сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

X 936

P5-88-782

Е.Х.Христов

ОБ ОПЕРАТОРАХ, СВЯЗАННЫХ С РАЗЛОЖЕНИЯМИ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДВУХ ЗАДАЧ ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ

1988

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе построены операторы, обычно называемые Λ-операторами, для которых полученные в [1] формулы разложения по произведениям решений двух самосопряженных задач Штурма - Лиувилля

$$y_n'' + (k^2 - v_n(x))\, y_n = 0, \quad 0 < x < \infty, \; n = 1,2, \qquad /0.1/$$

$$y_n'(0) - h_n y_n(0,k) = 0 \qquad (' = d/dx) \qquad /0.2/$$

являются разложениями единицы. Здесь и в дальнейшем h_n - конечные, действительные числа, потенциалы $v_n(x)$ удовлетворяют условию

$$\| v_n \|_{X_1} \overset{\text{def.}}{=\!=} \int_0^\infty (1 + x)\, | v_n(x) |\, dx < \infty . \qquad /0.3/$$

Спектральная теория Λ-операторов для случая, когда $h_n = \infty$, т.е. имеем граничные условия $y_n(0) = 0$, изложена [2,3]. Интерес к этой проблематике обусловлен, главным образом, их применением в теории солитонов /см., например, [4] /, а также к обратным задачам спектрального анализа [5,6,7].

1. ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

Обозначим через $\psi_n(x,k)$, $f_n(x,k)$ решения уравнений /0.1/, для которых

$$\psi_n(0,k) = 1, \; \psi_n'(0,k) = h_n, \quad \lim_{x\to\infty} f_n(x,k)\exp(-ikx) = 1, \qquad /1.1/$$

и пусть

$$e_n(k) = f_n'(0,k) - h_n f_n(0,k) = W(\psi_n, f_n) \equiv \psi_n f_n' - \psi_n' f_n \qquad /1.2/$$

- характеристическая функция задачи /0.1/, /0.2/.

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

Хорошо известно /см., например,[7] /, что при любом $x \geq 0$, $\psi_n(x,k)$, $\psi'_n(x,k)$ есть целые, четные функции от k, а $f_n(x,k)$, $f'_n(x,k)$ и $e_n(k)$ - регулярные при $\mathrm{Im}\,k > 0$, непрерывные вплоть до вещественной оси функций. С некоторой постоянной C /не зависящей от x и k/ справедливы оценки

$$|f_n(x,k)| \leq C\exp(-\tau x),\ |f'_n(x,k)| \leq C(1+|k|)\exp(-\tau x),$$

$$|\psi_n(x,k)| \leq C(1+x)\exp(|\tau|x),\ |\psi'_n(x,k)| \leq C(1+|k|)\exp(|\tau|x),$$

$$|k\psi_n(x,k)| \leq C(1+|k|)\exp(|\tau|x), \quad k = \kappa + i\tau,$$

и равномерно по $0 \leq x < \infty$ при $|k| \to \infty$, $\mathrm{Im}\,k \geq 0$, асимптотики

$$\psi(x,k) = \cos kx + \frac{1}{k}A(x,k) + O\left(\frac{1}{k^2}e^{\tau x}\right),$$
$$f(x,k) = e^{ikt} + \frac{1}{k}B(x,k) + O\left(\frac{1}{k^2}e^{-\tau x}\right), \qquad /1.4/$$

где

$$A(x,k) = h\sin kx + \int_0^x \sin k(x-t)\cos kt\, v(t)\,dt,$$

$$B(x,k) = \int_x^\infty \sin k(t-x)e^{ikt}v(t)\,dt,$$

допускающие дифференцирование по x. Отсюда, в частности, имеем

$$e(k) = ik(1 + O(k^{-1})). \qquad /1.5/$$

Функция $\ell_n(k)$ имеет при $\mathrm{Im}\,k > 0$ конечное число простых нулей, множество которых обозначим через

$$\sigma_n = \{k_{n,j} = i\tau_{n,j},\ \tau_{n,j} > 0 \,|\, \ell_n(k_{n,j}) = 0\}_{j=1}^{N_j}.$$

Тогда

$$\psi_n(x,k_{n,j}) = f_n^{-1}(0,k_{n,j})f_n(x,k_{n,j}), \qquad /1.6/$$

$$\dot\psi_n(x,k_{n,j}) = (2ik_{n,j})^{-1}\exp(-ik_{n,j}x)(1+o(1)),\ x \to \infty. \qquad /1.7/$$

При вещественных $k \neq 0$, $e_n(k) \neq 0$, $e_n(-k) = \overline{e_n(k)}$ и

$$\psi_n(x,k) = \frac{1}{2ik}\{f_n(x,k)e_n(-k) - f_n(x,-k)e_n(k)\}. \qquad /1.8/$$

При $k = 0$ возможен случай виртуального уровня $\ell_n(0) = 0$. Тогда существует

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1}\ell_n(k) = \dot e(0) \neq 0 \qquad (\dot e = \partial/\partial k) \qquad /1.9/$$

и

$$f_n(x,0) = f_n(0,0)\psi_n(x,0),\ f_n(0,0) = i\dot e^{-1}(0). \qquad /1.10/$$

Введем пространство $\mathfrak{N} = L_2(0,\infty) \oplus \boldsymbol{R} \ni \hat f = (f(x),\alpha)$ со скалярным произведением

$$(\hat f_1, \hat f_2)_1 = (f_1,f_2) + \alpha_1\alpha_2, \quad (f_1,f_2) = \int_0^\infty f_1(x)f_2(x)\,dx. \qquad /1.11/$$

Этим обозначением будем пользоваться и в случае, когда $f_1(x) \in X_1$, т.е. f_1 удовлетворяет условию /0.3/, $f_2(x) \in L_\infty(0,\infty)$. Соответствующие пространства обозначаем через $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_\infty$. Далее пусть, как обычно, $C^{(k)}(0,\infty)$ - пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, а $\overset{\circ}{C}{}^{(k)}(0,\infty)$ - пространство функций $f(x) \in C^{(k)}$, для которых $\lim_{x\to\infty} f^{(\ell)}(x) = 0$, $\ell = 0, 1, \ldots, k$, и пусть

$$\mathfrak{N}^{(k)} = C^{(k)}(0,\infty) \oplus \boldsymbol{R}, \quad \overset{\circ}{\mathfrak{N}}{}_k^{(k)} = \overset{\circ}{C}{}_0^{(k)}(0,\infty) \oplus \boldsymbol{R}.$$

Пусть

$$\hat\Psi'(k) = \begin{pmatrix} \Psi'(x,k) \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \hat F(k) = \begin{pmatrix} F(x,k) \\ F(0,k) \end{pmatrix}, \qquad /1.12/$$

где $\Psi(x,k) = \psi_1(x,k)\psi_2(x,k)$, $F(x,k) = f_1(x,k)f_2(x,k)$.

Построим в $\mathfrak{N}_\infty$ систему

$$\{\hat\Psi'\} = \{\hat\Psi'(k),\ k \in (0,\infty);\ \hat\Psi'_{n,j} = \hat\Psi'(k_{n,j}),\ k_{n,j} \in \sigma'';$$
$$\hat\Psi'_{j,1} = \hat\Psi'(k_j),\ \hat\Psi'_{j,2} = \dot{\hat\Psi}'(k_j),\ k_j \in \sigma'\}, \qquad /1.13/$$

где $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma' = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma'' = \sigma \setminus \sigma'$. Далее введем систему $\{\hat{\tilde F}\}$ следующим образом: при $k \in (0,\infty)$ положим

$$\hat{\tilde F}(k) = \frac{4}{\pi}k\,\mathrm{Im}\{\hat F(k)/E(k)\},\ \tilde F(x,k) = \frac{4}{\pi}k\,\mathrm{Im}\left\{\frac{F(x,k)}{E(k)}\right\}, \qquad /1.14/$$

где $E(k) = e_1(k)e_2(k)$; при $k_{n,j} \in \sigma''$ положим

$$\hat{\tilde{F}}_{n,j} = -a_{n,j}\hat{F}(k_{n,j}), \quad a_{n,j} = 4k_{n,j}\dot{E}^{-1}(k_{n,j}), \qquad /1.15/$$

и каждому $k_j \in \sigma'$ отнесем пару функций

$$\hat{\tilde{F}}_{j,1} = -b_j(\hat{F}(k_j) + d_j\hat{F}(k_j)), \quad \hat{\tilde{F}}_{j,2} = -b_j\hat{F}(k_j), \qquad /1.16/$$

где $b_j = 8k_j\ddot{E}^{-1}(k_j)$, $d_j = k_j^{-1} - \dddot{E}(k_j)(3\ddot{E}(k_j))^{-1}$.

В случае $e_1(0) = e_2(0) = 0$ к этой системе добавим

$$\hat{\tilde{F}}_o = -a_o\hat{F}(0), \quad a_o = 2\lim_{k\to o} k^2E^{-1}(k). \qquad /1.17/$$

Теорема 1.1. Для любой функции $\hat{f} = (f(x), \alpha) \in \mathfrak{N}_1$ справедливы формулы разложения

$$\hat{f} = \int_o^\infty \hat{\Psi}'(k)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}(k))_1\,dk + \hat{\Psi}'(0)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_o)_1 + \Sigma''\hat{\Psi}'_{n,j}(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{n,j})_1 + \Sigma'\sum_{\ell=1,2}\hat{\Psi}'_{j,\ell}(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{j,\ell})_1, \qquad /1.18/$$

и

$$\hat{f} = \int_o^\infty \hat{\tilde{F}}(k)(\hat{f}, \hat{\Psi}'(k))_1\,dk + \hat{\tilde{F}}_o(\hat{f}, \hat{\Psi}'(0))_1 + \Sigma''\hat{\tilde{F}}_{n,j}(\hat{f}, \hat{\Psi}'_{n,j})_1 + \Sigma'\sum_{\ell=1,2}\hat{\tilde{F}}_{j,\ell}(\hat{f}, \hat{\Psi}'_{j,\ell})_1, \qquad /1.19/$$

где суммирование в Σ'' ведется по всем $k_{n,j} \in \sigma''$, в Σ' - по всем $k_j \in \sigma'$. Здесь в коэффициентах разложения $(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}(k))_1$, $(\hat{f}, \hat{\Psi}'(k))_1$ и т.д. соответствующие интегралы сходятся абсолютно. Если обозначить

$$f_R^*(x) = \int_o^R \Psi'(x,k)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}(k))_1\,dk + \dots, \quad f_R(x) = \int_o^R \tilde{F}(x,k)(\hat{f}, \hat{\Psi}'(k))_1\,dk + \dots,$$

то равномерно по $0 < \delta \le x \le N < \infty$

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{\delta\le x\le N}\left|\frac{2}{\pi}\int_o^{2R}\left\{\int_o^\infty f(y)\sin ky\,dy\right\}\sin kx\,dk - f_R^*(x)(f_R(x))\right| = 0. \qquad /1.20/$$

Тогда формула /1.18/ эквивалентна равенству /1.20/ с $f_R^*(x)$ и равенству

$$2\alpha = \int_o^\infty(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}(k))_1\,dk + (\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_o) + \Sigma''(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{n,j})_1 + \Sigma'(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{j,1})_1, \qquad /1.21/$$

а формула /1.19/ эквивалентна равенству /1.20/ с $f_R(x)$ и равенству

$$\alpha = \int_o^\infty \tilde{F}(0,k)(\hat{f}, \hat{\Psi}'(k))_1\,dk + \tilde{F}_o(0)(\hat{f}, \hat{\Psi}'(0))_1 + \Sigma''\tilde{F}_{n,j}(0)(\hat{f}, \hat{\Psi}'_{n,j})_1 + \Sigma'\sum_{\ell=1,2}\tilde{F}_{j,\ell}(0)(\hat{f}, \hat{\Psi}'_{j,\ell})_1. \qquad /1.22/$$

В частности, разложения /1.18/, /1.19/ имеют место для любой абсолютно непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию /0.3/.

Замечание 1. В работе[1] было показано, что при любом $x \ge 0$ для всякой функции $f(x) \in X_1$ справедливо разложение

$$-\int_x^\infty f(y)\,dy = \int_o^\infty \tilde{F}(x,k)(f, \tilde{\Psi}(k))\,dk - \tilde{F}_o(x)(f, \tilde{\Psi}(0)) - \Sigma'\tilde{F}_{n,j}(f, \tilde{\Psi}_{n,j}) - \Sigma'\{\tilde{F}_{j,1}(x)(f, \tilde{\Psi}(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(f, \dot{\Psi}(k_j))\}, \qquad /1.23/$$

где $\tilde{\Psi}(x,k) = \Psi(x,k) - \frac{1}{2}$, при этом

$$\int_o^\infty \tilde{F}(x,k)\,dk + \tilde{F}_o(x) + \Sigma''\tilde{F}_{n,j}(x) + \Sigma'\tilde{F}_{j,1}(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases} \qquad /1.24/$$

Пусть $f(x) = -\int_x^\infty f'(s)\,ds$, $f'(x) \in X_1$, тогда имеем тождество

$$(\hat{f}, \hat{\Psi}'(k))_1 = \frac{1}{2}(\alpha - f(0)) - (f', \tilde{\Psi}(k)), \quad k \in (0,\infty) \cup \sigma. \qquad /1.25/$$

Отсюда, заменяя $f(x)$ на $f'(x)$ в /1.23/ и учитывая /1.24/,

получаем формулу /1.19/ для $\hat{f} \in \mathfrak{N}_1$, где $f'(x) \in X_1$. Доказательство теоремы 1.1 предпошлем следующей теоремой.

Теорема 1.2. Для $\hat{f} = (f(x), a) \in \mathfrak{N}_1$ справедлива формула разложения

$$\int_0^x f(y)\,dy + 2a = \int_0^\infty \Psi(x,k)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}(k))_2\,dk + \Psi(x,0)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_0)_1 + \qquad /1.26/$$

$$+ \Sigma'' \Psi_{n,j}(x)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{n,j})_1 + \Sigma'\{\Psi(x,k_j)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{j,1})_1 + \Psi(x,k_j)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{j,2})_1\},$$

где сходимость равномерна по x в любом конечном интервале $0 \le x \le N$.

Замечание 1. Формула /1.18/ получается из /1.26/ при $x = 0$ и формальным дифференцированием по x при $x > 0$.

Доказательство теоремы 1.2 получим сходными с[1] построениями. Введем функцию

$$G^*(x,y,k) = -\frac{4k}{E(k)} \begin{cases} \sum\limits_{n=1,2} U_n(x,k)\,U_{3-n}(y,k) - F(x,k)\,\Psi(y,k), & 0 < y \le x, \\ \Psi(x,k)\,F(y,k), & x \le y < \infty, \end{cases} \qquad /1.27/$$

где $U_n(x,k) = f_n(x,k)\psi_{3-n}(x,k)$, и рассмотрим контурный интеграл

$$I^*_{R,\epsilon}(\hat{f}, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R,\epsilon}} Q^*(\hat{f}; x, k)\,dk, \qquad /1.28/$$

где

$$Q^*(\hat{f}; x, k) = \int_0^\infty G^*(x,y,k)\,f(y)\,dy + aG^*(x,0,k),$$

контур $\gamma_{R,\epsilon}$ продолжается вдоль вещественной оси k от $-R$ до R, обходя точку $k = 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im} k \ge 0$ по полуокружности $\gamma_\epsilon : k = \epsilon \exp(i(\pi - \phi))$, $0 \le \phi \le \pi$, $\epsilon < \min|k_{n,j}|$ и замыкается полуокружностью $\gamma : k = R\exp(i\phi)$, $0 \le \phi \le \pi$, $R > \max|k_{n,j}|$. По теореме о вычетах, с учетом равенства /1.6/, получаем

$$I^*_{R,\epsilon}(x) = \Sigma'' \Psi_{n,j}(x)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{n,j})_1 + \Sigma'\{\Psi(x,k_j)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{j,1})_1 + \Psi(x,k_j)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{j,2})_1\}.$$

Подсчитаем теперь непосредственно ко контуру $\gamma_{R,\epsilon}$ $\lim I^*_{R,\epsilon}(x)$ при $\epsilon \to 0$ и $R \to \infty$. Из /1.8/ и $f(x,-k) = \overline{f(x,k)}$ имеем при любых $R < \infty$, $\epsilon > 0$ равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\Big\{\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_\epsilon^R\Big\} Q^*(\hat{f}, x, k)\,dk = -\int_\epsilon^R \Psi(x,k)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}(k))_1\,dk. \qquad /1.30/$$

Далее, имея в виду /1.9/ и /1.10/, при $e_n(0) = 0$, $n = 1,2$ получаем с учетом оценок /1.3/, что если $f(x)$ удовлетворяет условию /0.3/, то равномерно по $0 \le x \le N < \infty$ существует

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} Q^*(\hat{f}; x, k)\,dk = -\Psi(x,0)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_0)_1. \qquad /1.31/$$

Из асимптотик /1.4/, /1.5/ имеем при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \ge 0$ равномерно по $0 \le x < \infty$

$$Q^*(f; x, k) = \frac{2}{k}\Big\{\int_0^x \hat{f}(y)\,dy + \int_0^\infty f(y)\,e^{2iky}\,dy + \cos 2kx \int_x^\infty f(y)\,e^{2iky}\,dy +$$

$$+ ie^{2ikx} \int_0^x f(y)\sin 2ky\,dy\Big\} + \frac{4}{k}a + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big).$$

Отсюда в силу леммы Жордана находим

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} Q^*(\hat{f}; x, k)\,dk = \int_0^x f(y)\,dy + 2a. \qquad /1.32/$$

Искомую формулу /1.26/ получаем, сравнивая равенства /1.29/ с /1.30/, /1.31/, /1.32/. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.1. По функции G^* /1.27/ построим

$$\hat{Q}^*(\hat{f}; x, k) = \begin{pmatrix} \int_0^\infty G^*_x(x,y,k)\,f(y)\,dy + a\,G^*_x(x,0,k) \\ \frac{1}{2}\int_0^\infty G^*(0,y,k)\,f(y)\,dy + \frac{1}{2}aG^*(0,0,k) \end{pmatrix} \qquad /1.33/$$

и

$$\hat{Q}(\hat{f}; x, k) = \begin{pmatrix} \int_0^\infty G_y(x,y,k)\,f(y)\,dy + \frac{1}{2}aG(x,0,k) \\ \int_0^\infty G_y(0,y,k)\,f(y)\,dy + \frac{1}{2}aG(0,0,k) \end{pmatrix}, \qquad /1.34/$$

где

$$G(x,y,k) = G^*(y,x,k) \qquad 0 \le x,y < \infty. \qquad /1.35/$$

Из асимптотик /1.4/, /1.5/ получаем, что равномерно по $0 \le x,y < \infty$ при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \ge 0$

$$G^*_x(x,y,k) = -4\begin{cases} e^{2ikx}\sin 2ky, & 0 < y < x, \\ \sin 2kx\, e^{2iky}, & x < y < \infty, \end{cases}$$

$$+ \{O(\frac{1}{k}H(x,k)) + O(\frac{1}{k^2})\}\theta(x-y) + O(\frac{1}{k}e^{-2\tau|x-y|}),$$

$$G_y(x,y,k) = -4\begin{cases} e^{2ikx}\sin 2ky, & 0 \le y < x, \\ \sin 2kx\, e^{2iky}, & x < y < \infty, \end{cases}$$

$$+ \{O(\frac{1}{k}H(y,k)) + O(\frac{1}{k^2})\}\theta(y-x) + O(\frac{1}{k}e^{-2\tau|x-y|}),$$

где

$$H(x,k) = (h_1+h_2)e^{2ikx} + \frac{1}{2}e^{2ikx}\int_0^x s(t)dt + \frac{1}{2}e^{2ikx}\int_0^x s(t)e^{-2ikt}dt -$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2ikx}\int_x^\infty s(t)e^{2ikt}dt - \frac{1}{2}e^{2ikx}\int_x^\infty s(t)dt, \quad s = v_1 + v_2,$$

и

$$G(x,0,k) = 4(k^{-1}e^{2ikx} + O(k^{-2}e^{-2\tau x}).$$

Отсюда, так как

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_R}\{e^{2ikx}\int_0^x f(y)\sin 2ky\,dy + \sin 2kx\int_x^\infty f(y)e^{2iky}dy\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2R}\{\int_0^\infty f(y)\sin 2ky\,dy\}\sin kx\,dk,$$

формулы разложения /1.18/ и /1.19/ выводятся путем подсчета, как в доказательстве теоремы 1.2, контурных интегралов

$$(2\pi i)^{-1}\oint_{\gamma_{R,\epsilon}}\hat{Q}^*(\hat{f};x,k)\,dk \qquad \text{и} \qquad (2\pi i)^{-1}\oint_{\gamma_{R,\epsilon}}\hat{Q}(\hat{f};x,k)\,dk.$$

Теорема доказана.

2. ОПЕРАТОРЫ $\hat{L}$ И $\hat{L}^*$

Построим по потенциалам $v_n(x)$ и числам h_n, определяющим краевые задачи /0.1/ /0.2/, оператор

$$\hat{L}^* = \begin{pmatrix} L^* & S^*(x) \\ -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} & c^* \end{pmatrix}, \qquad /2.1/$$

где

$$L^* = \frac{1}{4}\{-\frac{d^2}{dx^2} + 2s(x) + s_x(x)\int_0^x dy - \Delta(x)\int_0^x dy\,\Delta(y)\int_0^y dz\}, \qquad /2.2/$$

$$S^*(x) = \frac{1}{2}w(x) - \frac{1}{2}(h_1 - h_2)\Delta(x), \quad c^* = \frac{1}{2}s(0) + h_1h_2, \qquad /2.3/$$

$$w(x) = s_x(x) - \Delta(x)\int_0^x \Delta(y)\,dy, \quad s(x) = v_1 + v_2, \quad \Delta(x) = v_1 - v_2, \qquad /2.4/$$

который действует на любой функции $\hat{f} \in \mathfrak{N}^{(2)}$ по формуле

$$\hat{L}^*\hat{f} = \begin{pmatrix} L^*f(x) + \alpha S^*(x) \\ -\frac{1}{4}f'(0) + \alpha c^* \end{pmatrix}. \qquad /2.5/$$

Теорема 2.1. Функция $\hat{\Psi}'(k)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}^*\hat{\Psi}'(k) = k^2\hat{\Psi}'(k), \qquad /2.6/$$

и

$$\Psi'(0,k) = (h_1 + h_2)\Psi(0,k), \quad (\Psi(0,k) = 1). \qquad /2.7/$$

Доказательство. Непосредственно из уравнений /0.1/ следует, что произведение $Y(x,k) = y_1(x,k)y_2(x,k)$ любых двух решений y_n удовлетворяет уравнению

$$-Y''(x,k)+s(x)Y(x,k)+2y_1'(x,k)y_2'(x,k)=2\lambda Y(x,k),\ \lambda=k^2. \qquad /2.8/$$

В работе[9] было показано, что если ввести оператор

$$L_{x_0}=\frac{1}{4}\{-\frac{d^2}{dx^2}+2s(x)-\int_{x_0}^{x}s_y(y)dy-\int_{x_0}^{x}\Delta(y)dy\int_{x_0}^{y}\Delta(z)dz\}, \qquad /2.9/$$

то

$$L_{x_0}Y(x,k)=\lambda Y(x,k)+B(x_0;x,k), \qquad /2.10/$$

где

$$B(x_0;x,k)=-\frac{1}{4}\{W(y_1(x),y_2(x)|_{x=x_0}\int_{x_0}^{x}\Delta(y)dy+$$

$$+(2\lambda-s(x_0))Y(x_0,k)+2y_1'(x_0,k)y_2'(x_0,k)\}.$$

Положим в /2.8/ $x=0$, в /2.10/ $x_0=0$, $Y(x,k)=\Psi(x,k)$. Тогда, с учетом начальных условий /1.1/, получаем

$$-\Psi''(0,k)+(s(0)+2h_1h_2)\Psi(0,k)=2k^2\Psi(0,k), \qquad /2.11/$$

$$L_0\Psi(x,k)=k^2(\Psi(x,k)-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}\{(h_2-h_1)\int_0^x\Delta(y)dy-s(0)+2h_1h_2\}.$$

Дифференцируя по x равенство /2.12/ и полагая затем

$$\Psi(x,k)=1+\int_0^x\Psi'(s,k)ds,$$

получаем

$$L^*\Psi'(x,k)+\frac{1}{2}S^*(x)=k^2\Psi'(x,k), \qquad /2.13/$$

что вместе с /2.11/ дает уравнение /2.6/. Равенство /2.7/ следует сразу из /1.1/. Теорема доказана.

Несколько сложнее устанавливается следующая

Лемма 2.1. При любом k, $\operatorname{Im}k\geq 0$ функция $F(x,k)$ удовлетворяет уравнению

$$LF(x,k)=k^2F(x,k), \qquad L=L_{x_0=\infty}. \qquad /2.14/$$

При этом

$$(S^*,F(k))-\frac{1}{2}(h_1+h_2)F'(0,k)+c^*F(0,k)=k^2F(0,k)+E(k). \qquad /2.15/$$

Доказательство. Уравнение /2.14/ следует сразу из уравнения /2.10/ при $x_0=\infty$, $Y=F(x,k)$, так как в силу /1.1/ $B(x_0=\infty;x,k)=0$. Далее напомним, что из уравнений /0.1/ вытекают следующие тождества

$$W(y_1(x,k),y_2(x,k))=W(y_1(0,k),y_2(0,k)-\int_0^x\Delta(s)Y(s,k)ds, \qquad /2.16/$$

$$\int_0^x w(s)Y(s,k)ds=-W(y_1(x,k),y_2(x,k))\int_0^x\Delta(s)ds+$$

$$+\{(2\lambda-s(t))Y(t,k)+2y_1'(t,k)y_2'(t,k)\}|_{t=0}^{x}. \qquad /2.17/$$

Положим здесь $y_n=f_n(x,k)$. Тогда при $x\to\infty$ в силу /1.1/ получаем

$$(\Delta,F(k))=f_1(0,k)f_2'(0,k)-f_1'(0,k)f_2(0,k),$$

$$(w,F(k))=F(0,k)(2k^2-s(0))+2f_1'(0,k)f_2'(0,k),$$

что вместе с равенствами /1.2/, т.е.

$$f_n'(0,k)=h_nf_n(0,k)+e_n(k)$$

дает соотношение /2.15/. Лемма доказана.

Введем теперь оператор

$$\hat{L}=\begin{pmatrix} L & 0\\ (\ ,S^*)-\frac{1}{2}(h_1+h_2)\frac{d}{dx}|_{x=0} & c^*\end{pmatrix} \qquad /2.18/$$

$$\hat{L}\hat{f}=\begin{pmatrix} Lf(x)\\ (f,S^*)-\frac{1}{2}(h_1+h_2)f'(0)+\alpha c^*\end{pmatrix},\quad \hat{f}=\begin{pmatrix} f(x)\\ \alpha\end{pmatrix}, \qquad /2.19/$$

Тогда из леммы 2.1 получаем, что справедлива

Теорема 2.2. При вещественных k функция $\hat{F}(k)$ /1.14/ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}\hat{F}(k)=k^2\hat{F}(k) \qquad /2.20/$$

и при $k_{n,j} \in \sigma$, $k_j \in \sigma'$ функция $\hat{F}(k)$ /1.12/ - уравнениям

$$\hat{L}\hat{F}(k_{n,j}) = k^2_{n,j}\hat{F}(k_{n,j}),\ \hat{L}\dot{\hat{F}}(k_j) = k_j^2\dot{\hat{F}}(k_j) + 2k_j\hat{F}(k_j). \qquad /2.21/$$

Так как если при $\lim\limits_{x\to\infty} W(f(x), g(x)) = 0$ имеем тождество

$$(Lf, g) = (f, L^*g) + \frac{1}{4}(f'(0)g(0) - f(0)g'(0)), \qquad /2.22/$$

то из /2.5/ и /2.19/ следует

Теорема 2.3. Оператор $\hat{L}^*$ с областью определения

$$\mathfrak{D}(\hat{L}^*) = \{\hat{f} \in \overset{\circ}{\mathfrak{N}}{}^{(2)},\ f(x), L^*f(x) \in X_1, f(0) = 2(h_1 + h_2)\alpha\} \qquad /2.23/$$

является сопряженным относительно скалярного произведения /1.11/ оператору $\hat{L}$ с областью определения

$$\mathfrak{D}(\hat{L}) = \{\hat{f} \in \overset{\circ}{\mathfrak{N}}{}^{(2)},\ f(x), Lf(x) \in X_1, f(0) = \alpha\}, \qquad /2.24/$$

т.е. для любых $\hat{f} \in \mathfrak{D}(\hat{L})$ и $\hat{g} \in \mathfrak{D}(\hat{L}^*)$,

$$(\hat{L}\hat{f}, \hat{g})_1 = (\hat{f}, \hat{L}^*\hat{g})_1. \qquad /2.25/$$

Из этой теоремы, с учетом уравнений /2.6/, /2.7/ и /2.20/, /2.21/, получаем

Следствие 1. Для любой $\hat{f} \in \mathfrak{D}(\hat{L})$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &k^2(\hat{f}, \hat{\Psi}'(k))_1 = (\hat{L}\hat{f}, \hat{\Psi}'(k))_1, \qquad k \in (0,\infty) \cup \sigma, \\ &k_j^2(\hat{f}, \dot{\hat{\Psi}}'(k_j))_1 + 2k_j(\hat{f}, \hat{\Psi}'(k_j))_1 = (\hat{L}\hat{f}, \dot{\hat{\Psi}}'(k_j)), \qquad k_j \in \sigma' \end{aligned} \qquad /2.26/$$

и для любой $\hat{f} \in \mathfrak{D}(\hat{L}^*)$

$$\begin{aligned} &k^2(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}(k))_1 = (\hat{L}^*\hat{f}, \hat{\tilde{F}}(k))_1, \qquad k \in (0,\infty), \\ &k^2_{n,j}(\hat{f}, \hat{F}(k_{n,j}))_1 = (\hat{L}^*\hat{f}, \hat{F}(k_{n,j}))_1, \qquad k_{n,j} \in \sigma, \\ &k_j^2(\hat{f}, \dot{\hat{F}}(k_j))_1 + 2k_j(\hat{f}, \hat{F}(k_j))_1 = (\hat{L}^*\hat{f}, \dot{\hat{F}}(k_j))_1, \quad k_j \in \sigma'. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу теоремы 1.1, вытекает

Теорема 2.4. Формулы разложения /1.18/ и /1.19/ являются разложениями единицы для операторов L^* и L соответственно. Точнее, для любой $\hat{f} \in \mathfrak{D}(\hat{L}^*)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \hat{L}^*\hat{f} = &\int_0^\infty k^2\hat{\Psi}'(k)(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}(k))_1 dk + \Sigma'' k^2_{n,j}\hat{\Psi}'_{n,j}(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{n,j})_1 + \\ &+ \Sigma'\{k_j^2\hat{\Psi}'_{j,1}(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{j,1})_1 + (k_j^2\hat{\Psi}'_{j,2} + 2k_j\hat{\Psi}'_{j,1})(\hat{f}, \hat{\tilde{F}}_{j,2})_1\} \end{aligned} \qquad /2.28/$$

и для любой $\hat{f} \in \mathfrak{D}(\hat{L})$ - представление

$$\begin{aligned} \hat{L}\hat{f} = &\int_0^\infty k^2\hat{\tilde{F}}(k)(\hat{f}, \hat{\Psi}'(k))_1 dk + \Sigma'' k^2_{n,j}\hat{\tilde{F}}_{n,j}(\hat{f}, \hat{\Psi}'_{n,j})_1 + \\ &+ \Sigma'\{(k_j^2\hat{\tilde{F}}_{j,1} + 2k_j\hat{\tilde{F}}_{j,2})(\hat{f}, \hat{\Psi}'_{j,1})_1 + k_j^2\hat{\tilde{F}}_{j,2}(\hat{f}, \hat{\Psi}'_{j,2})_1\}, \end{aligned} \qquad /2.29/$$

где сходимость понимается в указанном в теореме 1.1 смысле.

Замечание 1. Положим

$$\hat{g} = (g(x) = \int_x^\infty f(s)\,ds, g(0)),\ \hat{L}\hat{g} = \hat{h} = (h(x), \beta),$$

где $\hat{g} \in \mathfrak{D}(\hat{L})$. Тогда из /1.25/ и /2.26/ следует, что если выполняется условие $h(0) = \beta$, т.е.

$$Lg(x)\big|_{x=0} = (S^*, g) - \frac{1}{2}(h_1 + h_2)g'(0) + c^*g(0),\ (g(x) = \int_x^\infty f(s)\,ds), \qquad /2.30/$$

то имеем равенства

$$k^2(f, \tilde{\Psi}(k)) = k^2(\hat{g}, \hat{\Psi}'(k))_1 = -((Lg)', \tilde{\Psi}(k)). \qquad /2.31/$$

Введем оператор

$$\tilde{L} = \frac{1}{4}\{-\frac{d^2}{dx^2} + 2s(x) - s_x(x)\int_x^\infty dy - \Delta(x)\int_x^\infty dy\,\Delta(y)\int_y^\infty dz\}. \qquad /2.32/$$

Тогда из /1.23/, так как $\frac{d}{dx}Lg(x) = -\tilde{L}f(x)$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{L}f(x) = &-\int_0^\infty k^2\tilde{F}'(x,k)(f, \tilde{\Psi}(k))\,dk + \Sigma'' k^2_{n,j}\tilde{F}'_{n,j}(x)(f, \tilde{\Psi}_{n,j}) - \\ &- \Sigma'\{(k_j^2\tilde{F}'_{j,1}(x) + 2k_j\tilde{F}'_{j,2}(x))(f, \tilde{\Psi}_{j,1}) + k_j^2\tilde{F}'_{j,2}(x)(f, \tilde{\Psi}_{j,2})\}, \end{aligned} \qquad /2.33/$$

т.е. формула, которая получается из /1.23/ почленным дифференцированием по x [1], является разложением единицы для оператора $\tilde{L}$.

Замечание 2. Приведем пример, в котором естественным образом возникают разложения вида /1.18/, /1.26/. Сопоставим каждой краевой задачи /0.1/, /0.2/ набор величин

$$R(\hat{v}_n) = \{\rho(\hat{v}_n, k) = \frac{2}{\pi}\frac{k^2}{|e_n(k)|^2},\ \lambda_j(\hat{v}_n) = k_{n,j}^2,\ C_j(\hat{v}_n),\ j=1,2,\dots N_n\},$$

где

$$\hat{v}_n = \begin{pmatrix} v_n(x) \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}_1,\ C_j(\hat{v}_n) = \left(\int_0^\infty \psi_n^2(x, k_{n,j})\,dx\right)^{-1} = \frac{2k_{n,j} f_n(0, k_{n,j})}{\dot{e}_n(k_{n,j})},$$

определяющих спектральную функцию. С помощью тождества /2.16/ выводятся следующие равенства

$$\begin{aligned} &\rho(\hat{v}_1;k) - \rho(\hat{v}_2;k) = -(1/2)(\Delta\hat{v}, \hat{\tilde{F}}(k))_1, \quad \Delta\hat{v} = \hat{v}_1 - \hat{v}_2, \\ &(-1)^n 2C_j(\hat{v}_n) = (\Delta\hat{v}, \hat{\tilde{F}}_{n,j})_1, \quad k_{n,j} \in \sigma'', \\ &(\Delta\hat{v}, \hat{F}(k_j)) = 0,\ 2(C_j(\hat{v}_1) - C_j(\hat{v}_2)) = b_j(\Delta\hat{v}, \hat{F}(k_j))_1, \end{aligned} \qquad /2.35/$$

и если $a_0 \neq 0$ $(\Delta\hat{v}, \hat{F}(0))_1 = 0$. Отсюда, в силу теоремы 1.2, получаем сразу, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^x \Delta v(s)\,ds + (h_1 - h_2) = \int_0^\infty (\rho(\hat{v}_2;k) - \rho(\hat{v}_1;k))\,\Psi(x,k)\,dk + \\ &+ \Sigma''(-1)^n C_j(\hat{v}_n)\,\Psi(x,k_{n,j}) + \Sigma'\{C_j(\hat{v}_2) - C_j(\hat{v}_1))\,\Psi(x,k_j). \end{aligned} \qquad /2.36/$$

В частности, если $R(\hat{v}_1) = \hat{R}(\hat{v}_2)$, то $v_1(x) = v_2(x)$, $h_1 = h_2$, что является известной теоремой Марченко о единственности обратной задачи [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Христов Е.Х. - Диф.уравнения, 1980, т.16, № 11, с.2023; препринт ОИЯИ Р5-11754, Дубна, 1978.
2. Христов Е.Х. - Годишник Соф.университета, т.75, кн. 2 - Механика, 1981, с.197.

3. Христов Е.Х. - Годишник Соф.университета, т.75, кн.2. Механика, 1981, 1981, с.215.
4. Калоджеро Ф., Дегаспарис А. Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985.
5. Isaacson F.L., Trubowitz E. - Com.Pure and Appl. Math., 1983, v.36, p.767.
6. Левитан Б.М. - Матем.сборник, 1987, 132, 174, № 1, с.73.
7. Pöschler J., Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. Pure and Appl.Math., 1987, v.130, Academic press, inc.
8. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма - Лиувилля. Киев: Наукова думка, 1972.
9. Calogero F. Generalized Wronskian relations: a novel approach to Bargman-equivalent and physe equivalent potentials. Studies in Math.Phys.Princeton, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1988 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Христов Е.Х. P5-88-782

Об операторах, связанных с разложениями по произведениям решений двух задач Штурма - Лиувилля

Получены формулы разложения по произведениям $Y = y_1(x,k)\,y_2(x,k)$ решений y_n двух самосопряженных задач Штурма - Лиувилля

$$y_n'' + (k^2 - v_n(x))\,y_n = 0,\ 0 < x < \infty,\ y_n'(0) - h_n y_n(0) = 0,\ n = 1,2,$$

где

$$(1+x)\,|v_n(x)| \in L_1(0,\infty),$$

и построен явный вид операторов, для которых они являются разложениями единицы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод автора

Khristov E.Kh. P5-88-782

On Operators Associated with the Product of Solutions of Two Sturm-Liouville Problems

Expansion formulae over the product $Y = y_1(x,k)\,y_2(x,k)$ of the solutions of two selfadjoint Sturm-Liouville problems

$$y_n'' + (k^2 - v_n(x))\,y_n = 0,\ 0 < x < \infty,\ y_n'(0) - h_n y_n(0) = 0,\ n = 1,2,$$

where

$$(1+x)\,|v_n(x)| \in L_1(0,\infty),$$

are obtained. An explicit form of the operators for which these formulae are expansions of the unit is constructed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988