сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-834

Х.И.Семерджиев, Р.М.Ямалеев

БАЗИС АЛГЕБРЫ ДИКСОНА И ЕГО МАТРИЧНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

1988

ВВЕДЕНИЕ

Изоморфизм алгебры Клиффорда с матричной алгеброй порядка 2^n в настоящее время подробно изучен [1,2]. В теоретической физике матричный базис алгебры Клиффорда используется повсеместно; в последнее время появились работы [3,4,5], где предлагается использовать этот базис также в вычислительной математике. Однако здесь он имеет весьма ограниченную область применимости, поскольку алгебра Клиффорда есть алгебра квадратичного функционала [6] и связана с матрицами только порядка 2^n. Поэтому для решения задач вычислительной математики необходимо привлекать более общие алгебры.

В настоящей работе мы рассматриваем алгебру, которая является непосредственным обобщением алгебры Клиффорда на функционалы степени выше двух и изоморфна алгебре матриц заданного порядка. Речь идет о циклических алгебрах с делением степени больше двух [7]. Подобные алгебры были впервые исследованы Диксоном [8], поэтому мы их будем называть алгебрами Диксона и обозначать символом $\mathrm{Dic}(N)$ (N - степень алгебры). Алгебра $\mathrm{Dic}(N)$ над полем F определяется следующими соотношениями [7]:

$$\mathrm{Dic}(N) := \oplus\, u^n v^m F,\ uv = vu\,\theta,\quad u^N = e,\quad v^N = e,$$

e - единица алгебры, θ - примитивный корень уравнения $x^N - 1 = 0$; n, m, N - натуральные числа.

Алгебра $\mathrm{Dic}(2)$ есть алгебра кватернионов:

$$\mathrm{Dic}(2) := \{e, u, v, uv\},\ uv + vu = 0,\quad u^2 = e,\ v^2 = e.$$

Матричный базис кватернионов может быть представлен в виде базиса матриц Паули [9]. Любая матрица (2x2), заданная над полем F, может быть представлена в виде линейной комбинации матриц Паули. Подобным образом можно установить эндоморфизм между $\mathrm{Dic}(N)$ и матричной алгеброй в пространстве N^2 размерности. Как будет показано ниже, любая матрица ($N\times N$), заданная над полем F, может быть представлена в виде линейной комбинации базиса алгебры $\mathrm{Dic}(N)$.

Алгебра кватернионов есть алгебра квадратичного функционала [6]. С помощью кватернионных единиц можно факторизовать

3-мерную канонически заданную квадратичную форму. Обобщением алгебры кватернионов на случай многомерных квадратичных форм является алгебра Клиффорда: $C\ell(M)$. Используя базисные единицы алгебры Dic(N), можно факторизовать на N сомножителей канонически заданные N-формы, заданные в 2- и 3-мерных векторных пространствах [10]. Также можно обобщить алгебры Dic(N) на случай многомерных N-форм: Dic(N) → Dic(N,M) [10]. В последнее время особый интерес к алгебрам Диксона стал проявляться в связи с возникновением нового направления исследования - квантовой механики на полилинейных формах [11].

Предлагаемая работа посвящена исследованию свойств матричного базиса алгебры Диксона и применению метода Гаусса обращения матрицы в случае, когда матрица задана в базисе алгебры Диксона. В силу связи алгебры Диксона с функционалами N-й степени она может быть применена к решению нелинейных алгебраических систем уравнений [12].

1. МАТРИЧНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И СВОЙСТВА БАЗИСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ Dic(N)

Пусть

$$u, v \in Dic(N), \quad uv = vu\,\theta, \quad u^N = v^N = e, \tag{1.1}$$

θ - примитивный корень уравнения

$$x^N - 1 = 0. \tag{1.2}$$

Dic(N) - конечномерная алгебра, состоящая из N^2 элементов, включая u, v и единичный элемент e. Остальные $N^2 - 3$ элементов алгебры будут иметь вид $\alpha_k \sim u^n v^m$. Обозначим через $\{e, \alpha\}$ базис, состоящий из $\alpha_0 := e$ и

$$\alpha_k := u^n v^m, \quad k = nN + m, \quad (n, m = 0, 1, \dots, N-1). \tag{1.3}$$

Рассмотрим некоторые свойства α_k.

1°. Для заданных n и m имеет место равенство

$$u^n v^m = \theta^{nm} v^m u^n. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $m = 1$. Тогда

$$u^n v = u^{n-1} uv = \theta\, u^{n-1} vu = \theta\, u^{n-2} uvu = \theta^2 u^{n-2} vu^2 = \dots = \theta^k u^{n-k-1} uvu^k = \dots = \theta^n v u^n. \tag{1.5}$$

Обозначим $w = u^n$. Имеем $wv = \theta^n \cdot vw$. Используя (1.5), получим

$$wv^m = (\theta^n)^m v^m w.$$

Возвращаясь к обозначениям u и v, находим

$$u^n v^m = \theta^{nm} v^m u^n.$$

2°. $\alpha_k^N = e(-1)^{(N-1)nm}$. (1.6)

Доказательство. Формула (1.4) позволяет представить $\alpha_k^N = (u^n v^m)^N$ в виде

$$\alpha_k = \theta^{\frac{N(N-1)}{2}nm} u^{nN} v^{mN}.$$

Поскольку $\theta = \exp\left(\frac{i2\pi}{N}\right)$, $u^N = e$, $v^N = e$, то

$$\alpha_k^N = e(-1)^{(N-1)nm}.$$

3°. Пусть $\alpha_k^{-1}\alpha_k = e$. Тогда

$$\alpha_k^{-1} = (-1)^{(N-1)nm}\, \theta^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}nm}\, \alpha_{\ell(k)},$$

$k = 0, 1, \dots, N^2 - 1$, $n = \left[\frac{k}{N}\right]$, $m = k - nN$,

где $[x]$ означает целую часть x,

$$\ell(k) = \begin{cases} N^2 + N - k & \text{при } n, m \geq 1 \quad (k > N, \text{ но не кратно } N) \\ (N-n)N & \text{при } n \geq 1,\ m = 0 \quad (k \text{ - кратно } N) \\ N - m & \text{при } n = 0,\ m \geq 0 \quad (1 \leq k \leq N-1) \\ 0 & \text{при } (k = 0). \end{cases}$$

Доказательство. Имеют место следующие равенства:

$$(u^n v^m)^{N-1} = (u^n v^m)^N (u^n v^m)^{-1} = (-1)^{(N-1)nm} (u^n v^m)^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_k^{-1} = \alpha_{nN+m}^{-1} = (u^n v^m)^{-1} = (-1)^{(N-1)nm} (u^n v^m)^{N-1} =$$

$$=(-1)^{(N-1)nm}\,\theta^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}nm}\,u^{n(N-1)}v^{m(N-1)}.$$

Теперь рассмотрим случай $n, m \ge 1$. В этом случае имеем

$$u^{n(N-1)}\,v^{m(N-1)} = u^{N-n}v^{N-m} = \alpha_{(N-n)N+N-m} = \alpha_{N^2+N-k}.$$

Таким образом, $\ell(k) = N^2 + N - k$. В случае $n = 0$, $m \ge 1$ получим

$$u^{n(N-1)}\,v^{m(N-1)} = v^{m(N-1)} = v^{N-m} = \alpha_{N-m},$$

т.е. $\ell(k) = N-m$.

Случай $m = 0$, $n \ge 1$ приводит к формулам

$$u^{n(N-1)}\,v^{m(N-1)} = u^{n(N-1)} = u^{N-n} = \alpha_{(N-n)N}\,, \quad \ell(k) = N(N-n).$$

Соответственно при $n = 0$, $m = 0$:

$$u^{n(N-1)}v^{m(N-1)} = E = \alpha_0, \quad \ell(k) = 0.$$

4°. Пусть $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2} \in \mathrm{Dic}(N)$. Тогда

$$\alpha_{k_3} := \alpha_{k_1}\alpha_{k_2} \in \mathrm{Dic}(N)$$

и

$$\alpha_{k_3} = \theta^{m_1 n_2}\,\alpha_{\ell(k_1,k_2)}, \tag{1.7}$$

$$\ell(k_1,k_2) = (n_1+n_2-[\frac{n_1+n_2}{N}]\,N)\,N + m_1+m_2-[\frac{m_1+m_2}{N}]N,$$

$$k_1,k_2 = 0,1,\dots,N^2-1, \qquad n_i = [\frac{k_i}{N}], \; m_i = k_i - n_iN, \quad i = 1,2,$$

где $[x]$ означает целую часть x.

Доказательство. Выберем $\alpha_{k_1} := u^{n_1}v^{m_1}$, $\alpha_{k_2} := u^{n_2}v^{m_2}$. В этом случае для определения произведения $\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}$ воспользуемся формулой (1.4). Получим

$$\alpha_{k_3} = \theta^{m_1 n_2}\,u^{n_3}\,v^{m_3}.$$

Таким образом, при $n_3, m_3 \le N$ $\alpha_{k_3} \in \mathrm{Dic}(N)$. При n_3, $m_3 > N$ представим эти числа в виде $n_3 = N + n'_3$, $m_3 = N + m'_3$. Пользуясь свойством (1.1), получим

$$\alpha_{k_3} = \theta^{m_1 n_2}u^{n'_3}\,v^{m'_3} \in \mathrm{Dic}(N).$$

Далее,

$$\alpha_{k_1}\alpha_{k_2} = \alpha_{n_1N+m_1}\alpha_{n_2N+m_2} = u^{n_1}v^{m_1}\cdot u^{n_2}v^{m_2} = \theta^{m_1 n_2}\,u^{n_1+n_2}v^{m_1+m_2} =$$

$$= \theta^{m_1 n_2}\,u^{n_1+n_2-[\frac{n_1+n_2}{N}]N}\;v^{m_1+m_2-[\frac{m_1+m_2}{N}]N}.$$

Так как $([\frac{n_1+n_2}{N}]+1)N > n_1 + n_2$, то $n_1+n_2-[\frac{n_1+n_2}{N}]N < N$. Следовательно, формула (1.7) имеет место. Имея в виду, что $[\frac{n_i}{N}] = [\frac{m_i}{N}] = 0$ при $i = 1, 2$, легко показать, что

$$\ell(k_1,0) = k_1, \qquad \ell(0,k_2) = k_2, \qquad \ell(0,0) = 0.$$

Свойство доказано.

Теперь рассмотрим матричное представление базиса $\{e, \alpha\}$. В матричной алгебре в качестве единичного элемента выступает единичная матрица. Матрицами, удовлетворяющими условиям (1.1), являются циклические матрицы[13]. В качестве u выберем так называемую матрицу перестановки:

$$u := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

В качестве v выберем диагональную матрицу порядка N, такую, что

$$v_{nm} = \delta_{nm}\cdot\theta^{n-1}, \tag{1.9}$$

где θ - корень уравнения (1.2).

Очевидно, что условия (1.1) в этом представлении оказываются выполненными.

Для того, чтобы получить матричное представление остальных N^2-3 элементов базиса $\{e, \alpha\}$, достаточно воспользоваться формулой (1.3). Перечисленные выше свойства базиса $\{e, \alpha\}$ (1°-4°) остаются в силе и по отношению к матричному базису $\{E_N, \alpha(N)\}$. Остальные свойства, которые мы сейчас рассмотрим, имеют отношение к выбранному нами матричному представлению.

5°. Сумма диагональных элементов матриц $\alpha_k(N)$, $k = 1, 2, \ldots, N^2-1$, $\mathrm{tr}(\alpha_k)$ (шпур, след) равен нулю.

Доказательство. Из (1.8) и (1.9) следует, что $\mathrm{tr}(u) = 0$, $\mathrm{tr}(v) = 0$. Далее, u как матрица перестановки в любой степени $n < N$ является двудиагональной с нулевыми элементами на диагонали[13]. Итак,

$$\mathrm{tr}(u^n) = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Матрица v - диагональна по определению, поэтому диагональна и v^n, причем

$$(v_{\ell m})^n = \delta_{\ell m}\theta^{(\ell-1)n}.$$

Из свойств корней (1.2) следует, что

$$\sum_{\ell=1}^{N}\theta^{(\ell-1)n} = 0.$$

Поэтому

$$\mathrm{tr}(v^n) = 0.$$

Теперь рассмотрим матрицы $\alpha_k = u^n v^m$ $(0 < n < N)$. Поскольку v^n диагональна, то α_k имеет ту же структуру, что и матрица u^n. Но у последней диагональные элементы равны нулю, следовательно, $\mathrm{tr}(\alpha_k) = 0$.

Формула (1.6) показывает, что $\alpha_k^N = E$, $k = 0, 1, \ldots, N^2-1$ при N нечетном, и $\alpha^N_{nN+m} = (-1)^{nm}E$, $n, m = 0, 1, \ldots, N-1$ при N четном. Эти два случая вполне аналогичны и поэтому в дальнейшем будем рассматривать подробно только случай нечетных N.

6°. Система матриц $\{E_N, \alpha_k(N)\}$ линейно независима.

Доказательство. Допустим, что существуют числа

$$a_0, a_1, \ldots, a_{N^2-1}, \quad \sum_{\ell=0}^{N^2-1} a_\ell^2 > 0$$

такие, что

$$a_0 E + \sum_{n=1}^{N^2-1} a_n\alpha_n = 0. \tag{1.10}$$

Отсюда, пользуясь свойством 4°, получим

$$a_0 = -\frac{1}{N}\,\mathrm{tr}\Big(\sum_{n=1}^{N^2-1} a_n\alpha_n\Big) = 0.$$

Умножим (1.10) на α_k^{N-1}, получим

$$-a_k E = a_0\alpha_k^{N-1} + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N^2-1} a_n\alpha_k^{N-1}\alpha_n. \tag{1.11}$$

Возьмем след от обеих частей (1.11):

$$-Na_k = \mathrm{tr}\Big(\sum_{\substack{n=0\\ n\neq k}}^{N^2-1} a_n\alpha_k^{N-1}\alpha_n\Big) = \sum_{\substack{n=0\\ n\neq k}}^{N^2-1} a_n\,\mathrm{tr}(\alpha_k^{N-1}\alpha_n).$$

Поскольку $\alpha_k^{N-1}\alpha_n \in \{E_N, \alpha_k(N)\}$, причем $\alpha_k^{N-1}\alpha_n = E_N$ при $n = k$, $\mathrm{tr}(\alpha_k^{N-1}\alpha_n) = 0$.

Отсюда следует, что $a_k = 0$. Равенство системы коэффициентов $\{a_n\}_{n=0}^{N^2-1}$ одновременно нулю доказывает линейную независимость $\{E_N, \alpha(N)\}$.

7°. Любая квадратная матрица $A(N\times N)$, заданная над полем F, может быть разложена в базисе $\{E_N, \alpha_k(N)\}$.

Чтобы доказать это утверждение, достаточно найти коэффициенты ряда

$$A = a_0 E + \sum_{n=1}^{N^2-1} a_n\alpha_n. \tag{1.12}$$

Прежде всего, имеем

$$a_0 = \frac{1}{N}\,\mathrm{tr}(A). \tag{1.13}$$

Умножим обе части (1.12) на α_k^{N-1} и, используя результат 5°, получим

$$a_k = \frac{1}{N}\operatorname{tr}(\alpha_k^{N-1} A). \tag{1.14}$$

Таким образом, для заданного A существует регулярный метод получения коэффициентов ряда (1.12).

Полученный базис $\{E_N, \alpha_k(N)\}$ в пространстве размерности N^2 полный, поскольку любой элемент другого базиса есть матрица $(N\times N)$, которая и может быть разложена по данному базису $\{E_N, \alpha_k\}$.

2. ОБРАЩЕНИЕ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ БАЗИСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим матрицу $A(N\times N)$, представленную в виде ряда (1.12). Задача состоит в нахождении матрицы A^{-1}:

$$A A^{-1} = E. \tag{2.1}$$

Для определения A^{-1} будем применять метод, аналогичный методу Гаусса обращения матрицы[14]. Перепишем условие (2.1) с учетом (1.12):

$$(a_o E + \sum_{n=1}^{N^2-1} a_n \alpha_n) A^{-1} = E. \tag{2.2}$$

Пусть $a_k = \max(|a_n|,\ 1 \le n \le N^2-1)$. Из-под знака суммы Σ в круглых скобках (2.2) выделим член $a_k\alpha_k$:

$$(a_o E + a_k\alpha_k + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N^2-1} a_n\alpha_n) A^{-1} = E. \tag{2.3}$$

(Правило выбора a_k соответствует правилу выбора "главного элемента" в методе Гаусса). Согласно (1°-5°) в $\{E, \alpha_k\}$ найдется элемент α_p такой, что

$$\alpha_k^{N-1}\alpha_p = \alpha_k\theta^{\ell}, \quad \ell = \ell(k,p). \tag{2.4}$$

Умножим (2.3) слева на α_k^{N-1}, учитывая (1.6) и (2.4), получим

$$(b_o E + b_k\alpha_k + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N^2-1} b_n\alpha_n) A^{-1} = \alpha_k^{N-1}, \tag{2.5}$$

$$b_o = a_k(-1)^{(N-1)nm}, \qquad b_k = a_p\theta^{\ell}.$$

Теперь нетрудно составить такую линейную комбинацию (2.3) и (2.5), в которой элемент α_k был бы исключен.

В результате получим ряд

$$[(a_o b_k/a_k - b_o)E + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N^2-1}(a_n b_k/a_k - b_n)\alpha_n]A^{-1} = E a_k/b_k - \alpha_1^{N-1}.$$

Выражение в квадратных скобках не содержит α_k. Продолжая процесс исключения базисных элементов, на последнем шаге находим $DA^{-1} = B$, $A^{-1} = B/D$, где B - некоторый ряд по базису $\{E, \alpha_k\}$, D - многочлен от элементов матрицы A.

Авторы благодарят проф. В.Г.Маханькова за ряд важных указаний и П.Г.Акишина за ценное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев Г.А. Алгебраические проблемы математической и теоретической физики. М.: Наука, 1974.
2. Желнорович В.А. Теория спиноров и ее применение в физике и механике. М.: Наука, 1982.
3. Кузнецов П.Г., Пшеничников С.Б. - ДАН СССР, 1985, т.283, № 5, с.1075.
4. Пшеничников С.Б., Ямалеев Р.М. - ЖВМиМФ, 1987, т.27, № 8.
5. Ямалеев Р.М. Сообщение ОИЯИ Р5-86-833, Дубна, 1986.
6. Б.Л.ван дер Варден. Алгебра. М.: Наука, 1976.
7. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
8. Dicson L.E. Algebren und ihre Zahlensysteme.Zurich-Leipzig, 1927.
9. Паули В. Труды по квантовой теории. М.: Наука, 1977, с.222.
10. Ямалеев Р.М. Сообщение ОИЯИ Р5-87-766, Дубна, 1987.
11. Ямалеев Р.М. Сообщение ОИЯИ Р2-88-147, Дубна, 1988.
12. Семерджиев Х.И., Ямалеев Р.М. - Сердика, 1987, т.13, с. 272.

13. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
14. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Изд.АН СССР, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 декабря 1988 года.