объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5-88-771

М.Слодичка

ОЦЕНКА ОШИБКИ ВПОЛНЕ ДИСКРЕТНОГО ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в журнал "Прикладная математика и механика"

1988

1. Введение

В теории линейной термоэластичности возникают задачи, которые описываются системой двух уравнений в частных производных – параболического и гиперболического. В течение последних лет появилось много работ, посвященных этой проблематике (смотри, например, [1]-[10]), в которых определяются свойства приближенного решения, полученного дискретизацией по времени и пространству.

В настоящей работе рассматривается задача приведенного выше типа. Уравнения между собой связаны через правые части, в которых содержатся операторы типа Вольтерра. Определяется вполне дискретное приближенное решение и доказывается его сходимость к точному решению. (Теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от исходных данных и правой стороны доказаны в [8].) Скорость сходимости зависит не только от шагов дискретизации, но и от пространственной гладкости решения.

При доказательствах использован метод Роте (метод прямых) и техника из статьи [11].

2. Определения и предположения

Пусть H, H_1, Y, Y_1 – вещественные гильбертовы пространства с нормами $|\ |$, $|\ |_1$, $\|\ \|$, $\|\ \|_1$, причем множество $H \cap Y$ всюду плотно в

H и Y. Обозначим через S_t промежуток $\langle -q,t\rangle$ для $t \in J = \langle 0,T\rangle$ $(T < \infty,\ q \in \langle 0,\infty))$. В дальнейшем мы будем работать в пространствах типа $C(J,X)$, $L_\infty(J,X)$, $L_2(J,X)$, $H^k(J,X)$, где X — банахово пространство (их определения можно найти в [12]). Символом $\to$ обозначена сильная сходимость и символом $\langle z,w\rangle_H$ $(\langle u,v\rangle_Y)$ — непрерывная билинейная форма между $z \in H_1$, $w \in H$ $(u \in Y_1,\ v \in Y)$.

Если X, Y — банаховы пространства и $\alpha \in (0,1)$, то:

1. $Lip_\alpha(X,Y)$ — множество всех функций $g : X \to Y$, для которых

$$\|g(u)-g(v)\|_Y \le C\ \|u-v\|_X^\alpha \qquad \forall u,v \in X.$$

Для $\alpha = 1$ будем писать $Lip(X,Y) \equiv Lip_1(X,Y)$.

2. $Lip(J\times X,Y)$ —множество всех функций $g : J\times X \to Y$, для которых

$$\|g(t,u)-g(t',v)\|_Y \le C\Big(|t-t'|\ \Big[1 + \|u\|_X + \|v\|_X\Big] + \|u-v\|_X\Big)$$
$$\forall t,t' \in J;\ \forall u,v \in X.$$

Определение 2.1. Оператор $E : L_\infty(S_T,X) \to L_\infty(J,X)$, где X — пространство Банаха, является оператором Вольтерра в X в том и только в том случае, если

$$(u(s)=v(s) \text{ п. в. в } S_t,\ t\in J) \Rightarrow (E(u)(s)=E(v)(s) \text{ п. в. в } \langle 0,t\rangle).$$

Пусть $E : Lip(S_T,H) \to Lip(S_T,H)$ $(F : Lip(S_T,Y) \to Lip(S_T,Y))$ оператор типа Вольтерра в H (Y). Кроме того, предположим, что $G : L_\infty(J,Y) \to L_\infty(J,Y)$ и $I : L_\infty(J,H) \to L_\infty(J,H)$ имеют вид

$$R(z)(t) = \int_0^t K(t,s)z(s)ds, \quad R=G,I;\ K\in L_\infty(J\times J). \tag{2.2}$$

В дальнейшем зафиксируем $f \in Lip(J\times H^3\times Y^2,Y_1)$, $e \in Lip(J\times Y\times H^3\times Y^2,H_1)$, $\mu : J\to Y_1$ и непрерывные билинейные формы $p(t;z,w)$, $a_1(t;u,v)$, $a_2(t;u,v)$, $b(t;u,v)$, $d(t;z,v)$, $g(t;u,v)$, $\rho_1(t;u,w)$, $g_1(u,v)$ для $z,w \in H$; $u,v \in Y$; $t\in J$. Введем обозначение $r^{(k)}(t;x,y) = \partial_t^k r(t;x,y)$.

В настоящей работе описан метод для приближенного решения задачи.

РС. Найти u,v такие, что

(i) $u \in Lip_{1/2}(J,Y) \cap Lip(S_T,H)$, $\partial_t u \in L_2(J,Y) \cap L_\infty(J,H)$

(ii) $v \in Lip(S_T,Y\cap H)$, $\partial_t v \in L_\infty(J,Y\cap H) \cap Lip(S_T,H)$, $\partial_t^2 v \in L_\infty(J,H)$

(iii) выполнено следующее тождество:

$$p(t;\partial_t u(t),\varphi) + a_1(t;u(t),\varphi) = \rho_1(t;\partial_t v(t),\varphi) + g_1(\partial_t v(t),\varphi) +$$
$$+ \langle f(t,E(u)(t),E(v)(t),E(\partial_t v)(t),F(v)(t),G(u)(t)),\varphi\rangle_Y +$$
$$+ \langle e(t,u(t),E(u)(t),E(v)(t),E(\partial_t v)(t),F(v)(t),G(u)(t)),\varphi\rangle_H,$$
$$p(t;\partial_t^2 v(t),\phi) + b(t;\partial_t v(t),\phi) + \tag{2.3}$$
$$+ a_2(t;v(t),\phi) = d(t;(v+I(u+v))(t),\phi) +$$
$$+ g(t;G(v)(t),\phi) - \rho_1(t;\phi,u(t)) - g_1(\phi,u(t)) + \langle \mu(t),\phi\rangle_Y +$$
$$+ \langle e(t,u(t),E(u)(t),E(v)(t),E(\partial_t v)(t),F(v)(t),G(u)(t)),\phi\rangle_H$$
$$\forall \varphi,\phi \in Y\cap H, \text{ для п. в. } t \in J$$

(iv) $u = \alpha$, $v = \beta$, $\partial_t v = \gamma$ в $S_0 = \langle -q,0\rangle$, причем $\alpha \in Lip(S_0,H)$, $\beta \in Lip(S_0,Y\cap H)$ и $\gamma \in Lip(S_0,H)$.

Замечание 2.4. Билинейные формы p, d; функцию e; операторы E, F, G, I в разных местах (2.3) можно считать различными, но они должны подчиняться условиям теоремы 3.22.

Замечание 2.5. Символы C, ε, C_ε будут обозначать не зависящие от τ, h положительные константы, изменяющие свои значения для каждого из равенств и неравенств, но всюду ε — малая и $C_\varepsilon = C(\varepsilon^{-1})$.

Для нашего подхода к приближенному решению задачи РС нужны следующие предположения $(\forall t\in J;\ \omega,\lambda\ge 0$ — будут уточнены в теореме 3.22; $\forall z,w\in H;\ \forall u,v\in Y;\ \forall y\in Y\cap H)$:

$$p(t;z,w) = p(t;w,z) \tag{2.6}$$

$$p(t;z,z) \ge C_1 |z|^2 \tag{2.7}$$

$$|p^{(k)}(t;z,w)| \le C\ |z|\ |w| \qquad k=0,\dots,\lambda \tag{2.8}$$

$$a_1(t;y,y) \ge C_1\ \|y\|^2 - C\ |y|^2 \tag{2.9}$$

$$|a_1^{(k)}(t;u,v)| \le C\ \|u\|\ \|v\| \qquad k=0,\dots,\omega \tag{2.10}$$

$$a_2(t;u,v) = a_2(t;v,u) \tag{2.11}$$

$$a_2(t;y,y) \ge C_1\ \|y\|^2 - C\ |y|^2 \tag{2.12}$$

$$|a_2^{(k)}(t;u,v)| \le C\ \|u\|\ \|v\| \qquad k=0,\dots,\omega \tag{2.13}$$

$$b^{(1)}(t;u,v) = b^{(1)}(t;v,u) \tag{2.14}$$

$$|b^{(k)}(t;u,v)| \le C\ \|u\|\ \|v\| \qquad k=0,\dots,\omega \tag{2.15}$$

$$b(t;y,y) \ge -C\ |y|^2 \tag{2.16}$$

$$\exists \nu\in(0,1) : \nu a_2(t;y,y) + b^{(1)}(t;y,y) \ge -C\ |y|^2 \tag{2.17}$$

$$|g^{(k)}(t;u,v)| \le C\ \|u\|\ \|v\| \qquad k=0,\dots,\omega \tag{2.18}$$

$$|g_1(u,v)| \le C\ \|u\|\ \|v\| \tag{2.19}$$

$$|d^{(k)}(t;z,u)| \le C\ |z|\ \|u\| \qquad k=0,\dots,\omega \tag{2.20}$$

$$|\rho_1^{(k)}(t;u,z)| \le C\ \|u\|\ |z| \qquad k=0,\dots,\omega \tag{2.21}$$

$$|E(x)(t)-E(x)(t')| \le |t-t'|\ \theta(\|x\|_{C(S_t,H)})(1+\|\partial_t x\|_{L_\infty(S_t,H)}) \tag{2.22}$$

$$\forall t,t'\in J;\ t'<t;\ \theta\in C(R_+,R_+);\ \forall x\in Lip(S_T,H)$$

$$\|F(x)(t)-F(x)(t')\| \le |t-t'|\ \theta(\|x\|_{C(S_t,Y)})(1+\|\partial_t x\|_{L_\infty(S_t,Y)}) \tag{2.23}$$

$$\forall t,t'\in J;\ t'<t;\ \theta\in C(R_+,R_+);\ \forall x\in Lip(S_T,Y)$$

$$D^\omega K \in L_\infty(J\times J) \tag{2.24}$$

$$\mu \in H^\omega(J,Y_1). \tag{2.25}$$

Замечание 2.26. Функции θ в (2.22) и (2.23), вообще говоря, могут быть разными.

3. Дискретизация и сходимость метода

Вначале проведем дискретизацию по времени, после чего возникнет система двух эллиптических уравнений, для решения которой используем дискретизацию по пространству. Тем же самым способом

как и в [8], получим подходящие априорные оценки, при помощи которых выведем оценку ошибки приближенного и точного решений в некоторых функциональных пространствах. Чтобы доказать сходимость метода, введем предположения (3.30) и (3.31) для пространственной дискретизации (они выполнены при стандартно употребляемых подходах – конечные элементы, метод Галеркина,...).

Разобьем отрезок J на n равных частей $\langle t_{i-1},t_i\rangle$, $i=1,\dots,n$; $\tau=T/n$; $t_i=i\tau$. Для данной функции $w(t)$ введем следующие обозначения:

$$w_i=w(t_i), \qquad \delta w_i=(w_i-w_{i-1})/\tau, \qquad \delta^2 w_i=\delta(\delta w_i)$$

для $i = 1,\dots,n$. Пусть Y_h – подпространство Y ($h > 0$). Сначала будем рассматривать задачу:

PD. Найти u_i^h, $v_i^h \in Y_h\cap H$ ($i = 1,\dots,n$) такие, что

(i) $u_0^h = \alpha^h(0)$, $v_0^h = \beta^h(0)$, $\delta v_0^h = \gamma^h(0) \in Y_h \cap H$

$$\|\alpha^h(0)\|_{Y\cap H} + \|\beta^h(0)\|_{Y\cap H} + \|\gamma^h(0)\|_{Y\cap H} \le C$$

(ii) имеет место (3.1)

$$p(t_i;\delta u_i^h,\varphi) + a_1(t_i;u_i^h,\varphi) = \langle f_i,\varphi\rangle_Y + \langle e_i,\varphi\rangle_H + \rho_1(t_i;\delta v_i^h,\varphi) + g_1(\delta v_i^h,\varphi),$$

$$\begin{aligned} p(t_i;\delta^2 v_i^h,\phi) + b(t_i;\delta v_i^h,\phi) + a_2(t_i;v_i^h,\phi) &= \\ = d(t_i;v_{i-1}^h+I_i u^h+I_i v^h,\phi) + g(t_i;G_i v^h,\phi) &+ \langle\mu_i,\phi\rangle_Y + \\ + \langle e_i,\phi\rangle_H - \rho_1(t_i;\phi,u_i^h) &- g_1(\phi,u_i^h) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\forall\varphi,\phi \in Y_h\cap H$$

причем

$$f_i = f(t_i,E_i u^h,E_i v^h,E_i \delta v^h,F_i v^h,G_i u^h)$$

$$e_i = e(t_i,u_{i-1}^h,E_i u^h,E_i v^h,E_i \delta v^h,F_i v^h,G_i u^h)$$

$$R_i z^h = R(\tilde z_{i-1}^h)(t_i) \quad \text{для } R = E,F,G,I; \quad z = u,v,\delta v$$

$$\tilde u_{i-1}^h = \tilde u_{i-1,n}^h(t) = \begin{cases} \alpha^h(t) & t\in S_0 \\ \alpha^h(0) & t\in\langle 0,\tau\rangle \\ u_{j-1}^h+(t-t_j)\delta u_j^h & t\in\langle t_j,t_{j+1}\rangle;\ j=1,\dots,i-1 \\ u_{i-1}^h & t\in\langle t_i,T\rangle. \end{cases}$$

Функция $\tilde{v}^h_{i-1}$ $(\tilde{\delta}\tilde{v}^h_{i-1})$ определена аналогично функции $\tilde{u}^h_{i-1}$, но вместо α будет использована функция β (γ).

Для исходных данных предполагаем следующее $(\forall h>0,\ \forall\varphi\in Y_h\cap H)$:

$$\|\partial_t\alpha^h\|_{L_\infty(S_0,H)} + \|\partial_t\beta^h\|_{L_\infty(S_0,H\cap Y)} + \|\partial_t\gamma^h\|_{L_\infty(S_0,H)} \le C \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&|\langle f(0,E(\alpha^h)(0),E(\beta^h)(0),E(\gamma^h)(0),F(\beta^h)(0),0),\varphi\rangle_Y +\\ &+\rho_1(0;\gamma^h(0),\varphi) + g_1(\gamma^h(0),\varphi) - a_1(0;\alpha^h(0),\varphi)| \le C\ |\varphi|\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}&|d(0;\beta^h(0),\varphi) - g_1(\varphi,\alpha^h(0)) + \langle\mu(0),\varphi\rangle_Y -\\ &-\rho_1(0;\varphi,\alpha^h(0)) - b(0;\gamma^h(0),\varphi) - a_2(0;\beta^h(0),\varphi)| \le C\ |\varphi|.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Замечание 3.5. Очевидно, что из (2.7), (3.2)-(3.4) следует выполнение " условия совместимости" (смотри [8, (2.26)]) для $\varphi,\phi\in Y_h\cap H$.

Используя результаты классической теории эллиптических уравнений, нетрудно убедиться в том, что PD разрешима для $i=1,\dots,n$. Тем же самым способом как в [8, леммы 3.17, 3.20] получим $(\forall j=1,\dots,n;\ \tau<\tau_0;\ \forall h>0)$

$$|\delta u^h_j| + \|\delta v^h_j\| + |\delta^2 v^h_j| + \sum_{i=1}^{j}\|\delta u^h_i\|^2\tau \le C. \tag{3.6}$$

Используя решения на отдельных временных слоях u^h_i, v^h_i, мы построим дискретные функции Роте u_σ, v_σ $(\sigma=(\tau,h))$, про которые в теореме 3.32 будет доказано, что они стремятся к решению задачи PC при $\sigma\to0$.

$$u_\sigma(t) = \begin{cases}\alpha^h(t) & t\in S_0\\ u^h_{i-1}+(t-t_{i-1})\delta u^h_i & t_{i-1}<t\le t_i;\quad i=1,\dots,n\end{cases}$$

$$v_\sigma(t) = \begin{cases}\beta^h(t) & t\in S_0\\ v^h_{i-1}+(t-t_{i-1})\delta v^h_i & t_{i-1}<t\le t_i;\quad i=1,\dots,n.\end{cases}$$

Введем следующие обозначения :

$$\bar{u}_\sigma(t) = \begin{cases}\alpha^h(t) & t\in S_0\\ u^h_i & t_{i-1}<t\le t_i;\quad i=1,\dots,n,\end{cases}$$

$$\bar{v}_\sigma(t) = \begin{cases}\beta^h(t) & t\in S_0\\ v^h_i & t_{i-1}<t\le t_i;\quad i=1,\dots,n\end{cases}$$

$$v^{(1)}_\sigma(t) = \begin{cases}\gamma^h(t) & t\in S_0\\ \delta v^h_{i-1}+(t-t_{i-1})\delta^2 v^h_i & t_{i-1}<t\le t_i;\quad i=1,\dots,n\end{cases}$$

$$\bar{v}^{(1)}_\sigma(t) = \begin{cases}\gamma^h(t) & t\in S_0\\ \delta v^h_i & t_{i-1}<t\le t_i;\quad i=1,\dots,n\end{cases}$$

$$\tilde{u}_\sigma = \tilde{u}^h_{n-1,n},\qquad \tilde{v}_\sigma = \tilde{v}^h_{n-1,n},\qquad \tilde{\delta}\tilde{v}_\sigma = \tilde{\delta}\tilde{v}^h_{n-1,n}$$

$$R_\tau(w)(t) = R(w)(t_i)\qquad t\in(t_{i-1},t_i\rangle;\quad R=E,F,G,I$$

$$r_\tau(t,\xi) = r(t_i,\xi)\qquad t\in(t_{i-1},t_i\rangle;\quad r=p,a_1,a_2,b,d,g,\rho_1,e,f,\mu.$$

Из априорных оценок (3.6) непосредственно вытекает (для $\sigma<\sigma_0$):

$$|\partial_t v^{(1)}_\sigma(t)| \le C \text{ для п. в. } t\in J;\qquad \|\bar{v}^{(1)}_\sigma(t)\|_{Y\cap H} \le C\quad \forall t\in J \tag{3.7}$$

$$\|v_\sigma(t)\|_{Y\cap H} + \|\bar{v}_\sigma(t)\|_{Y\cap H} \le C\qquad \forall t\in J \tag{3.8}$$

$$|v^{(1)}_\sigma(t)-v^{(1)}_\sigma(t')| \le C\ |t-t'|\qquad \forall t,t'\in J \tag{3.9}$$

$$|v^{(1)}_\sigma(t)-\bar{v}^{(1)}_\sigma(t)| \le C\ \tau\qquad \forall t\in J \tag{3.10}$$

$$\|v_\sigma(t)-v_\sigma(t')\| \le C\ |t-t'|\qquad \forall t,t'\in J \tag{3.11}$$

$$\|v_\sigma(t)-\bar{v}_\sigma(t)\| \le C\ \tau\qquad \forall t\in J \tag{3.12}$$

$$\|v_\sigma - \tilde{v}_\sigma\|_{C(S_T,Y)\cap C(S_T,H)} \le C\ \tau \tag{3.13}$$

$$\|\tilde{\delta}\tilde{v}_\sigma - v^{(1)}_\sigma\|_{C(S_T,H)} \le C\ \tau \tag{3.14}$$

$$|\partial_t u_\sigma(t)| + \|\partial_t u_\sigma\|_{L_2(J,Y)} \le C\qquad \text{для п. в. } t\in J \tag{3.15}$$

$$\|u_\sigma(t)\|_{Y\cap H} + \|\bar{u}_\sigma(t)\|_{Y\cap H} \le C\qquad \forall t\in J \tag{3.16}$$

$$|u_\sigma(t)-u_\sigma(t')| \le C\ |t-t'|\qquad \forall t,t'\in J \tag{3.17}$$

$$\|u_\sigma(t)-u_\sigma(t')\| \le C\ |t-t'|^{1/2}\qquad \forall t,t'\in J \tag{3.18}$$

$$|u_\sigma(t)-\bar{u}_\sigma(t)| + |\tilde{u}_\sigma(t)-\bar{u}_\sigma(t)| \le C\ \tau\qquad \forall t\in J \tag{3.19}$$

$$\|u_\sigma-\bar{u}_\sigma\|_{L_2(J,Y)} + \|\tilde{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L_2(J,Y)} \le C\ \tau. \tag{3.20}$$

При помощи выше приведенных обозначений преобразуем (3.1) к виду

$$\begin{aligned}&p_\tau(t;\partial_t u_\sigma(t),\varphi) + a_{1,\tau}(t;\bar{u}_\sigma(t),\varphi) = \langle f_\tau,\varphi\rangle_Y + \langle e_\tau,\varphi\rangle_H +\\ &+\rho_{1,\tau}(t;\bar{v}^{(1)}_\sigma(t),\varphi) + g_1(\bar{v}^{(1)}_\sigma(t),\varphi),\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$p_\tau(t;\partial_t V_\sigma^{(1)}(t),\phi) + b_\tau(t;\bar V_\sigma^{(1)}(t),\phi) + a_{2,\tau}(t;\bar v_\sigma(t),\phi) =$$
$$= d_\tau(t;\bar v_\sigma(t-\tau)+I_\tau(\tilde u_\sigma+\tilde v_\sigma)(t),\phi) + g_\tau(t;G_\tau(\tilde v_\sigma)(t),\phi) +$$
$$+ \langle \mu_\tau(t),\phi\rangle_Y + \langle e_\tau,\phi\rangle_H - \rho_{1,\tau}(t;\phi,\bar u_\sigma(t)) - g_1(\phi,\bar u_\sigma(t))$$
$$\forall\ \varphi,\phi \in Y_h \cap H;\ \text{для п. в. } t \in J,$$

причем

$$f_\tau = f_\tau(t,E_\tau(\tilde u_\sigma)(t),E_\tau(\tilde v_\sigma)(t),E_\tau(\tilde\delta\tilde u_\sigma)(t),F_\tau(\tilde v_\sigma)(t),G_\tau(\tilde u_\sigma)(t))$$

и e_τ определяется аналогично.

Теперь уже мы можем перейти к оценке ошибки приближенного и точного решений. Для этого мы будем пользоваться подходящим выбором φ, ϕ; неравенствами Юнга и Коши-Буняковского и априорными оценками (3.7)-(3.20).

Теорема 3.22. Пусть $f\in Lip(J\times H^3\times Y^2,Y_1)$, $e\in Lip(J\times Y\times H^3\times Y^2,H_1)$, $E\in Lip(C(S_T,H),C(J,H))$, $F\in Lip(C(S_T,Y),C(J,Y))$ и $\alpha(0),\beta(0),\gamma(0)\in Y\cap H$. Далее предположим, что выполнены следующие условия (2.2), (2.6)-(2.10) для $\omega = \lambda = 1$, (2.11)-(2.25) для $\omega = 2$, (3.2)-(3.4). Тогда имеет место неравенство ($\forall t\in J$; $\forall u^h, v^h\in Y_h\cap H$; $\sigma<\sigma_0$)

$$A(t) \le C\ (\ B + \mathcal{U}(t) + \mathcal{V}(t)\ ), \tag{3.23}$$

где

$$A(t)= \max_{(0,t)} |u_\sigma-u|^2 + \max_{(0,t)} |V_\sigma^{(1)}-\partial_t v|^2 + \max_{(0,t)} \|v_\sigma-v\|^2 + \int_0^t \|u_\sigma-u\|^2 ds$$

$$\mathcal{U}(t) = \int_0^t \Big[\ |u-u^h| + |u-u^h|^2 + \|u-u^h\|^2 + \|u-u^h\|\ \Big]\ ds$$

$$\mathcal{V}(t) = \int_0^t \Big[\ |\partial_t v-v^h| + |\partial_t v-v^h|^2 + \|\partial_t v-v^h\|^2 + \|\partial_t v-v^h\|\ \Big]\ ds$$

$$B = \tau + \max_{S_0} |\alpha^h-\alpha|^2 + \max_{S_0} |\beta^h-\beta|^2 + \max_{S_0} \|\beta^h-\beta\|^2 + \max_{S_0} |\gamma^h-\gamma|^2.$$

Доказательство : Существование и единственность решения задачи PC вытекают из [8, теорема 4.18].

Рассмотрим разность выражений (3.21) и (2.3) для $t = s$ и

подставим $\varphi = u_\sigma-u^h$, $\phi = \bar V_\sigma^{(1)}-v^h$. Проинтегрируем по s на $(0,t)$ ($t\in J$) и, учитывая (3.7)-(3.20), имеем

$$\int_0^t \Big[p(s;\partial_s(u_\sigma-u),u_\sigma-u) + a_1(s;u_\sigma-u,u_\sigma-u)\Big]\ ds \le$$
$$\le \int_0^t \Big[\langle f(s,E(u_\sigma),E(v_\sigma),E(V_\sigma^{(1)}),F(v_\sigma),G(u_\sigma)) -$$
$$- f(s,E(u),E(v),E(\partial_s v),F(v),G(u)),u_\sigma-u\rangle_Y +$$
$$+ \langle e(s,u_\sigma,E(u_\sigma),E(v_\sigma),E(V_\sigma^{(1)}),F(v_\sigma),G(u_\sigma)) - \tag{3.24$_P$}$$
$$- e(s,u,E(u),E(v),E(\partial_s v),F(v),G(u)),u_\sigma-u\rangle_H\Big]\ ds +$$
$$+ \int_0^t \Big[\rho_1(s;\bar V_\sigma^{(1)}-\partial_s v,u_\sigma-u) + g_1(\bar V_\sigma^{(1)}-\partial_s v,u_\sigma-u)\Big]\ ds +$$
$$+ \varepsilon \int_0^t \|u_\sigma-u\|^2 ds + C_\varepsilon\Big[\ B + \mathcal{U}(t) + \mathcal{V}(t) + \int_0^t A(s)ds\ \Big],$$

$$\int_0^t \Big[p(s;\partial_s(V_\sigma^{(1)}-\partial_s v),V_\sigma^{(1)}-\partial_s v\ ) + b(s;\bar V_\sigma^{(1)}-\partial_s v,\bar V_\sigma^{(1)}-\partial_s v) +$$
$$+ a_2(s;v_\sigma-v,\partial_s(v_\sigma-v))\ \Big]\ ds \le$$
$$\le - \int_0^t \Big[\rho_1(s;\bar V_\sigma^{(1)}-\partial_s v,u_\sigma-u) + g_1(\bar V_\sigma^{(1)}-\partial_s v,u_\sigma-u)\Big]\ ds +$$
$$+ \int_0^t \Big[d(s;v_\sigma-v+I(u_\sigma-u)+I(v_\sigma-v),\partial_s(v_\sigma-v)) + g(s;G(v_\sigma-v),\partial_s(v_\sigma-v)) +$$
$$+ \langle e(s,u_\sigma,E(u_\sigma),E(v_\sigma),E(V_\sigma^{(1)}),F(v_\sigma),G(u_\sigma)) - \tag{3.24$_H$}$$
$$- e(s,u,E(u),E(v),E(\partial_s v),F(v),G(u)),V_\sigma^{(1)}-\partial_s v\rangle_H\ \Big]\ ds +$$
$$+ \varepsilon \int_0^t \|u_\sigma-u\|^2 ds + C_\varepsilon\Big[\ B + \mathcal{U}(t) + \mathcal{V}(t) + \int_0^t A(s)ds\ \Big]$$

Применяя интегрирование по частям для билинейных форм p, a_2, d, g; суммируя (3.24)$_P$ и (3.24)$_H$, получаем (ε - достаточно малое, $\forall t\in J$):

$$|u_\sigma(t)-u(t)|^2 + |V_\sigma^{(1)}(t)-\partial_t v(t)|^2 + \|v_\sigma(t)-v(t)\|^2 + \int_0^t \|u_\sigma-u\|^2 ds \le$$

$$\le C\ (\ B + \mathcal{U}(t) + \mathcal{V}(t) + \int_0^t A(s)ds\ ) .$$

Из произвола в выборе $t \in J$ следует

$$A(t) \le C\ (\ B + \mathcal{U}(t) + \mathcal{V}(t) + \int_0^t A(s)ds\ )$$

и лемма Гронуола дает (3.23). □

Замечание 3.25. Если в предположениях теоремы 3.22 условие (2.15) заменить на

(3.26) $\quad |b^{(k)}(t;u,v)| \le C\ |u|\ |v| \qquad k=0,\dots,\omega \qquad \forall u,v\in H,$

то утверждение теоремы сохраняется, но $\mathcal{V}$ будет иметь вид

(3.27) $$\mathcal{V}(t) = \int_0^t \left[\ |\partial_t v-v^h|+|\partial_t v-v^h|^2+\|\partial_t v-v^h\|^2\ \right] ds.$$

Замечание 3.28. Если $g_1 = 0$, то в результате теоремы 3.22 $\mathcal{U}$ можно заменить на

(3.29) $$\mathcal{U}(t) = \int_0^t \left[\ |u-u^h|+|u-u^h|^2+\|u-u^h\|^2\ \right] ds.$$

Хотя оценка (3.23) весьма полезная, но ее недостаточно, чтобы доказать сходимость метода. Для этого мы теперь примем новые предположения о пространственной аппроксимации Y.

(3.30) $\quad \forall z \in Y \cap H \quad \exists z^h \in Y_h \cap H \quad$ такое, что

$$z^h \to z \quad \text{в}\ Y \cap H \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

(3.31) $\exists C > 0 \quad \forall w \in Y \cap H \quad \forall h > 0 \ : \ \|w - w^h\|_{Y\cap H} \le C\ \|w\|_{Y\cap H}$

(w^h аппроксимация w в смысле (3.30)).

Теорема 3.32. Пусть выполнены условия теоремы 3.22 и (3.30), (3.31). Обозначим через α^h, β^h, γ^h аппроксимации α, β, γ в смысле (3.30), для которых

$$\alpha^h \to \alpha \quad \text{в}\ C(S_0,H), \qquad \beta^h \to \beta \quad \text{в}\ C(S_0,Y\cap H),$$
$$\gamma^h \to \gamma \quad \text{в}\ C(S_0,H).$$

Тогда

$$\mathcal{A}(t) = \max_{\langle 0,t\rangle} |u_\sigma-u|^2 + \max_{\langle 0,t\rangle} |V_\sigma^{(1)}-\partial_t v|^2 + \max_{\langle 0,t\rangle} \|v_\sigma-v\|^2 + \max_{\langle 0,t\rangle} \|u_\sigma-u\|^2 \to 0$$

при $\sigma \to 0$.

Доказательство : Пусть u^h, v^h аппроксимации u, $\partial_t v$ в смысле (3.30). Пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла , из (3.23) легко видеть, что

$$A(t) \to 0 \qquad \text{при}\ \sigma \to 0.$$

Из этого факта в силу теоремы Арцела-Асколи и $\partial_t u, \partial_t u_\sigma \in L_2(J, Y\cap H)$ получаем искомое утверждение. □

4. Применения

До сих пор мы считали, что Y, H - вещественные гильбертовы пространства. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 4.1. Условие, отмеченное в начале статьи, о том, что множество $Y\cap H$ всюду плотно в Y и H, достаточно общее. Оно допускает случаи $Y \subset H$, $H \subset Y$, $Y\setminus H \ne \emptyset \ne H\setminus Y$ ($\setminus$ - разность множеств).

В последнем случае можно взять например (Ω - ограниченная область в R^N) $H = L_{2,\rho}(\Omega)$, $H_1 = L_{2,\rho^{-1}}(\Omega)$ (H, H_1 - пространства с подходящим весом; $\rho, \rho^{-1} \in L_1(\Omega)$), $\langle u,v\rangle_H = \int_\Omega uv\ dx$, $Y = W_2^1(\Omega)$, $Y_1 = Y^*$ (Y^* - сопряженное пространство к Y).

Пример 4.2. Покажем, что условия (3.30), (3.31) выполнены в случае метода Галеркина.

Пусть $X = Y \cap H$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормальным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда имеем

$$\forall v \in X: \qquad v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \qquad \|v\|_X = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 .$$

Для $v \in X$ мы предположим, что

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \quad \in X_n = [e_1, \dots, e_n]$$

($[\dots]$ – линейная оболочка).

Используя неравенство Бесселя, легко показать, что (3.30), (3.31) выполнены.

Пример 4.3. Пусть Ω – выпуклая ограниченная область в R^2 с полигональной границей, $H = L_2(\Omega)$, $Y = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Обозначим через $\| \ \|_2$ норму пространства $W_2^2(\Omega)$. Сделаем регулярную триангуляцию Ω и Y аппроксимируем линейными конечными элементами. Условия (3.30), (3.31) следуют из [13, теоремы 3.2.3, 3.1.4]. Известно, что

$$|u - u^h| + h \|u - u^h\| \le C h^2 \|u\|_2 \qquad \forall u \in W_2^2(\Omega)$$
$$|u - u^h| \le C h \|u\| \qquad \forall u \in W_2^1(\Omega) .$$

Если $u, \partial_t v \in L_2(J, W_2^2(\Omega))$; $\alpha, \gamma \in C(S_0, W_2^1(\Omega))$; $\beta \in C(S_0, W_2^2(\Omega))$, то в силу теоремы 3.22 имеем

$$\mathscr{A}(t) \le C(\tau + h).$$

Если выполнены условия замечаний 3.25 и 3.28, то из теоремы 3.22 для $u, \partial_t v \in L_2(J, W_2^2(\Omega))$; $\alpha, \gamma \in C(S_0, W_2^1(\Omega))$; $\beta \in C(S_0, W_2^2(\Omega))$ получим

$$\mathscr{A}(t) \le C(\tau + h^2).$$

Замечание 4.4. Результаты, полученные в этой статье, справедливы и для отдельных параболических и гиперболических уравнений. В случае параболических уравнений, таким же способом

как в данной работе, можно получить лучшие результаты о скорости сходимости (смотри [14]), в гиперболическом случае использованный метод это уже не допускает.

Литература

1. BERMUDEZ, A. & VIAÑO, J.M.: Etude de deux schemas numeriques pour les equations de la thermoelasticite. RAIRO Anal. numerique, 17 (1983), 121-136.
2. DAFERMOS, C.M.: On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 29 (1968), 241-271.
3. DUVAUT, G. & LIONS, J.L.: Inequations en thermoelasticite et magnetohydrodynamique. Arch. Rat. Mech. Anal., 46 (1972), 241-279.
4. CHOU, S.I. & WANG, C.C.: Estimates of error in finite element approximate solutions to problems in linear thermoelasticity. Part 1. Computationaly coupled numerical schemes. Arch. Rat. Mech. Anal., 76 (1981), 263-299.
5. KAČUR, J. & ŽENÍŠEK, A.: Analysis of approximate solutions of coupled dynamical thermoelasticity and related problems. Aplikace matematiky, 31 (1986), 190-223.
6. NICKELL, R.E. & SACKMAN, J.L.: Approximate solutions in linear coupled thermoelasticity. J. Appl. Mech., 35 (1968), 255-266.
7. NICKELL, R.E. & SACKMAN, J.L.: Variational principles for linear coupled thermoelasticity. Q. Appl. Math., 26 (1968), 11-26.
8. SLODIČKA, M.: Application of Rothe's method to evolution integrodifferential systems. (to appear).
9. СЛОДИЧКА, М.: О слабом решении одной системы квазилинейных

интегродифференциальных эволюционных уравнении. ОИЯИ Р5-87-765, Дубна,1987.

10. ŽENÍŠEK, A.: Finite element methods for coupled thermoelasticity and coupled consolidation of clay. RAIRO Anal. numerique, 18 (1984), 183-205.

11. KAČUR, J.: Application of Rothe's method to evolution integrodifferential equations. J. reine angew. Math., 388 (1988), 73-105.

12. KUFNER, A. & JOHN, O. & FUČÍK, S.: Function spaces. Academia, Prague 1977.

13. СЬЯРЛЕ, Ф.: Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир. 1980.

14. SLODIČKA, M.: An investigation of convergence and error estimate of approximate solution for a quasilinear parabolic integrodifferential equation. (to appear).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 октября 1988 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика