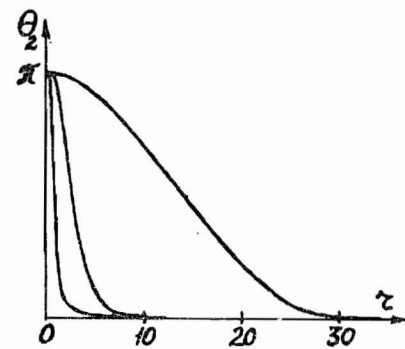


Рис.3

Таблица

ρ	$C_1(\rho)$	h_3	$C_2(\rho)$	h_2
10^{-6}	62.64	25.27	357.0	50.38
10^{-5}	32.56	25.54	110.3	50.61
10^{-4}	16.53	26.25	34.23	51.35
10^{-3}	8.116	28.12	10.52	53.61
10^{-2}	3.879	32.93	3.225	60.37
10^{-1}	1.853	45.69	1.0145	80.35
1	0.9205	82.21	0.3459	140.8
20	0.4026	261.2	0.1034	443.2
500	0.1758	1178.	0.03466	1998.

Видно, что при всех значениях ρ справедливо неравенство $h_2 < 2h_3$, т.е. для всех рассмотренных ρ продемонстрировано существование локализованных распределений с топологическим зарядом $Q_t = 2$, энергия которых меньше удвоенной энергии солитона с $Q_t = 1$. Таким образом, энергетически выгодно образование связанного состояния двух солитонов с $Q_t = 1$. Дальнейшие исследования (в том числе компьютерные) должны показать, какой вид имеют солитоны минимальной энергии с зарядом $Q_t = 2$.

Типичный вид распределений $\alpha^{-2} \mathcal{H}_Q(z)$, получаемых из формулы (9) подстановкой в нее функций $\theta_Q(z)$, $Q=1, 2$, изображен на рис. 4.

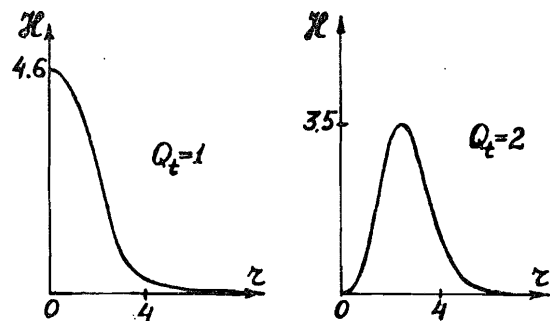


Рис. 4

Зависимость $R_m \approx B_m \rho^{1/4}$, полученная в [2] и настоящей работе численно, может быть объяснена аналитически, если в пределе $\rho \rightarrow 0$ использовать масштабно-инвариантное описание солитонов, а именно считать, что солитоны малого радиуса R_3 определяются заданием радиальной функции $\theta_3(\rho)$ и значения R_3 , где $\rho = z R_3^{-1}$, R_3 - полуширина, солитона, определенная, например, соотношением $\theta_3(\alpha = R_3) = \pi/2$. Действительно, равенство (2) тогда можно переписать в виде

$$R_3^2 \cdot I_2 = 2 R_3^{-2} I_3, \quad (21)$$

где

$$I_2 = 2\pi \int \sin^2 \theta_3(\rho) \rho d\rho, \quad I_3 = 2\pi \rho \int \left[\left(\frac{d\theta_3}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \theta_3(\rho) \right] \rho^2 d\rho, \quad (22)$$

откуда и следует, что $R_3 \propto \rho^{1/4}$. Такой же результат получается и в случае скирмовского члена \mathcal{H}_3 (см. [2]), при этом

$$I_3 = 2\pi \rho \int \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \theta_3(\rho) \left(\frac{d\theta_3}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho, \quad (23)$$

и вообще для любого \mathcal{H}_3 , являющегося однородным многочленом четвертого порядка относительно $(\partial/\partial x_i)$. Масштабно-инвариантное описание рассматриваемых солитонов не может быть точным, поскольку уравнение (16) не инвариантно относительно масштабных преобразований. Использование такого приближенного описания приводит при $\rho \ll 1$ к соотношению

$$h_3 = A + D \rho^{1/2},$$

несколько отличающемуся показателем степени ρ от соотношения (19).

Отметим, что из формулы (20) работы [6] (случай $Q_t = 1$) следует близкая к $R_3 \propto \rho^{1/4}$ зависимость $R_3(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$; эти результаты получены в [6] методом теории возмущений по малому параметру. Относительная малость для солитонов с $R_3 \ll 1$ члена, порожденного энергией анизотропии \mathcal{H}_3 , в уравнении для $\theta(z)$ по сравнению с членами, порожденными \mathcal{H}_1 , отмечена в [8]. В работе [6] было показано, что если искомое решение $\theta_\rho(z)$ представлено в виде

$$\theta_\rho(z) = \theta_0(z) + \Psi_\rho(z), \quad (24)$$

где $\theta_0(z)$ - солитон Белавина-Полякова [12], а $\Psi_\rho(z)$ - малая поправка, то для $\Psi_\rho(z)$ при формальной линеаризации получается уравнение

$$\hat{L} \Psi = F(\theta_0), \quad (25)$$

где

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{m^2}{z^2} (1 - 2 \sin^2 \theta), \quad (26)$$

а

$$F(\theta) = F_1(\theta) + F_2(\theta). \quad (27)$$

В случае анизотропии "легкая ось"

$$F_1(\theta) = \sin \theta \cos \theta. \quad (28)$$

Конкретный вид функции $F_2(\theta)$ зависит от выбора \mathcal{H}_3 , так, в случае скирмовского слагаемого (см. /2,3/),

$$F_2(\theta) = -2\rho \left[m^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{d^2 \theta}{dr^2} + m^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 - m^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^3} \left(\frac{d\theta}{dr} \right) \right], \quad (29)$$

а для \mathcal{H}_3 , используемой в данной работе (см. (I)),

$$F_2(\theta) = -2\rho \left[3 \frac{d^2 \theta}{dr^2} \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + m^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^3 \frac{1}{r} - m^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^3} \frac{d\theta}{dr} + m^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 - m^4 \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{r^4} \right]. \quad (30)$$

В работе /6/ отмечено, что

$$\hat{L} \sin \theta_0(r) = 0, \quad (31)$$

и в силу самосопряженности оператора \hat{L} условием существования нетривиального решения $\Psi_\rho(r)$ является ортогональность $F(\theta_0)$ и $\sin \theta_0(r)$, т.е.

$$2\pi \int F(\theta_0) \sin \theta_0(r) r dr = 0. \quad (32)$$

Однако нетрудно видеть, что интеграл $\int F_1(\theta_0) \sin \theta_0(r)$ при $F_1(\theta) = \sin \theta \cos \theta$ логарифмически расходится при $r \rightarrow \infty$. (Напомним, что $\text{tg} \left[\frac{\theta_0}{2}(r) \right] = \left(\frac{R}{r} \right)^m$ для солитона Белавина-Полякова с $Q_t = m$). Отметим, что причиной этой трудности теории возмущений в данном случае является тот факт, что интеграл энергии анизотропии $H_2 = \int \mathcal{H}_2 d^2x$, $\mathcal{H}_2 = \beta^2 \sin^2 \theta$ расходится, когда $\theta = \theta_0(r)$. Солитоны с $Q_t = 1$, численно полученные в настоящей работе и в /2/, имеют асимптотику при $r \rightarrow \infty$, отличающуюся от асимптотики функции $\theta_0(r)$ при $m=1$; нетрудно видеть, что для $\rho \ll 1$ при $r \gg 1$ $\theta_m(r) \approx T_m \cdot e^{-r}$. Подчеркнем, однако, что расходимость упомянутых выше интегралов логарифмическая, поэтому можно надеяться, что удастся построить "улучшенную" теорию возмущений для статических солитонов малого радиуса.

Использование с этой целью динамических солитонов с частотой прецессии $\omega \neq 0$ в качестве решения нулевого приближения теории возмущений (с последующим предельным переходом $\omega \rightarrow 0$), к сожалению, не решает этой задачи, т.к. в двумерной модели магнетика с анизотропией "легкая ось" (без члена \mathcal{H}_3) минимальная частота ω_m , при которой существуют динамические солитоны, больше нуля /8/.

В заключение заметим, что найденные в /2/ и настоящей работе топологические солитоны, осуществляя отображения $R^2 \rightarrow S^2$, дают конкретную реализацию в рамках рассматриваемых двумерных моделей идеи Калузы-Клейна (см., например, обзор /13/ и цитированную там литературу) о компактификации по части пространственных переменных в многомерных полевых теориях.

Авторы выражают благодарность И.В.Барашенкову, Е.П.Жидкову, В.Е.Захарову, Б.А.Иванову, В.Е.Корепину, Н.А.Костову, Д.В.Ктитареву, Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханькову за полезные обсуждения.

Литература

1. Боголюбовский И.Л. ОИЯИ, Р5-85-482, Дубна, 1985.
Боголюбовский И.Л. ОИЯИ, Р5-85-588, Дубна, 1985.
Bogolubsky I.L. Phys. Lett., 1988, A126, 511.
2. Боголюбовская А.А., Боголюбовский И.Л. ОИЯИ, Р5-87-761, Дубна, 1987.
Bogolubskaya A.A., Bogolubsky I.L. JINR, E5-87-867, Dubna, 1987.
3. Боголюбовская А.А., Боголюбовский И.Л. ОИЯИ, Р5-88-311, Дубна, 1988.
4. Dzyaloshinskii I.E., Polyakov A.M., Wiegmann P.B.
Phys. Lett., 1988, A127, 112.
5. Subramanian M.A. et al. Nature, 1988, 332, 420.
6. Иванов Б.А., Стефанович В.А. ЖЭТФ, 1986, 91, 638.
7. Skyrme T.H.R. Proc. Roy. Soc., 1961, A260, 127.
Фаддеев Л.Д. В поисках многомерных солитонов. В сборнике материалов IX Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта, 1976. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, с.207-223.
8. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. "Наукова думка", Киев, 1983.
9. Derrick G.H. J.Math.Phys., 1964, 5, 1252.
10. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. "Мир", Москва, 1985.
11. Coleman S. Classical lumps and their quantum descendants, 1975 Erice Lectures, published in: New Phenomena in Sub-Nuclear Physics. Ed. A.Zichichi, New York, Plenum Press, 1977.
12. Белавин А.А., Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, 503.
13. Арефьева И.Я., Волович И.В. УФН, 1985, 146, 655.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1988 года.