объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-791

С.И.Сердюкова

КВАЗИЖОРДАНОВА ФОРМА АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТРИЦ, ОБРАЗУЮЩИХ ОГРАНИЧЕННУЮ ПОЛУГРУППУ

Направлено в Оргкомитет IV Конференции
по дифференциальным уравнениям и
приложениям, НРБ, 13-19 августа 1989 г.

1988

Исследование устойчивости в L_2 задачи Коши для систем линейных разностных уравнений сводится[1,2] к исследованию условий ограниченности в L_2 степеней характеристической матрицы $D(w): \|D^n(e^{i\psi})\|_{L_2} \leq c$ для $n \geq 0$. При доказательстве критерия устойчивости D приводится[2] к треугольному виду. Собственные значения /с.з./ характеристической матрицы λ являются алгебраическими функциями и, вообще говоря, разлагаются в ряды по дробным степеням $(\psi - \psi_0)$. Из условия $|\lambda(e^{i\psi})| \leq 1$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, следует[2], что главные члены разложения λ не содержат дробных степеней. При исследовании устойчивости задач с краевыми условиями степени оператора перехода от слоя к слою G^n представляются[3] в виде интеграла от резольвенты. Под знаком интеграла стоят ряды по степеням треугольных блоков нормальной формы резольвентной матрицы $M(z)$. Собственные значения резольвентной матрицы κ являются обратными функциями с.з. характеристической матрицы λ. Далее рассматриваются гиперболические системы линейных разностных уравнений. Тогда $\kappa(z)$ имеют ту же структуру, что и $\lambda(w)$. В частности, главные части разложения $\kappa(z)$ не содержат дробных степеней. Между тем собственные векторы M и аналитические краевые матрицы[3], построенные на основе треугольной формы $M(z)$, имеют дробные степени. К тому же приходится работать со степенями заполненной треугольной матрицы[2]. В предлагаемой работе для аналитических матриц D, образующих ограниченную полугруппу, построена нормальная форма $\bar{D}$, отличная от треугольной. Главные члены разложения основных блоков $\bar{D}$ имеют простую квазижорданову структуру:

$$\bar{\lambda}\cdot(E + \Delta(\psi - \psi_0)^{2\mu}\cdot N + (\psi - \psi_0)^{2\mu+1}\cdot R(\psi)).$$

Здесь Δ - константа, N - жорданова нильпотентная матрица. Разложения элементов $\bar{D}$ не содержат дробных степеней. Такую же нормальную форму имеет резольвентная матрица. С помощью построенной квазижордановой формы доказывается критерий устойчивости в C полубесконечных разностных краевых задач для гиперболических систем линейных разностных уравнений.

Известно[2], что в окрестности определяющих точек основные с.з. аналитической матрицы,образующей ограниченную полугруппу, допускают разложение

$$\lambda(e^{i\psi}) = \exp\{i\phi_o + i\gamma(\psi-\psi_o) + i\sum_{\ell=p}^{2\mu} a_\ell(\psi-\psi_o)^\ell - \beta(\psi-\psi_o)^{2\mu} + O((\psi-\psi_o)^{2\mu+\theta})\}, \qquad /1/$$

$\phi_o, \psi_o, \gamma, a_\ell$ - вещественные; β, θ - положительные; p, μ - целые. Обозначим через $\bar\lambda$ главную часть разложения λ:

$$\bar\lambda(e^{i\psi}) = \exp\{i\phi_o + i\gamma(\psi-\psi_o) + i\sum_{\ell=p}^{2\mu} a_\ell(\psi-\psi_o)^\ell - \beta(\psi-\psi_o)^{2\mu}\},$$

$\bar\lambda$ не содержит дробных степеней. Относительно каждой определяющей точки ψ_o с.з. $D(w)$ разбиваются [2] на классы $\Lambda_o, \Lambda_1, \dots, \Lambda_s$, $s = s(\psi_o)$. В Λ_o входят λ, которые по модулю меньше единицы ($|\lambda(e^{i\psi_o})| < 1$). Основные с.з. λ_i, λ_j принадлежат одному классу $\Lambda_\xi (1 \le \xi \le s)$, если $\bar\lambda_i \equiv \bar\lambda_j$. Справедлива

Теорема 1. Если $D(w)$ - аналитическая матрица ($\|D^n(e^{i\psi})\| \le c$, $n \ge 0$), то для каждой определяющей точки ψ_o найдутся постоянная $\rho > 0$ и аналитическое невырожденное при $|\psi - \psi_o| < \rho$ преобразование подобия $T(\psi)$, которое приводит $D(e^{i\psi})$ к нормальному виду:

$$TDT^{-1} = \begin{Vmatrix} A & & & 0 \\ & C_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_s \end{Vmatrix} = \bar D.$$

Все матрицы разлагаются в ряды по целым степеням $(\psi - \psi_o)$. Блоку A отвечают $\lambda \subset \Lambda_o$, блоку C_ξ отвечают $\lambda \subset \Lambda_\xi$. Главные члены разложения C_ξ имеют простую квазижорданову структуру:

$$C_\xi = \bar\lambda \cdot (E + (\psi - \psi_o)^{2\mu} \cdot \Delta \cdot N_\xi + (\psi - \psi_o)^{2\mu+1} \cdot R_\xi(\psi)).$$

Здесь $\bar\lambda$ - главная часть разложения $\lambda \subset \Lambda_\xi$, E - единичная матрица, 2μ - порядок старшего члена разложения $\bar\lambda$, Δ - константа, N_ξ - нильпотентная жорданова матрица. Первая диагональ над главной диагональю состоит из 0 и 1. Остальные элементы N_ξ нулевые.

Доказательство. Используя [1,2,4], доказываем, что в окрестности ψ_o определено невырожденное аналитическое преобразование подобия $T(\psi)$, приводящее D к блочно-диагональному виду: классам $\Lambda_o, \Lambda_1, \dots, \Lambda_s$ отвечают блоки $A, D_1, \dots, D_s$. Элементы T, T^{-1}, A, D_ξ разлагаются в ряды по целым степеням $(\psi - \psi_o)$. Далее можно ограничиться одним из основных блоков и положить $\phi_o = \psi_o = 0$. Итак, рассматривается аналитическая матрица $D(w)$: $\|D^n(e^{i\psi})\| \le c$, $n \ge 0$. Все λ принадлежат одному

классу, имеют одно и то же $\bar\lambda(e^{i\psi})$, $\lambda(1) = 1$. Элементы $D(e^{i\psi})$ разлагаются в ряды по целым степеням ψ. Согласно [1,2] в окрестности $\psi = 0$ определено невырожденное аналитическое преобразование подобия, приводящее D к треугольному виду: внедиагональные элементы есть $O(\psi^{2\mu})$ при $\psi \to 0$. Отсюда имеем

$$TDT^{-1} = \bar\lambda(E + A\psi^{2\mu} + \psi^{2\mu+\theta} R_1(\psi)), \qquad \theta > 0. \qquad /2/$$

Здесь A - постоянная верхняя треугольная нильпотентная матрица, $R_1(\psi)$ - верхняя треугольная матрица. Так как T, T^{-1} разлагаются по неотрицательным степеням ψ, из /2/ следует, что

$$D = \bar\lambda(E + T^{-1}(0)AT(0)\psi^{2\mu} + \psi^{2\mu+1}R_2(\psi)).$$

Элементы $R_2(\psi)$ разлагаются в ряды по целым степеням ψ. Матрица $T^{-1}(0)AT(0)$ является нильпотентом и с помощью дополнительного постоянного преобразования подобия U может быть приведена к виду ΔN с произвольной постоянной Δ. Справедливо соотношение

$$C = UD(e^{i\psi})U^{-1} = \bar\lambda \cdot (E + \Delta\psi^{2\mu}N + \psi^{2\mu+1}UR_2(\psi)U^{-1}) =$$
$$= \bar\lambda \cdot (B + \psi^{2\mu+1}R(\psi)), \qquad B = E + \Delta\psi^{2\mu}N. \qquad /3/$$

Теорема 1 доказана.

При исследовании устойчивости приходится оценивать степени матриц. Разберемся, как устроена степень квазижорданова блока /3/. Обозначим через ℓ размерность C, r - максимум модуля элементов $R(\psi)$ при $|\psi| < \rho$.

Теорема 2. Справедливо соотношение

$$C^n = \bar\lambda^n (B^n + n\psi^{2\mu+1}\ell^2 r R(\psi, n)). \qquad /4/$$

Элементы матрицы $R(\psi,n)$ удовлетворяют неравенству

$$|r_{ij}(\psi,n)| \le (1 + \Delta|\psi|^{2\mu} + \ell^2 r|\psi^{2\mu+1}|)^n, \qquad |\psi| < \rho. \qquad /5/$$

Доказательство. Справедливо соотношение

$$(B + \psi^{2\mu+1}R)^n = B^n + M_1 + \dots + M_n.$$

Матрица M_ξ является суммой C_n^ξ слагаемых вида

$$\psi^{(2\mu+1)\xi} B^{k_1} R^{m_1} \dots B^{k_i} R^{m_i},$$

$$k_1 + \ldots + k_i = n - \xi, \qquad m_1 + \ldots + m_i = \xi .$$

Для элементов $R^k(\psi)$ справедлива оценка

$$|r^k_{ij}(\psi)| \le \ell^{k-1} r^k, \quad |\psi| < \rho . \qquad /6/$$

Из разложения $B^k = E + k\Delta\psi^{2\mu} N + \ldots + C_k^{\ell-1}(\Delta\psi^{2\mu} N)^{\ell-1}$ получаем оценку элементов B^k:

$$|b^k_{ij}(\psi)| \le (1 + \Delta|\psi|^{2\mu})^k, \quad |\psi| \le \rho . \qquad /7/$$

Из /6/, /7/ доказываем оценку элементов $B^k R^m$:

$$|b^{k,m}_{ij}(\psi)| \le \ell^{m-1} r^m (1 + \Delta|\psi|^{2\mu})^k, \qquad |\psi| < \rho ,$$

из которой, в свою очередь, следует оценка элементов M_ξ:

$$|m^\xi_{ij}(\psi)| \le C_n^\xi (\ell^2 r|\psi|^{2\mu+1})^\xi (1 + \Delta|\psi|^{2\mu})^{m-\xi} . \qquad /8/$$

Остается оценить элементы матрицы

$$M(\phi, n) = M_1 + \ldots + M_n = (B + \psi^{2\mu+1} R(\psi))^n - B^n .$$

Из /8/ следует

$$|m_{ij}(\phi,n)| \le \sum_{\xi=1}^{n} C_n^\xi (\ell^2 r|\psi|^{2\mu+1})^\xi (1 + \Delta|\psi|^{2\mu})^{n-\xi} =$$

$$= \ell^2 r|\psi|^{2\mu+1} \sum_{\xi=0}^{n-1} (1 + \Delta|\psi|^{2\mu} + \ell^2 r|\psi|^{2\mu+1})^\xi (1 + \Delta|\psi|^{2\mu})^{n-1-\xi} <$$

$$< n\ell^2 r|\psi|^{2\mu+1} (1 + \Delta|\psi|^{2\mu} + \ell^2 r|\psi|^{2\mu+1})^n, \qquad |\psi| < \rho .$$

Теорема 2 доказана.

Квазижорданову форму аналитических матриц можно использовать при исследовании устойчивости систем линейных разностных уравнений в C [5]. Если разностная задача Коши устойчива в L_2, характеристическая матрица приводится к квазижордановой форме. При построении асимптотики разностной функции Грина [5] главные члены зависят лишь от первого слагаемого /4/, имеющего простую структуру. Второе слагаемое /4/, содержащее $R(\psi, n)$, дает остаточные члены, которые легко оцениваются с помощью /5/.

В этой работе с помощью квазижордановой формы доказан критерий устойчивости в C левой краевой задачи:

$$v_\nu^{n+1} = \sum_{j=-r1}^{r2} A_j v^n_{\nu+j}, \quad n \ge 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots , \qquad /9/$$

$$v^\circ_\nu = f_\nu, \quad v^n_m = \sum_{j=1}^{s} C_{jm} v^n_j, \quad m = -r1 + 1, \ldots, -1, 0 . \qquad /10/$$

Здесь v - векторы размерности k; A_j, C_{jm} - постоянные матрицы; A_{-r1}, A_{r2} - невырожденные. Далее через $|v|$ обозначается максимум модулей компонент v.

Задача /9/, /10/ устойчива в C, если ∃ - постоянная $c > 0$, такая, что

$$\max_{\nu\ge1} |v^n_\nu| \le c \max_{\nu\ge1} |v^\circ_\nu| ,$$

для всех $n \ge 0$ и всех $\{v^\circ_\nu\}_{\nu>-r1} \subset C$, удовлетворяющих /10/.

При доказательстве используется квазижорданова форма резольвентной матрицы:

$$M(z) = \left\| \begin{array}{ccccccc} -A_{r2}^{-1}A_{r2-1} & & \ldots & -A_{r2}^{-1}(A_o - zE) & \ldots & & -A_{r2}^{-1}\cdot A_{-r1} \\ E & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & E & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & E & 0 \end{array} \right\| .$$

Предполагается, что система /9/ гиперболическая: основные с.з. характеристической матрицы относительно всех определяющих точек имеют разложение /1/ с $\gamma \ne 0$. Если система /9/ гиперболическая и соответствующая задача Коши устойчива в L_2, характеристическая и резольвентная матрицы устроены аналогично [6]. Различие состоит в следующем. В окрестности определяющих точек $z_o = e^{i\phi_o}$ при $|z| \ge 1$ $M(z)$ наряду с классом собственных значений, которые по модулю меньше 1, K_o, может иметь класс собственных значений, которые по модулю больше 1, K_∞. Разложения основных с.з. получаются обращением /1/:

$$\kappa(e^{i\phi}) = \exp\{ i\psi_o + \frac{i(\phi-\phi_o)}{\gamma} P(\phi-\phi_o) + \frac{\beta}{\gamma^{2\mu+1}}(\phi-\phi_o)^{2\mu} +$$

$$+ O((\phi-\phi_o)^{2\mu+\theta}) \} .$$

Здесь $P(t)$ - многочлен с вещественными коэффициентами степени $2\mu - 1$, $P(0) = 1$. При этом λ с $\gamma < 0$ порождают $|\kappa(e^{i\phi})| \le 1$, а

λ с $\gamma > 0$ порождают $|\kappa(e^{i\phi})| > 1$. Классы Λ_ξ переходят в классы K_ξ. Соответственно в окрестности определяющих точек $M(z)$ приводится к квазижорданову виду:

$$\bar{M}(z) = TMT^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & A & & \\ & & C & \\ 0 & & & M_2 \end{bmatrix}, \qquad |z-z_0| < \rho. \qquad /11/$$

Все матрицы разлагаются в ряды по целым степеням $(z-z_0)$. Собственные значения M_1, M_2^{-1} строго меньше 1 по модулю при $|z-z_0| < \rho$, с.з. A, C^{-1} по модулю меньше 1 при $|z| > 1$ и стремятся к предельным значениям, равным по модулю 1, при $z \to z_0$. Матрицы A, C^{-1} имеют блочно-диагональную структуру: каждому классу $K_\xi(|\kappa| \le 1, |z| \ge 1)$ отвечает квазижорданов блок /3/ на диагонали A; каждому классу $K_\xi(|\kappa| \ge 1, |z| \ge 1)$ отвечает квазижорданов блок /3/ на диагонали C^{-1}. Матрица M_{11} имеет размерность $(r1\cdot k, r1\cdot k)$, M_{22} – $(r2\cdot k, r2\cdot k)$, A – (ℓ_1, ℓ_1), C – (ℓ_2, ℓ_2); ℓ_1, ℓ_2 зависят от z_0.

Решение /9/, /10/ записывается через резольвенту оператора перехода от слоя к слою G. В работе [6] выписан явный вид резольвенты в окрестности $|z| = 1$. В частности, краевое условие имеет вид

$$K_1(z)\, w_1^{I} = K_2(z)\, w_1^{II} + \sum_{\nu = r1}^{s} B_\nu^{I}(z)(Tg_\nu)^{I} + B_\nu^{II}(z)(Tg_\nu)^{II}.$$

Аналитические краевые матрицы K_1, K_2 зависят от исходных краевых матриц C_{jm} /см. /10//, $M(z)$ и $T(z)$. В этой работе предполагается, что K_1, K_2 построены с учетом T, приводящего M к квазижорданову виду /11/. K_1 – квадратная матрица размерности $r1\cdot k$, $\dim K_2 = (r1\cdot k,\ r2\cdot k)$. Известно [3], что точки спектра G удовлетворяют $\operatorname{Det} K_1 = 0$. Критерий устойчивости сводится к ряду ограничений на поведение K_1, K_2 в точках спектра на единичной окружности z_0^*. Пусть $s_1(z_0^*)$ – максимальный порядок особенностей элементов K_1^{-1} в точке z_0^*. Если z_0^* является определяющей точкой, обозначим через $s_2(z_0^*)$ максимальный порядок особенностей элементов первых ℓ_2 столбцов $K_1^{-1}\cdot K_2$. Если $\ell_2(z_0^*)=0$, полагаем $s_2(z_0^*)=0$. Пусть

$$s(z_0^*) = \max(s_1(z_0^*),\ s_2(z_0^*) + 1).$$

Наконец, обозначим через $s = \max s(z_0^*)$ по всем точкам спектра G, расположенным на единичной окружности.

Теорема 3. Для того чтобы /10/, /11/ была устойчива в C, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1-3:

1/ должна быть устойчива в C соответствующая задача Коши [5];

2/ спектр G должен лежать в единичном круге $|z| \le 1$;

3/ в точках спектра z_0^*, $|z_0^*| = 1$ элементы $K_1^{-1}(z)$ могут иметь полюса только первого порядка; элементы первых $\ell_2(z_0^*)$ столбцов $K_1^{-1}K_2(z)$ не должны иметь особенностей.

Условие 3 эквивалентно $s \le 1$. Если выполняются условия 1, 2, но нарушается 3, то $\|G^n\|_C \asymp n^{s-1}$.

В работе [6] был доказан критерий устойчивости левой разностной краевой задачи в L_2. При построении резольвенты использовалась треугольная форма резольвентной матрицы.

Приношу благодарность Н.С.Бахвалову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kreiss H.-O. - Math. Scand., 1959, 7, p.71.
2. Урм В.Я. - ДАН СССР, 1961, 139, №1, с.40.
3. Kreiss H.-O. - Math. Comp., 1968, 22, No.104, p.703.
4. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators, Ch.2, Berlin-Heidelberg-N.Y., 1966.
5. Сердюкова С.И. - ЖВМ и МФ, 1967, 7, №3, с.497.
6. Сердюкова С.И. - ДАН СССР, 1973, 208, №1, с.52.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 ноября 1988 года.