сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-782

Е.Х.Христов

ОБ ОПЕРАТОРАХ, СВЯЗАННЫХ С РАЗЛОЖЕНИЯМИ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДВУХ ЗАДАЧ ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ

1988

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе построены операторы, обычно называемые Λ-операторами, для которых полученные в[1] формулы разложения по произведениям решений двух самосопряженных задач Штурма - Лиувилля

$$y_n'' + (k^2 - v_n(x))\,y_n = 0, \quad 0 < x < \infty, \ n = 1,2, \qquad /0.1/$$

$$y_n'(0) - h_n y_n(0,k) = 0 \quad (' = d/dx) \qquad /0.2/$$

являются разложениями единицы. Здесь и в дальнейшем h_n - конечные, действительные числа, потенциалы $v_n(x)$ удовлетворяют условию

$$\|v_n\|_{X_1} \stackrel{def.}{=\!=} \int_0^\infty (1+x)\,|v_n(x)|\,dx < \infty . \qquad /0.3/$$

Спектральная теория Λ-операторов для случая, когда $h_n = \infty$, т.е. имеем граничные условия $y_n(0) = 0$, изложена[2,3]. Интерес к этой проблематике обусловлен, главным образом, их применением в теории солитонов /см., например,[4] /, а также к обратным задачам спектрального анализа[5,6,7].

1. ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

Обозначим через $\psi_n(x,k)$, $f_n(x,k)$ решения уравнений /0.1/, для которых

$$\psi_n(0,k) = 1, \ \psi_n'(0,k) = h_n, \quad \lim_{x\to\infty} f_n(x,k)\exp(-ikx) = 1, \qquad /1.1/$$

и пусть

$$e_n(k) = f_n'(0,k) - h_n f_n(0,k) = W(\psi_n, f_n) \equiv \psi_n f_n' - \psi_n' f_n \qquad /1.2/$$

- характеристическая функция задачи /0.1/, /0.2/.

Хорошо известно /см., например,/7/ /, что при любом $x \geq 0$, $\psi_n(x,k)$, $\psi'_n(x,k)$ есть целые, четные функции от k, а $f_n(x,k)$, $f'_n(x,k)$ и $e_n(k)$ - регулярные при $\operatorname{Im} k > 0$, непрерывные вплоть до вещественной оси функций. С некоторой постоянной C /не зависящей от x и k/ справедливы оценки

$$|f_n(x,k)| \leq C\exp(-\tau x), \quad |f'_n(x,k)| \leq C(1+|k|)\exp(-\tau x),$$

$$|\psi_n(x,k)| \leq C(1+x)\exp(|\tau|x), \quad |\psi'_n(x,k)| \leq C(1+|k|)\exp(|\tau|x),$$

$$|k\psi_n(x,k)| \leq C(1+|k|)\exp(|\tau|x), \qquad k = \kappa + i\tau,$$

и равномерно по $0 \leq x < \infty$ при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geq 0$, асимптотики

$$\psi(x,k) = \cos kx + \frac{1}{k}A(x,k) + O\left(\frac{1}{k^2}e^{\tau x}\right),$$

$$f(x,k) = e^{ikt} + \frac{1}{k}B(x,k) + O\left(\frac{1}{k^2}e^{-\tau x}\right), \qquad /1.4/$$

где

$$A(x,k) = h\sin kx + \int_0^x \sin k(x-t)\cos kt\, v(t)\,dt,$$

$$B(x,k) = \int_x^\infty \sin k(t-x)\, e^{ikt}\, v(t)\,dt,$$

допускающие дифференцирование по x. Отсюда, в частности, имеем

$$e(k) = ik(1 + O(k^{-1})). \qquad /1.5/$$

Функция $e_n(k)$ имеет при $\operatorname{Im} k > 0$ конечное число простых нулей, множество которых обозначим через

$$\sigma_n = \{k_{n,j} = i\tau_{n,j},\ \tau_{n,j} > 0 \mid e_n(k_{n,j}) = 0\}_{j=1}^{N_j}.$$

Тогда

$$\psi_n(x,k_{n,j}) = f_n^{-1}(0,k_{n,j})\, f_n(x,k_{n,j}), \qquad /1.6/$$

$$\dot\psi_n(x,k_{n,j}) = (2ik_{n,j})^{-1}\exp(-ik_{n,j}x)(1+o(1)), \quad x \to \infty. \qquad /1.7/$$

При вещественных $k \neq 0$, $e_n(k) \neq 0$, $e_n(-k) = \overline{e_n(k)}$ и

$$\psi_n(x,k) = \frac{1}{2ik}\{f_n(x,k)e_n(-k) - f_n(x,-k)e_n(k)\}. \qquad /1.8/$$

При $k = 0$ возможен случай виртуального уровня $e_n(0) = 0$. Тогда существует

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1}e_n(k) = \dot e(0) \neq 0 \qquad (\dot{e} = \partial/\partial k) \qquad /1.9/$$

и

$$f_n(x,0) = f_n(0,0)\,\psi_n(x,0), \quad f_n(0,0) = i\dot e^{-1}(0). \qquad /1.10/$$

Введем пространство $\mathfrak{H} = L_2(0,\infty) \oplus \boldsymbol{R} \ni \hat f = (f(x),\alpha)$ со скалярным произведением

$$(\hat f_1, \hat f_2)_1 = (f_1,f_2) + \alpha_1\alpha_2, \quad (f_1,f_2) = \int_0^\infty f_1(x)f_2(x)\,dx. \qquad /1.11/$$

Этим обозначением будем пользоваться и в случае, когда $f_1(x) \in X_1$, т.е. f_1 удовлетворяет условию /0.3/, $f_2(x) \in L_\infty(0,\infty)$. Соответствующие пространства обозначаем через $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_\infty$. Далее пусть, как обычно, $C^{(k)}(0,\infty)$ - пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, а $\mathring{C}^{(k)}(0,\infty)$ - пространство функций $f(x) \in C^{(k)}$, для которых $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(\ell)}(x) = 0$, $\ell = 0, 1, \ldots, k$, и пусть

$$\mathfrak{H}^{(k)} = C^{(k)}(0,\infty) \oplus \boldsymbol{R}, \quad \mathring{\mathfrak{H}}^{(k)}_k = C_0^{(k)}(0,\infty) \oplus \boldsymbol{R}.$$

Пусть

$$\hat\Psi'(k) = \begin{pmatrix} \Psi'(x,k) \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \hat F(k) = \begin{pmatrix} F(x,k) \\ F(0,k) \end{pmatrix}, \qquad /1.12/$$

где $\Psi(x,k) = \psi_1(x,k)\,\psi_2(x,k)$, $F(x,k) = f_1(x,k)\,f_2(x,k)$.

Построим в $\mathfrak{H}_\infty$ систему

$$\{\hat\Psi'\} = \{\hat\Psi'(k),\ k \in (0,\infty);\ \hat\Psi'_{n,j} = \hat\Psi'(k_{n,j}),\ k_{n,j} \in \sigma'';$$
$$\hat\Psi'_{j,1} = \hat\Psi'(k_j),\ \hat\Psi'_{j,2} = \dot{\hat\Psi}'(k_j),\ k_j \in \sigma'\}, \qquad /1.13/$$

где $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma' = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma'' = \sigma \setminus \sigma'$. Далее введем систему $\{\hat{\tilde F}\}$ следующим образом: при $k \in (0,\infty)$ положим

$$\hat{\tilde F}(k) = \frac{4}{\pi}k\operatorname{Im}\{\hat F(k)/E(k)\}, \quad \tilde F(x,k) = \frac{4}{\pi}k\operatorname{Im}\left\{\frac{F(x,k)}{E(k)}\right\}, \qquad /1.14/$$

где $E(k)=e_1(k)e_2(k)$; при $k_{n,j}\in\sigma''$ положим

$$\hat{\tilde F}_{n,j}=-a_{n,j}\hat F(k_{n,j}),\qquad a_{n,j}=4k_{n,j}\dot E^{-1}(k_{n,j}),\qquad /1.15/$$

и каждому $k_j\in\sigma'$ отнесем пару функций

$$\hat{\tilde F}_{j,1}=-b_j(\hat F(k_j)+d_j\dot{\hat F}(k_j)),\qquad \hat{\tilde F}_{j,2}=-b_j\hat F(k_j),\qquad /1.16/$$

где $b_j=8k_j\ddot E^{-1}(k_j)$, $d_j=k_j^{-1}-\dddot E(k_j)(3\ddot E(k_j))^{-1}$.

В случае $e_1(0)=e_2(0)=0$ к этой системе добавим

$$\hat{\tilde F}_0=-a_0\hat F(0),\qquad a_0=2\lim_{k\to 0}k^2E^{-1}(k).\qquad /1.17/$$

Теорема 1.1. Для любой функции $\hat f=(f(x),\alpha)\in\Pi_1$ справедливы формулы разложения

$$\hat f=\int_0^\infty\hat\Psi'(k)(\hat f,\hat{\tilde F}(k))_1\,dk+\hat\Psi'(0)(\hat f,\hat{\tilde F}_0)_1+\Sigma''\hat\Psi'_{n,j}(\hat f,\hat{\tilde F}_{n,j})_1+\Sigma'\sum_{\ell=1,2}\hat\Psi'_{j,\ell}(\hat f,\hat{\tilde F}_{j,\ell})_1,\qquad /1.18/$$

и

$$\hat f=\int_0^\infty\hat{\tilde F}(k)(\hat f,\hat\Psi'(k))_1\,dk+\hat{\tilde F}_0(\hat f,\hat\Psi'(0))_1+\Sigma''\hat{\tilde F}_{n,j}(\hat f,\hat\Psi'_{n,j})_1+\Sigma'\sum_{\ell=1,2}\hat{\tilde F}_{j,\ell}(\hat f,\hat\Psi'_{j,\ell})_1,\qquad /1.19/$$

где суммирование в Σ'' ведется по всем $k_{n,j}\in\sigma''$, в Σ' - по всем $k_j\in\sigma'$. Здесь в коэффициентах разложения $(\hat f,\hat{\tilde F}(k))_1$, $(\hat f,\hat\Psi'(k))_1$ и т.д. соответствующие интегралы сходятся абсолютно. Если обозначить

$$f^*_R(x)=\int_0^R\Psi'(x,k)(\hat f,\hat{\tilde F}(k))_1\,dk+\dots,\quad f_R(x)=\int_0^R\tilde F(x,k)(\hat f,\hat\Psi'(k))_1\,dk+\dots,$$

то равномерно по $0<\delta\le x\le N<\infty$

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{\delta\le x\le N}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{2R}\left\{\int_0^\infty f(y)\sin ky\,dy\right\}\sin kx\,dk-f^*_R(x)(f_R(x))\right|=0.\qquad /1.20/$$

Тогда формула /1.18/ эквивалентна равенству /1.20/ с $f^*_R(x)$ и равенству

$$2\alpha=\int_0^\infty(\hat f,\hat{\tilde F}(k))_1\,dk+(\hat f,\hat{\tilde F}_0)+\Sigma''(\hat f,\hat{\tilde F}_{n,j})_1+\Sigma'(\hat f,\hat{\tilde F}_{j,1})_1,\qquad /1.21/$$

а формула /1.19/ эквивалентна равенству /1.20/ с $f_R(x)$ и равенству

$$\alpha=\int_0^\infty\tilde F(0,k)(\hat f,\hat\Psi'(k))_1\,dk+\tilde F_0(0)(\hat f,\hat\Psi'(0))_1+\Sigma''\tilde F_{n,j}(0)(\hat f,\hat\Psi'_{n,j})_1+\Sigma'\sum_{\ell=1,2}\tilde F_{j,\ell}(0)(\hat f,\hat\Psi'_{j,\ell})_1.\qquad /1.22/$$

В частности, разложения /1.18/, /1.19/ имеют место для любой абсолютно непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию /0.3/.

Замечание 1. В работе [1] было показано, что при любом $x\ge 0$ для всякой функции $f(x)\in X_1$ справедливо разложение

$$-\int_x^\infty f(y)\,dy=\int_0^\infty\tilde F(x,k)(f,\tilde\Psi(k))\,dk-\tilde F_0(x)(f,\tilde\Psi(0))-\Sigma'\tilde F_{n,j}(f,\tilde\Psi_{n,j})-\Sigma'\{\tilde F_{j,1}(x)(f,\tilde\Psi(k_j))+\tilde F_{j,2}(x)(f,\dot\Psi(k_j))\},\qquad /1.23/$$

где $\tilde\Psi(x,k)=\Psi(x,k)-\frac{1}{2}$, при этом

$$\int_0^\infty\tilde F(x,k)\,dk+\tilde F_0(x)+\Sigma''\tilde F_{n,j}(x)+\Sigma'\tilde F_{j,1}(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ 2, & x=0.\end{cases}\qquad /1.24/$$

Пусть $f(x)=-\int_x^\infty f'(s)\,ds$, $f'(x)\in X_1$, тогда имеем тождество

$$(\hat f,\hat\Psi'(k))_1=\frac{1}{2}(\alpha-f(0))-(f',\tilde\Psi(k)),\quad k\in(0,\infty)\cup\sigma.\qquad /1.25/$$

Отсюда, заменяя $f(x)$ на $f'(x)$ в /1.23/ и учитывая /1.24/, получаем формулу /1.19/ для $\hat f \in \mathfrak{N}_1$, где $f'(x) \in X_1$. Доказательство теоремы 1.1 предпошлем следующей теоремой.

Теорема 1.2. Для $\hat f = (f(x), \alpha) \in \mathfrak{N}_1$ справедлива формула разложения

$$\int_0^x f(y)\,dy + 2\alpha = \int_0^\infty \Psi(x,k)(\hat f, \hat{\tilde F}(k))_2\,dk + \Psi(x,0)(\hat f, \hat{\tilde F}_0)_1 + \quad /1.26/$$

$$+ \Sigma''\Psi_{n,j}(x)(\hat f,\hat{\tilde F}_{n,j})_1 + \Sigma'\{\Psi(x,k_j)(\hat f,\hat{\tilde F}_{j,1})_1 + \Psi(x,k_j)(\hat f,\hat{\tilde F}_{j,2})_1\},$$

где сходимость равномерна по x в любом конечном интервале $0 \le x \le N$.

Замечание 1. Формула /1.18/ получается из /1.26/ при $x = 0$ и формальным дифференцированием по x при $x > 0$.

Доказательство теоремы 1.2 получим сходными с /1/ построениями. Введем функцию

$$G^*(x,y,k) = -\frac{4k}{E(k)}\begin{cases}\sum\limits_{n=1,2} U_n(x,k)U_{3-n}(y,k) - F(x,k)\Psi(y,k), & 0<y\le x,\\ \Psi(x,k)F(y,k), & x\le y<\infty,\end{cases} \quad /1.27/$$

где $U_n(x,k) = f_n(x,k)\psi_{3-n}(x,k)$, и рассмотрим контурный интеграл

$$I^*_{R,\epsilon}(\hat f, x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} Q^*(\hat f; x,k)\,dk, \quad /1.28/$$

где

$$Q^*(\hat f;x,k) = \int_0^\infty G^*(x,y,k)f(y)\,dy + \alpha G^*(x,0,k),$$

контур $\gamma_{R,\epsilon}$ продолжается вдоль вещественной оси k от $-R$ до R, обходя точку $k = 0$ в полуплоскости $\mathrm{Im}\,k \ge 0$ по полуокружности $\gamma_\epsilon : k = \epsilon\exp(i(\pi-\phi))$, $0\le\phi\le\pi$, $\epsilon < \min|k_{n,j}|$ и замыкается полуокружностью $\gamma : k = R\exp(i\phi)$, $0\le\phi\le\pi$, $R > \max|k_{n,j}|$. По теореме о вычетах, с учетом равенства /1.6/, получаем

$$I^*_{R,\epsilon}(x) = \Sigma''\Psi_{n,j}(x)(\hat f,\hat{\tilde F}_{n,j})_1 + \Sigma'\{\Psi(x,k_j)(\hat f,\hat{\tilde F}_{j,1})_1 + \Psi(x,k_j)(\hat f,\hat{\tilde F}_{j,2})_1\}.$$

Подсчитаем теперь непосредственно ко контуру $\gamma_{R,\epsilon}$ $\lim I^*_{R,\epsilon}(x)$ при $\epsilon\to 0$ и $R\to\infty$. Из /1.8/ и $f(x,-k) = \overline{f(x,k)}$ имеем при любых $R<\infty$, $\epsilon>0$ равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_\epsilon^R\right\} Q^*(\hat f,x,k)\,dk = -\int_\epsilon^R \Psi(x,k)(\hat f,\hat{\tilde F}(k))_1\,dk. \quad /1.30/$$

Далее, имея в виду /1.9/ и /1.10/, при $e_n(0) = 0$, $n = 1,2$ получаем с учетом оценок /1.3/, что если $f(x)$ удовлетворяет условию /0.3/, то равномерно по $0\le x\le N<\infty$ существует

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\epsilon} Q^*(\hat f;x,k)\,dk = -\Psi(x,0)(\hat f,\hat{\tilde F}_0)_1. \quad /1.31/$$

Из асимптотик /1.4/, /1.5/ имеем при $|k|\to\infty$, $\mathrm{Im}\,k \ge 0$ равномерно по $0\le x<\infty$

$$Q^*(f;x,k) = \frac{2}{k}\Big\{\int_0^x \hat f(y)\,dy + \int_0^\infty f(y)e^{2iky}\,dy + \cos 2kx\int_x^\infty f(y)e^{2iky}\,dy +$$

$$+ ie^{2ikx}\int_0^x f(y)\sin 2ky\,dy\Big\} + \frac{4}{k}\alpha + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big).$$

Отсюда в силу леммы Жордана находим

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} Q^*(\hat f;x,k)\,dk = \int_0^x f(y)\,dy + 2\alpha. \quad /1.32/$$

Искомую формулу /1.26/ получаем, сравнивая равенства /1.29/ с /1.30/, /1.31/, /1.32/. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.1. По функции G^* /1.27/ построим

$$\hat Q^*(\hat f;x,k) = \begin{pmatrix}\int_0^\infty G^*_x(x,y,k)f(y)\,dy + \alpha G^*_x(x,0,k)\\ \frac{1}{2}\int_0^\infty G^*(0,y,k)f(y)\,dy + \frac{1}{2}\alpha G^*(0,0,k)\end{pmatrix} \quad /1.33/$$

и

$$\hat Q(\hat f;x,k) = \begin{pmatrix}\int_0^\infty G_y(x,y,k)f(y)\,dy + \frac{1}{2}\alpha G(x,0,k)\\ \int_0^\infty G_y(0,y,k)f(y)\,dy + \frac{1}{2}\alpha G(0,0,k)\end{pmatrix}, \quad /1.34/$$

где

$$G(x,y,k) = G^*(y,x,k) \qquad 0 \le x,y < \infty. \qquad /1.35/$$

Из асимптотик /1.4/, /1.5/ получаем, что равномерно по $0 \le x,y < \infty$ при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \ge 0$

$$G^*_x(x,y,k) = -4\begin{cases} e^{2ikx}\sin 2ky, & 0 < y < x,\\ \sin 2kx\, e^{2iky}, & x < y < \infty,\end{cases}$$

$$+\{O(\frac{1}{k}H(x,k)) + O(\frac{1}{k^2})\}\theta(x-y) + O(\frac{1}{k}e^{-2\tau|x-y|}),$$

$$G_y(x,y,k) = -4\begin{cases} e^{2ikx}\sin 2ky, & 0 \le y < x,\\ \sin 2kx\, e^{2iky}, & x < y < \infty,\end{cases}$$

$$+\{O(\frac{1}{k}H(y,k)) + O(\frac{1}{k^2})\}\theta(y-x) + O(\frac{1}{k}e^{-2\tau|x-y|}),$$

где

$$H(x,k) = (h_1+h_2)e^{2ikx} + \frac{1}{2}e^{2ikx}\int_0^x s(t)dt + \frac{1}{2}e^{2ikx}\int_0^x s(t)e^{-2ikt}dt -$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2ikx}\int_x^\infty s(t)e^{2ikt}dt - \frac{1}{2}e^{2ikx}\int_x^\infty s(t)dt, \quad s = v_1 + v_2,$$

и

$$G(x,0,k) = 4(k^{-1}e^{2ikx} + O(k^{-2}e^{-2\tau x})).$$

Отсюда, так как

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_R}\{e^{2ikx}\int_0^x f(y)\sin 2ky\,dy + \sin 2kx\int_x^\infty f(y)e^{2iky}dy\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2R}\{\int_0^\infty f(y)\sin 2ky\,dy\}\sin kx\,dk,$$

формулы разложения /1.18/ и /1.19/ выводятся путем подсчета, как в доказательстве теоремы 1.2, контурных интегралов

$$(2\pi i)^{-1}\oint_{\gamma_{R,\epsilon}}\hat{Q}^*(\hat{f};x,k)\,dk \quad \text{и} \quad (2\pi i)^{-1}\oint_{\gamma_{R,\epsilon}}\hat{Q}(\hat{f};x,k)\,dk.$$

Теорема доказана.

2. ОПЕРАТОРЫ $\hat{L}$ И $\hat{L}^*$

Построим по потенциалам $v_n(x)$ и числам h_n, определяющим краевые задачи /0.1/ /0.2/, оператор

$$\hat{L}^* = \begin{pmatrix} L^* & S^*(x)\\ -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} & c^*\end{pmatrix}, \qquad /2.1/$$

где

$$L^* = \frac{1}{4}\{-\frac{d^2}{dx^2} + 2s(x) + s_x(x)\int_0^x dy - \Delta(x)\int_0^x dy\,\Delta(y)\int_0^y dz\}, \qquad /2.2/$$

$$S^*(x) = \frac{1}{2}w(x) - \frac{1}{2}(h_1 - h_2)\Delta(x), \quad c^* = \frac{1}{2}s(0) + h_1h_2, \qquad /2.3/$$

$$w(x) = s_x(x) - \Delta(x)\int_0^x \Delta(y)\,dy, \quad s(x) = v_1 + v_2, \quad \Delta(x) = v_1 - v_2, \qquad /2.4/$$

который действует на любой функции $\hat{f} \in \mathfrak{H}^{(2)}$ по формуле

$$\hat{L}^*\hat{f} = \begin{pmatrix} L^*f(x) + \alpha S^*(x)\\ -\frac{1}{4}f'(0) + \alpha c^*\end{pmatrix}. \qquad /2.5/$$

Теорема 2.1. Функция $\hat{\Psi}'(k)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}^*\hat{\Psi}'(k) = k^2\hat{\Psi}'(k), \qquad /2.6/$$

и

$$\Psi'(0,k) = (h_1 + h_2)\Psi(0,k), \ (\Psi(0,k) = 1). \qquad /2.7/$$

Доказательство. Непосредственно из уравнений /0.1/ следует, что произведение $Y(x,k) = y_1(x,k)y_2(x,k)$ любых двух решений y_n удовлетворяет уравнению

$$-Y''(x,k) + s(x)\,Y(x,k)' + 2y_1'(x,k)\,y_2'(x,k) = 2\lambda Y(x,k),\ \lambda = k^2. \qquad /2.8/$$

В работе[9] было показано, что если ввести оператор

$$L_{x_0} = \frac{1}{4}\{-\frac{d^2}{dx^2} + 2s(x) - \int_{x_0}^{x} s_y(y)\,dy - \int_{x_0}^{x} \Delta(y)\,dy \int_{x_0}^{y} \Delta(z)\,dz\}, \qquad /2.9/.$$

то

$$L_{x_0} Y(x,k) = \lambda Y(x,k) + B(x_0;x,k), \qquad /2.10/$$

где

$$B(x_0;x,k) = -\frac{1}{4}\{W(y_1(x),y_2(x)|_{x=x_0} \int_{x_0}^{x} \Delta(y)\,dy +$$

$$+ (2\lambda - s(x_0))\,Y(x_0,k) + 2y_1'(x_0,k)\,y_2'(x_0,k)\}.$$

Положим в /2.8/ $x = 0$, в /2.10/ $x_0 = 0$, $Y(x,k) = \Psi(x,k)$. Тогда, с учетом начальных условий /1.1/, получаем

$$-\Psi''(0,k) + (s(0) + 2h_1h_2)\,\Psi(0,k) = 2k^2\,\Psi(0,k), \qquad /2.11/$$

$$L_0\Psi(x,k) = k^2(\Psi(x,k) - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}\{(h_2 - h_1)\int_0^x \Delta(y)\,dy - s(0) + 2h_1h_2\}.$$

Дифференцируя по x равенство /2.12/ и полагая затем

$$\Psi(x,k) = 1 + \int_0^x \Psi'(s,k)\,ds,$$

получаем

$$L^*\Psi'(x,k) + \frac{1}{2}S^*(x) = k^2\,\Psi'(x,k), \qquad /2.13/$$

что вместе с /2.11/ дает уравнение /2.6/. Равенство /2.7/ следует сразу из /1.1/. Теорема доказана.

Несколько сложнее устанавливается следующая

Лемма 2.1. При любом k, $\operatorname{Im} k \geq 0$ функция $F(x,k)$ удовлетворяет уравнению

$$LF(x,k) = k^2 F(x,k), \qquad L = L_{x_0=\infty}. \qquad /2.14/$$

При этом

$$(S^*,F(k)) - \frac{1}{2}(h_1 + h_2)\,F'(0,k) + c^*F(0,k) = k^2F(0,k) + E(k). \qquad /2.15/$$

Доказательство. Уравнение /2.14/ следует сразу из уравнения /2.10/ при $x_0 = \infty$, $Y = F(x,k)$, так как в силу /1.1/ $B(x_0=\infty;x,k) = 0$. Далее напомним, что из уравнений /0.1/ вытекают следующие тождества

$$W(y_1(x,k),y_2(x,k)) = W(y_1(0,k),y_2(0,k) - \int_0^x \Delta(s)Y(s,k)\,ds, \qquad /2.16/$$

$$\int_0^x w(s)\,Y(s,k)\,ds = -W(y_1(x,k),y_2(x,k))\int_0^x \Delta(s)\,ds +$$

$$+ \{(2\lambda - s(t))\,Y(t,k) + 2y_1'(t,k)\,y_2'(t,k)\}|_{t=0}^{x}. \qquad /2.17/$$

Положим здесь $y_n = f_n(x,k)$. Тогда при $x \to \infty$ в силу /1.1/ получаем

$$(\Delta,F(k)) = f_1(0,k)\,f_2'(0,k) - f_1'(0,k)\,f_2(0,k),$$

$$(w,F(k)) = F(0,k)(2k^2 - s(0)) + 2f_1'(0,k)\,f_2'(0,k)',$$

что вместе с равенствами /1.2/, т.е.

$$f_n'(0,k) = h_nf_n(0,k) + e_n(k)$$

дает соотношение /2.15/. Лемма доказана.

Введем теперь оператор

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ (\ ,S^*) - \frac{1}{2}(h_1+h_2)\frac{d}{dx}|_{x=0} & c^* \end{pmatrix} \qquad /2.18/$$

$$\hat{L}\hat{f} = \begin{pmatrix} Lf(x) \\ (f,S^*) - \frac{1}{2}(h_1+h_2)\,f'(0) + \alpha c^* \end{pmatrix}, \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha \end{pmatrix}, \qquad /2.19/$$

Тогда из леммы 2.1 получаем, что справедлива

Теорема 2.2. При вещественных k функция $\hat{\tilde{F}}(k)$ /1.14/ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}\hat{\tilde{F}}(k) = k^2\hat{\tilde{F}}(k) \qquad /2.20/$$

и при $k_{n,j} \in \sigma$, $k_j \in \sigma'$ функция $\hat F(k)$ /1.12/ - уравнениям

$$\hat L\hat F(k_{n,j}) = k^2_{n,j}\hat F(k_{n,j}),\quad \hat L\dot{\hat F}(k_j) = k_j^2\dot{\hat F}(k_j) + 2k_j\hat F(k_j). \qquad /2.21/$$

Так как если при $\lim\limits_{x\to\infty} W(f(x),g(x)) = 0$ имеем тождество

$$(Lf,g) = (f,L^*g) + \frac{1}{4}(f'(0)g(0) - f(0)g'(0)), \qquad /2.22/$$

то из /2.5/ и /2.19/ следует

Теорема 2.3. Оператор $\hat L^*$ с областью определения

$$\mathfrak{D}(\hat L^*) = \{\hat f \in \mathring{\mathfrak{N}}^{(2)},\ f(x), L^*f(x) \in X_1, f(0) = 2(h_1+h_2)\alpha\} \qquad /2.23/$$

является сопряженным относительно скалярного произведения /1.11/ оператору $\hat L$ с областью определения

$$\mathfrak{D}(\hat L) = \{\hat f \in \mathring{\mathfrak{N}}^{(2)}, f(x), Lf(x) \in X_1, f(0) = \alpha\}, \qquad /2.24/$$

т.е. для любых $\hat f \in \mathfrak{D}(\hat L)$ и $\hat g \in \mathfrak{D}(\hat L^*)$,

$$(\hat L\hat f, \hat g)_1 = (\hat f, \hat L^*\hat g)_1. \qquad /2.25/$$

Из этой теоремы, с учетом уравнений /2.6/, /2.7/ и /2.20/, /2.21/, получаем

Следствие 1. Для любой $\hat f \in \mathfrak{D}(\hat L)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &k^2(\hat f, \hat\Psi'(k))_1 = (\hat L\hat f, \hat\Psi'(k))_1, && k\in(0,\infty)\cup\sigma,\\ &k_j^2(\hat f,\dot{\hat\Psi}'(k_j))_1 + 2k_j(\hat f,\hat\Psi'(k_j))_1 = (\hat L\hat f, \dot{\hat\Psi}'(k_j)), && k_j\in\sigma' \end{aligned} \qquad /2.26/$$

и для любой $\hat f \in \mathfrak{D}(\hat L^*)$

$$\begin{aligned} &k^2(\hat f, \hat{\tilde F}(k))_1 = (\hat L^*\hat f, \hat{\tilde F}(k))_1, && k\in(0,\infty),\\ &k^2_{n,j}(\hat f,\hat F(k_{n,j}))_1 = (\hat L^*\hat f, \hat F(k_{n,j}))_1, && k_{n,j}\in\sigma,\\ &k_j^2(\hat f, \dot{\hat F}(k_j))_1 + 2k_j(\hat f,\hat F(k_j))_1 = (\hat L^*\hat f, \dot{\hat F}(k_j))_1, && k_j\in\sigma'. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу теоремы 1.1, вытекает

Теорема 2.4. Формулы разложения /1.18/ и /1.19/ являются разложениями единицы для операторов L^* и L соответственно. Точнее, для любой $\hat f\in\mathfrak{D}(\hat L^*)$ справедливо представление

$$\hat L^*\hat f = \int_0^\infty k^2\hat\Psi'(k)(\hat f,\hat{\tilde F}(k))_1\,dk + \Sigma'' k^2_{n,j}\hat\Psi'_{n,j}(\hat f,\hat{\tilde F}_{n,j})_1 + \Sigma'\{k_j^2\hat\Psi'_{j,1}(\hat f,\hat{\tilde F}_{j,1})_1 + (k_j^2\hat\Psi'_{j,2}+2k_j\hat\Psi'_{j,1})(\hat f,\hat{\tilde F}_{j,2})_1\} \qquad /2.28/$$

и для любой $\hat f\in\mathfrak{D}(\hat L)$ - представление

$$\hat L\hat f = \int_0^\infty k^2\hat{\tilde F}(k)(\hat f,\hat\Psi'(k))_1\,dk + \Sigma''k^2_{n,j}\hat{\tilde F}_{n,j}(\hat f,\hat\Psi'_{n,j})_1 + \Sigma'\{(k_j^2\hat{\tilde F}_{j,1}+2k_j\hat{\tilde F}_{j,2})(\hat f,\hat\Psi'_{j,1})_1 + k_j^2\hat{\tilde F}_{j,2}(\hat f,\hat\Psi'_{j,2})_1\}, \qquad /2.29/$$

где сходимость понимается в указанном в теореме 1.1 смысле.

Замечание 1. Положим

$$\hat g = (g(x) = \int_x^\infty f(s)\,ds, g(0)),\quad \hat L\hat g = \hat h = (h(x),\beta),$$

где $\hat g \in \mathfrak{D}(\hat L)$. Тогда из /1.25/ и /2.26/ следует, что если выполняется условие $h(0)=\beta$, т.е.

$$Lg(x)\big|_{x=0} = (S^*,g) - \frac{1}{2}(h_1+h_2)g'(0) + c^*g(0),\quad (g(x) = \int_x^\infty f(s)\,ds), \qquad /2.30/$$

то имеем равенства

$$k^2(f,\tilde\Psi(k)) = k^2(\hat g,\hat\Psi'(k))_1 = -((Lg)',\tilde\Psi(k)). \qquad /2.31/$$

Введем оператор

$$\tilde L = \frac{1}{4}\{-\frac{d^2}{dx^2} + 2s(x) - s_x(x)\int_x^\infty dy - \Delta(x)\int_x^\infty dy\,\Delta(y)\int_y^\infty dz\}. \qquad /2.32/$$

Тогда из /1.23/, так как $\frac{d}{dx}Lg(x) = -\tilde Lf(x)$, имеем

$$\tilde Lf(x) = -\int_0^\infty k^2\tilde F'(x,k)(f,\tilde\Psi(k))\,dk + \Sigma'' k^2_{n,j}\tilde F'_{n,j}(x)(f,\tilde\Psi_{n,j}) - \Sigma'\{(k_j^2\tilde F'_{j,1}(x)+2k_j\tilde F'_{j,2}(x))(f,\tilde\Psi_{j,1}) + k_j^2\tilde F'_{j,2}(x)(f,\tilde\Psi_{j,2})\}, \qquad /2.33/$$

т.е. формула, которая получается из /1.23/ почленным дифференцированием по x [1], является разложением единицы для оператора $\tilde{L}$.

Замечание 2. Приведем пример, в котором естественным образом возникают разложения вида /1.18/, /1.26/. Сопоставим каждой краевой задачи /0.1/, /0.2/ набор величин

$$R(\hat{v}_n) = \{\rho(\hat{v}_n, k) = \frac{2}{\pi}\,\frac{k^2}{|e_n(k)|^2},\ \lambda_j(\hat{v}_n) = k^2_{n,j},\ C_j(\hat{v}_n),\ j=1,2,\dots N_n\},$$

где

$$\hat{v}_n = \begin{pmatrix} v_n(x) \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}_1,\ C_j(\hat{v}_n) = \Big(\int_0^\infty \psi_n^2(x,k_{n,j})\,dx\Big)^{-1} = \frac{2k_{n,j}\, f_n(0,k_{n,j})}{\dot{e}_n(k_{n,j})},$$

определяющих спектральную функцию. С помощью тождества /2.16/ выводятся следующие равенства

$$\begin{gathered}\rho(\hat{v}_1;k) - \rho(\hat{v}_2;k) = -(1/2)(\Delta\hat{v}, \hat{\hat{F}}(k))_1,\quad \Delta\hat{v} = \hat{v}_1 - \hat{v}_2,\\ (-1)^n 2C_j(\hat{v}_n) = (\Delta\hat{v}, \hat{\hat{F}}_{n,j})_1,\quad k_{n,j} \in \sigma'',\\ (\Delta\hat{v}, \hat{F}(k_j)) = 0,\ 2(C_j(\hat{v}_1) - C_j(\hat{v}_2)) = b_j(\Delta\hat{v}, \hat{F}(k_j))_1,\end{gathered} \qquad /2.35/$$

и если $a_0 \neq 0\,(\Delta\hat{v},\ \hat{F}(0))_1 = 0$. Отсюда, в силу теоремы 1.2, получаем сразу, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^x \Delta v(s)\,ds + (h_1 - h_2) &= \int_0^\infty (\rho(\hat{v}_2;k) - \rho(\hat{v}_1;k))\,\Psi(x,k)\,dk + \\ &+ \Sigma''(-1)^n C_j(\hat{v}_n)\,\Psi(x,k_{n,j}) + \Sigma'\{C_j(\hat{v}_2) - C_j(\hat{v}_1)\}\,\Psi(x,k_j).\end{aligned} \qquad /2.36/$$

В частности, если $R(\hat{v}_1) = \hat{R}(\hat{v}_2)$, то $v_1(x) = v_2(x)$, $h_1 = h_2$, что является известной теоремой Марченко о единственности обратной задачи [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Христов Е.Х. - Диф.уравнения, 1980, т.16, № 11, с.2023; препринт ОИЯИ Р5-11754, Дубна, 1978.
2. Христов Е.Х. - Годишник Соф.университета, т.75, кн. 2 - Механика, 1981, с.197.

3. Христов Е.Х. - Годишник Соф.университета, т.75, кн.2. Механика, 1981, 1981, с.215.
4. Калоджеро Ф., Дегаспарис А. Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985.
5. Isaacson F.L., Trubowitz E. - Com.Pure and Appl. Math., 1983, v.36, p.767.
6. Левитан Б.М. - Матем.сборник, 1987, 132, 174, № 1, с.73.
7. Pöschler J., Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. Pure and Appl.Math., 1987, v.130, Academic press, inc.
8. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма - Лиувилля. Киев: Наукова думка, 1972.
9. Calogero F. Generalized Wronskian relations: a novel approach to Bargman-equivalent and physe equivalent potentials. Studies in Math.Phys.Princeton, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1988 года.