объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-663

В.А.Загребнов

ВОЗМУЩЕНИЯ ГИББСОВСКИХ ПОЛУГРУПП

Направлено в журнал "Communications in Mathematical Physics"

1988

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{H}$- сепарабельное гильбертово пространство, а $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ – банахово пространство компактных операторов с конечной $\|\cdot\|_p$-нормой

$$\|A\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty .$$

Здесь $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ - сингулярные числа оператора $A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, т.е. $\lambda_k = \mu_k(|A|)$, где $\mu_k(|A|)$ - k-е /с учетом кратности/ собственное значение оператора, который является абсолютной величиной оператора $A: |A| = \sqrt{AA^*}$. Для банаховых пространств $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, которые являются идеалами в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов, имеют место следующие включения: $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ /Tr - класс или ядерные операторы/ $\subset \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ /операторы Гильберта - Шмидта/ $\subset$ .... $\subset \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ /компактные операторы/ $\subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, см., например, [1] и [2, VI.6].

В квантовой статистической механике естественным образом возникают сильно непрерывные на $R^1_+ \cup \{0\}$ полугруппы $G(t)$ самосопряженных операторов $G: R^1_+ \cup \{0\} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ со значениями в $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ при $t \in R^1_+$. Они связаны с оператором $\exp(-\beta H)$, определяющим матрицу плотности конечной системы. Здесь H - гамильтониан системы, а $\beta^{-1} \in R^1_+$ - её температура. Обычно эти самосопряженные полугруппы называют гиббсовскими [3,4]. Однако в некоторых случаях, например, при аналитическом продолжении по константе взаимодействия [5,6], оператор H не является самосопряженным, а лишь максимальным секториальным оператором: множество его числовых значений $\theta(H) = \{(H\psi, \psi): \psi \in D(H), \|\psi\| = 1\}$ принадлежит сектору $S_\gamma(\Omega) = \{z \in C: |\arg(z-\gamma)| \le \Omega < \pi/2\}$ полуплоскости $C_\gamma = \{\mathrm{Re}\, z > \gamma\}$. При этом по-прежнему $G(t) = \exp(-tH) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ при $t \in R^1_+$. Поэтому в работе [4] было дано следующее, более общее определение гиббсовской полугруппы.

<u>Определение 1.1.</u> Сильно непрерывная на $R^1_+ \cup \{0\}$ полугруппа операторов $G(t)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется гиббсовской, если $G: R^1_+ \to \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$.

<u>Замечание 1.1.</u> В силу непрерывности произведения ($A_n B_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} AB$, если $A_n \xrightarrow{s} A$ /сильная сходимость/ и $B_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} B$, для $1 \le p < \infty$, см [7,8]) и того, что $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ - идеал в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, гиббсовские полугруппы являются $\|\cdot\|_1$ -непрерывными на R^1_+.

Как известно /теорема Хилле - Филлипса[9, X.8]/, каждая сильно непрерывная полугруппа $V(t)$ порождается некоторым замкнутым оператором T /генератор полугруппы/ с плотной областью определения $D(T)$, т.е. $V(t) = V_T(t) = \exp(-tT)$. При этом соответствующие условия на генератор T формулируются на языке свойств его резольвенты $R_\xi(T) = (\xi - T)^{-1}$ и резольвентного множества $P(T) = \{\xi \in \mathbf{C} : R_\xi(T) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})\}$. Поэтому изучение полугрупп и их свойств связано прежде всего с исследованием их генераторов. Причем одним из центральных вопросов теории полугрупп является проблема устойчивости и теория возмущений.

Пусть $G_T(t)$ - гиббсовская полугруппа с генератором T. Цель настоящей работы - построение теории возмущений гиббсовских полугрупп: формулировка условий на возмущения U, при которых полугруппа $G_{T+\lambda U}(t) \equiv G_\lambda(t)$ остается гиббсовской и является $\|\cdot\|_1$ -аналитической по параметрам $\{\lambda, t\}$. Найдены области аналитичности по обоим параметрам.

Раздел 2 посвящен рассмотрению возмущений из класса Хилле - Филлипса[10, XIII]. Впервые такие возмущения рассматривались в работе[3]. В настоящей работе дано полное и более простое доказательство основной теоремы об устойчивости и $\|\cdot\|_1$ - аналитичности $G_\lambda(t)$ по параметру λ, причем область аналитичности в этом случае совпадает со всей плоскостью $\mathbf{C}$. Показано, что класс Хилле - Филлипса $\mathcal{P}_0$ образует операторы U, которые являются T-ограниченными с относительной гранью $b = 0$.

В разделах 3 и 4 рассматриваются возмущения с $b > 0$. Показано, что для $\|\cdot\|_1$ -аналитичности по λ необходимо потребовать, чтобы $b < 1$, класс $\mathcal{P}_1$. Тогда область $\|\cdot\|_1$ -аналитичности гиббсовской полугруппы $G_\lambda(z)$ имеет вид $C_b \times S_{\lambda,b}$, где $C_b = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < (2b)^{-1}\}$, а $S_{\lambda,b}$-сектор, принадлежащий правой полуплоскости $\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$:

$$S_{\lambda,b} = \{z \in \mathbf{C}_+ : |\arg z| < \omega = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-2|\lambda| b}}{|\lambda| b}\}.$$

Для возмущений из класса $\mathcal{P}_0$ область $\|\cdot\|_1$-аналитичности для $G_\lambda(z)$ имеет вид $\mathbf{C} \times \mathbf{C}_+$.

В разделе 5 кратко изложены выводы и замечания о других результатах теории гиббсовских полугрупп.

2. ВОЗМУЩЕНИЯ КЛАССА $\mathcal{P}_0$

Стандартная теория возмущений сильно непрерывных полугрупп была построена Хилле и Филлипсом[10, XIII] для возмущений из класса $\mathcal{P}_0$.

Определение 2.1. Замкнутый оператор U принадлежит классу $\mathcal{P}_0$ возмущений генератора T полугруппы $G_T(t)$, если его область определения $D(U) \supseteq \bigcup_{t>0} G_T(t)\mathcal{H}$ и

$$\int_0^1 dt \, \| U G_T(t) \| < \infty. \qquad /2.1/$$

В настоящем разделе мы покажем, что гиббсовские полугруппы устойчивы относительно возмущений $U \in \mathcal{P}_0$, соответствующий ряд теории возмущений сходится в ядерной топологии и определяет гиббсовскую полугруппу.

Теорема 2.1. *Пусть* $G_T(t)$ - *самосопряженная гиббсовская полугруппа с генератором* $T \geq -a$. *Если оператор* U *является* T-*ограниченным и принадлежит классу* $\mathcal{P}_0$, *тогда ряд*

$$\mathcal{F}_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n S_n(t), \qquad /2.2/$$

где

$$S_0(t) = G_T(t), \quad S_{n\geq 1}(t) = -\int_0^t d\tau \, G_T(t-\tau) U S_{n-1}(\tau), \qquad /2.3/$$

(i) *сходится равномерно по* t *для любого компакта* $K \subset R^1_+$ *и по* λ *внутри произвольного круга* $C \subset \mathbf{C}$ *в ядерной топологии, определяемой нормой* $\|\cdot\|_1$;
(ii) *определяет гиббсовскую полугруппу* $G_\lambda(t)$ *с генератором* $H_\lambda = T + \lambda U$, *которая является* $\|\cdot\|_1$ -*голоморфной по параметру* λ *для любого* $t > 0$.

Доказательство. (i) Из T-ограниченности оператора U и того, что $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ является идеалом в $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, следует, что $UG_T(t) = [UR_\xi(T)] \cdot [(\xi - T) G_T(t)] \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ для $t > 0$ и ξ из резольвентного множества P(T). Вместе с условием /2.1/ это означает, что для $t > 0$ $S_n(t)$ можно представить как n-кратный, $\|\cdot\|_1$ -сходящийся интеграл Бохнера:

$$S_n(t) = \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \ldots \int_0^t d\tau_n \, \chi^t_n(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)(-1)^n G_T(\tau_0) U G_T(\tau_1) \ldots U G_T(\tau_n).$$

Здесь $\chi^t_n(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ -характеристическая функция множества $\{\tau_i > 0, i = 0,1,\ldots,n : \sum_{i=0}^{n} \tau_i = t\}$. Тогда

$$\|S_n(t)\|_1 \leq \int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^t d\tau_n \, \chi^t_n(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n) \| G_T(\tau_0) U G_T(\tau_1) \ldots U G_T(\tau_n) \|_1. \qquad /2.4/$$

Теперь мы можем воспользоваться неравенством Жинибра - Грубера[11]:

$$\| \prod_{i=0}^{n} A_i V(x_i) \|_1 \leq (\prod_{i=0}^{n} \| A_i \|) \operatorname{Tr} [V(\sum_{i=0}^{n} x_i)]. \qquad /2.5/$$

Здесь $V(x)$ - произвольная гиббсовская полугруппа, а операторы $A_i \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, $i = 0,1,\ldots,n$. Для этого введем операторы $A_0 = G_T(\tau_0/2)$ и $A_i = UG_T(\tau_i/2)$ для $i \geq 1$, а также функции $q(t) = \|G_T(t)\| = \exp at$ и $p(t) = \|UG_T(t)\|$. С помощью /2.5/ и оценки /2.4/ получаем

$$\|S_n(t)\|_1 \leq 2^n(q * \overbrace{p * \ldots * p}^{n})(t/2)\,\mathrm{Tr}\,G_T(t/2), \qquad /2.6/$$

где * обозначает операцию свертки. В силу /2.1/ для любого $R > 0$ существует такое достаточно малое $a > 0$, что $\int_0^a dt\|UG_T(t)\| = \gamma_a < 1/2R$. Тогда для $0 < t \leq 2a$ ряд /2.2/ сходится в ядерной топологии равномерно по λ внутри круга $C_R = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < R\}$ и по $t \in K \subset (0, 2a]$, причем

$$\|\mathfrak{F}_\lambda(t)\|_1 \leq \frac{(\exp a\, t/2 - 1)}{a(1 - 2|\lambda|\gamma_a)}\cdot \mathrm{Tr}\,G_T(t/2), \qquad /2.7/$$

и $\mathfrak{F}_\lambda(t)$ удовлетворяет уравнению /формула Дюамеля [9, X.9] /:

$$\mathfrak{F}_\lambda(t) = G_T(t) - \lambda \int_0^t d\tau G_T(t-\tau)\,U\mathfrak{F}_\lambda(\tau). \qquad /2.8/$$

Из /2.8/ с помощью стандартных рассуждений / см., например, [12, IX] или [13, 3.1] / следует, что $\mathfrak{F}_\lambda(t)$ для $0 \leq t \leq 2a$ является сильно непрерывной полугруппой с генератором $H_\lambda = T + \lambda U$. Для $t \geq 2a$ полугруппу $\mathfrak{F}_\lambda(t)$ можно продолжить с помощью соотношения

$$\mathfrak{F}_\lambda(t) = (\mathfrak{F}_\lambda(a))^n\,\mathfrak{F}_\lambda(t - na), \qquad /2.9/$$

если $na < t < (n+1)a$. Из /2.9/ и оценок /2.6/, /2.7/ следует также равномерная $\|\cdot\|_1$-сходимость ряда /2.2/ для t из любого компакта $K \subset R^1_+$ и $\lambda \in C_R$ для любого радиуса R.

(ii) Из $\|\cdot\|_1$-сходимости ряда /2.2/ следует, что полугруппа $\mathfrak{F}_\lambda(t)$ для $t > 0$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ является гиббсовской, т.е. $\mathfrak{F}_\lambda(t) = G_\lambda(t) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, а в силу замечания 1.1 и $\|\cdot\|_1$-непрерывной. Кроме того, по построению /2.2/ гиббсовская полугруппа $G_\lambda(t)$ $\|\cdot\|_1$ -голоморфна по $\lambda \in \mathbf{C}$ $(t > 0)$.□

Следствие 2.1. *Если оператор* U *симметричен, то полугруппа* $G_\lambda(t)$ *является самосопряженной гиббсовской полугруппой для* $t > 0$ *и* $\lambda \in R^1$. *В то же время из доказательства теоремы следует, что утверждения* (i) *и* (ii) *остаются в силе, если условие самосопряженности* $G_T(t)$ *и* $T \geq -a$ *заменить на более общее условие квазиограниченности:* $\|G_T(t)\| \leq M\exp at$.

Следствие 2.2. *Пусть* $\mathfrak{D} \subset \mathbf{C}$, *и для каждого* $\lambda \in \mathfrak{D}$ *оператор* $U(\lambda)$ *из семейства* $\{U(\lambda)\}_{\lambda \in \mathfrak{D}}$ *обладает следующими свойствами:*

а/ $U(\lambda)$ *является* T*-ограниченным и отображение* $\lambda \to U(\lambda)G_T(t)$ $\|\cdot\|$*- аналитично для* $t > 0$;

б/ $\int_0^1 dt \sup_{\lambda \in \mathfrak{D}} \|U(\lambda)G_T(t)\| < \infty$.

Тогда операторнозначная функция $G_{T+U(\lambda)}(t)$, *построенная с помощью итераций уравнения /2.8/, является гиббсовской полугруппой, которая* $\|\cdot\|_1$*-аналитична по* $\lambda \in \mathfrak{D}$ *для* $t > 0$.

Заметим, что условия, определяющие класс возмущений $\mathcal{P}_0$, довольно обременительны. Как показывает следующее утверждение, этот класс не охватывает важнейшие для квантовой статистической механики случаи [14, 15] .

Теорема 2.2. *Пусть* $G_T(t)$*- сильно непрерывная квазиограниченная полугруппа, порождаемая генератором* T. *Если оператор* $U \in \mathcal{P}_0$, *то он является* T*-ограниченным с относительной границей* $b = 0$.

Доказательство. Из замкнутости U и того, что $D(U) \supseteq \bigcup_{t>0} G_T(t)\mathcal{H}$, следует, что $UG_T(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ для $t > 0$ и $\|UG_T(t)\| < \|UG(t-1)\| \times M\exp[a(t-1)]$ для $t > 1$. Поэтому для любого, сколь угодно малого $\epsilon > 0$ найдется такое достаточно большое $\xi > a$, что

$$\left\|\int_0^\infty dt e^{-\xi t}\, UG_T(t)\psi\right\| \leq \epsilon\|\psi\|, \qquad \psi \in \mathcal{H}. \qquad /2.10/$$

С другой стороны, для полугруппы $G_T(t)$ и произвольного ζ из резольвентного множества $P(-T)$ имеем

$$\int_0^\infty dt e^{-\zeta t}\, G_T(t)\psi = (\zeta + T)^{-1}\psi, \qquad \psi \in \mathcal{H}. \qquad /2.11/$$

Поэтому в силу замкнутости U из оценки /2.10/ и соотношения /2.11/ следует, что $(\zeta + T)^{-1}\psi \in D(U)$ для $\psi \in \mathcal{H}$ и $\|U\phi\| \leq \epsilon\xi\|\phi\| + \epsilon\|T\phi\|$ для $\phi \in D(T)$, т.е. $b = 0$.□

Попытка построить теорию возмущений гиббсовских полугрупп для случая $b > 0$ была предпринята в работе [8]. Однако она содержала ошибку в доказательстве $\|\cdot\|_1$-аналитичности полугруппы $G_\lambda(t)$ по параметру λ, а также в оценке области $\|\cdot\|_1$-аналитичности полугруппы при ее продолжении по параметру t в полуплоскость $\mathbf{C}_+$. Ниже, в разделах 3 и 4, эти неточности будут устранены.

3. ВОЗМУЩЕНИЯ КЛАССА $\mathcal{P}_1$

Выше было установлено, что класс гиббсовских полугрупп, устойчивых относительно возмущений из $\mathcal{P}_0$, довольно широк: это все квазиограниченные гиббсовские полугруппы $\mathcal{B}(M,a)$. Расширение класса допустимых возмущений генераторов для гиббсовских полугрупп до $\mathcal{P}_b$ /относительно ограниченные операторы с границей $b > 0$/ ведет к сужению класса устойчивых полугрупп до голоморфных гиббсовских полугрупп $\mathcal{H}(\omega, a)$ с генераторами, резольвенты которых $R_\zeta(T) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ для $\zeta \in P(T)$ и некоторого $p < \infty$. Однако именно этот класс полугрупп возникает в квантовой статистической механике /13-17/, поскольку их генераторами являются, обычно, самосопряженные операторы Гамильтона.

Теорема 3.1. *Самосопряженная гиббсовская полугруппа $G_T(t)$ с генератором $T \geq -a$ допускает продолжение до $\|\cdot\|_1$ -голоморфной в правой полуплоскости $\mathbf{C}_+$ полугруппы $G_T(z) \in \mathcal{H}(\pi/2, a)$.*

Доказательство. С помощью спектрального представления $G_T(t) = \int_{-a}^{\infty} dE_\xi(T)\exp(-t\xi)$ легко убедиться, что $G_T(t>0)\mathcal{H} \subseteq D(T)$. Поэтому оператор $TG_T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ для $t > 0$. Из этого следует, что полугруппа $G_T(t>0)$ сильно дифференцируема, а с учетом замечания 1.1, и $\|\cdot\|_1$-дифференцируема:

$$\|\cdot\|_1 - \partial_t G_T(t) = \|\cdot\|_1 - \lim_{\Delta\to 0}\{\frac{1}{\Delta}[G_T(\frac{t}{2}+\Delta) - G_T(\frac{t}{2})]\}G_T(\frac{t}{2}) =$$

$$= (-T)G_T(t) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}).$$

Точно так же проверяется, что для $t > 0$

$$\|\cdot\|_1 - \partial_t^n G_T(t) = (-T)^n G_T(t) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}), \quad n \geq 1.$$

Тогда, с учетом оценки $\|TG_T(t)\| \leq \max\{a\cdot e^{at};\ t^{-1}\}$, получаем

$$\|\partial_t^n G_T(t)\|_1 \leq \|TG_T(\frac{t}{2n})\|^n \|G_T(\frac{t}{2})\|_1 \leq (2n)^n t^{-n}\|G_T(\frac{t}{2})\|_1.$$

Следовательно, полугруппа $G_T(t)$ может быть продолжена с R^1_+ в круг $C_t = \{z \in \mathbf{C}_+ : |z - t| < t/2e\}$ с помощью $\|\cdot\|_1$-сходящегося степенного ряда

$$G_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-t)^n}{n!}\partial_t^n G_T(t) = \exp(-zT).$$

Объединение кругов $\bigcup_{t>0} C_t$ образует сектор

$$\mathcal{S}_0(\Omega) = \{z \in \mathbf{C}_+ : |\arg z| < \Omega = \arcsin(2e)^{-1}\},$$

в который удается продолжить гиббсовскую полугруппу $G_T(t)$ с R^1_+ при помощи $\|\cdot\|_1$-сходящихся степенных рядов. Для $\|\cdot\|_1$-аналитического продолжения из $\mathcal{S}_0(\Omega)$ в $\mathbf{C}_+$ достаточно заметить, что $G_T(z = t + i\tau) = G_T(t)G_T(i\tau) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ для $z \in \mathbf{C}_+$, причем $\|\cdot\|_1 - \partial_z G_T(z) = (-T)G_T(z) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. □

Определение 3.1. Замкнутый оператор U принадлежит классу $\mathcal{P}_1$ возмущений генератора T сильно непрерывной полугруппы $G_T(t)$, если $D(U) \supset D(T)$ и U является T-ограниченным с относительной границей $b < 1$:

$$\|U\psi\| \leq a\|\psi\| + b\|T\psi\|, \quad \psi \in D(T). \qquad /3.1/$$

Замечание 3.1. Если, кроме того, оператор T самосопряжен и полуограничен снизу, а U симметричен, то по теореме Като - Реллиха /9, X.2/, /12, V, §4/ определена алгебраическая сумма $H = T + U$ с $D(H) = D(T)$, которая является самосопряженным оператором, причем $H \geq -a' = -a - \max((a/1-b);\ a + b|a|)$.

Поэтому H является генератором сильно непрерывной /сильно дифференцируемой для $t > 0$/ самосопряженной полугруппы $V_H(t)$. Используя аргументы теоремы 3.1, её можно продолжить до $\|\cdot\|$-голоморфной в правой полуплоскости $\mathbf{C}_+$ полугруппы $V_H(z)$. Более того, если T - генератор гиббсовской полугруппы, то из замечания 3.1 и из известного принципа мини-макса Вейля /17, §3.5/, /18, XIII. 1/ следует, что спектр оператора H чисто дискретный и его собственные значения $\mu_k(H) \geq (1-b)\mu_k(T) + a$ для достаточно больших номеров $k \geq 1$. Следовательно, полугруппа $V_H(t)$ - гиббсовская: $V_H(t) = G_H(t)$ и к ней применима теорема 3.1, т.е. $G_H(z) \in \mathcal{H}(\pi/2, a')$. Таким образом, нами доказано следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Пусть $G_T(t)$ - самосопряженная квазиограниченная гиббсовская полугруппа, а возмущение $U \in \mathcal{P}_1$ и является симметричным оператором. Тогда $H = T + U$ является генератором квазиограниченной самосопряженной гиббсовской полугруппы $G_H(t)$, которая может быть продолжена до $\|\cdot\|_1$-голоморфной полугруппы $G_H(z) \in \mathcal{H}(\pi/2, a')$.*

Замечание 3.2. Таким образом, самосопряженные гиббсовские полугруппы устойчивы относительно возмущений из класса $\mathcal{P}_1$. Причем условия $D(U) \supset D(T)$ и $b < 1$ можно ослабить, потребовав взамен полуограниченности снизу возмущения $U = U^*$ и самосопряженности в существенном алгебраической суммы $H = T + U$ на $D(T) \cap D(U)$. Эти условия позволяют воспользоваться неравенством Голдена - Томпсона /18, XIII. 17/:

$$\|\exp(-\tilde{H})\|_1 \leq \|\exp(-\frac{T}{2})\exp(-U)\exp(-\frac{T}{2})\|_1.$$

из которого следует, что замыкание $(T+U)^{\sim} = \tilde{H}$ является генератором самосопряженной квазиограниченной гиббсовской полугруппы $G_{\tilde{H}}(t)$.

Однако, как и в разделе 2, наша цель - не только решение проблемы устойчивости самосопряженных гиббсовских полугрупп, но и исследование аналитических свойств полугруппы $G_\lambda(z)$ по параметру $\lambda \in \mathbf{C}$ для возмущений вида $\lambda \cdot U \in \mathcal{P}_1$. Поэтому теперь вместо спектрального представления для построения полугруппы $G_\lambda(z)$ необходимо воспользоваться формулой Данфорда - Тейлора /см., например, /2, VII/ или /12, IX. §1,6/ /:

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d\zeta\, e^{-\zeta \cdot z} R_\zeta(H_\lambda). \qquad /3.2/$$

где $\|\cdot\|$ - сходящийся интеграл Бохнера вычисляется по положительно ориентированному контуру $\Gamma \subset P(H_\lambda)$, который охватывает спектр оператора H_λ. Эта формула позволяет связать свойства полугруппы $G_\lambda(z)$ со свойствами невозмущенной полугруппы $G_T(z)$ через резольвенту $R_\zeta(H_\lambda) = (\zeta - H_\lambda)^{-1}$, $H_\lambda = T + \lambda H$.

Теорема 3.3. *Пусть* $T = T^* \geq -a$. *Тогда для каждого* $\lambda \in C_b = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < (2b)^{-1}\}$ *формула /3.2/ задает полугруппу* $G_\lambda(z)$, *которая является сильно аналитической по* z *внутри сектора*

$$S_{\lambda,b} = \{z \in \mathbf{C}_+ : |\arg z| < \omega = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-2|\lambda| b}}{|\lambda| b}\}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что для $\lambda = 0$ формула /3.2/ приводит к тому же результату, что и теорема 3.1. Действительно, резольвентное множество $P(T) = \{\mathbf{C} \setminus [-a, +\infty)\}$. Поэтому для любого $z \in \mathbf{C}_+$ контур $\Gamma = \Gamma_0$ можно выбрать так, чтобы $\operatorname{Re} z \operatorname{Re} \zeta > \operatorname{Im} z \operatorname{Im} \zeta$ для $\operatorname{Re} \zeta \to +\infty$ /рис. 1/, т.е. /3.2/ является $\|\cdot\|$ - сходящимся интегралом Бохнера. Проверка того, что этот интеграл задает в полуплоскости $\mathbf{C}_+$ сильно голоморфную полугруппу с генератором T, проводится с помощью теоремы Коши и дифференцирования под знаком интеграла /3.2/, см. /9, X.8/ и /12, IX, §1.6/. Пусть теперь возмущение $U \in \mathcal{P}_1$, тогда оператор $H_\lambda = T + \lambda U$ определен /как алгебраическая сумма/ и замкнут на области $D(H_\lambda) = D(T)$, если $|\lambda| b < 1$. Его резольвентное множество $P(H_\lambda)$ определяется из условия $|\lambda|\, \|UR_\zeta(T)\| < 1$, отвечающего сходимости ряда Неймана для резольвенты $R_\zeta(H_\lambda)$:

$$R_\zeta(H_\lambda) = R_\zeta(T) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda U R_\zeta(T))^n. \qquad /3.3/$$

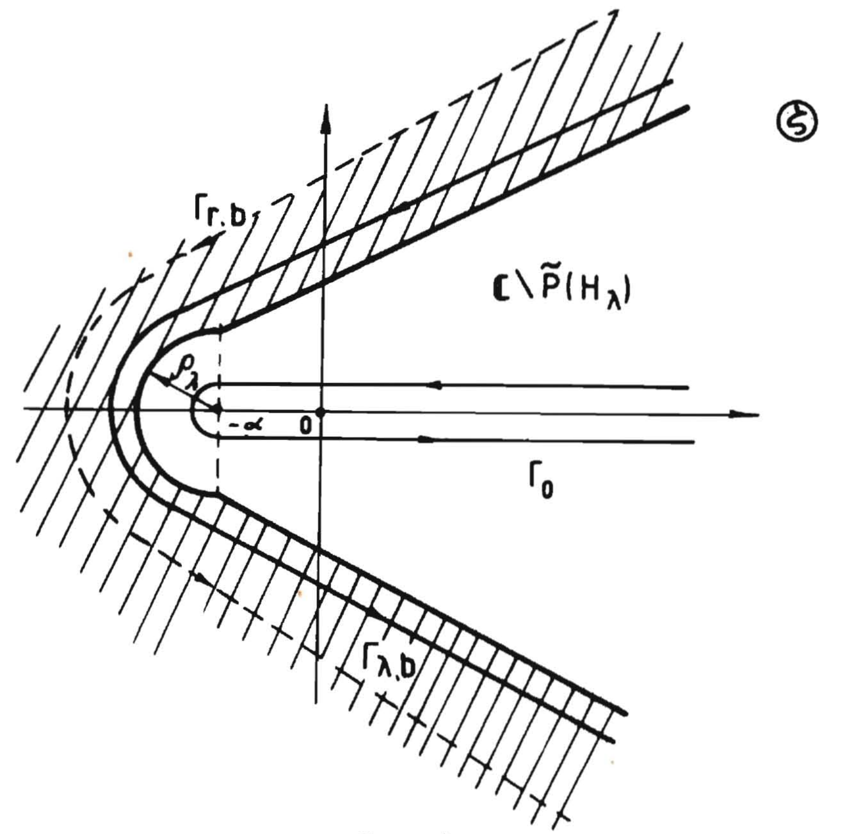

Рис. 1

Тогда с учетом неравенства /3.1/ и того, как устроено множество $P(T)$, получаем

$$\|UR_\zeta(T)\| \leq a \|R_\zeta(T)\| + b \|TR_\zeta(T)\| \leq$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{a}{|\zeta + a|} + b, & \operatorname{Re} \zeta < -a \\[2ex] \dfrac{a}{\operatorname{Im}(\zeta + a)} + b\left[1 + \dfrac{|\zeta + a|}{\operatorname{Im}(\zeta + a)}\right], & \operatorname{Re} \zeta \geq -a. \end{cases} \qquad /3.4/$$

Из неравенства /3.4/ следует, что $P(H_\lambda)$ содержит множество

$$\tilde{P}(H_\lambda) = \begin{cases} |\zeta + a| > \rho_\lambda = \dfrac{a|\lambda|}{1-b|\lambda|}, & \operatorname{Re}\zeta < -a \\ \operatorname{Im}(\zeta + a) > \rho_\lambda + \dfrac{|\lambda| b}{\sqrt{1-2|\lambda| b}} \cdot \operatorname{Re}(\zeta + a), & \operatorname{Re}\zeta \geq -a\,. \end{cases} \qquad /3.5/$$

Поэтому контур Γ для определения $G_\lambda(z)$ с помощью интеграла /3.2/ можно выбрать лежащим в $\tilde{P}(H_\lambda)$, $\Gamma = \Gamma_{\lambda, b}$ /рис. 1/, а условие сходимости интеграла: $\operatorname{Re} z \operatorname{Re}\zeta > \operatorname{Im} z \operatorname{Im}\zeta$ для $\operatorname{Re}\zeta \to +\infty$, определяет сектор $S_{\lambda, b}$, в котором полугруппа $G_\lambda(z)$ является сильно аналитической по z /рис. 2/:

$$S_{\lambda, b} = \{ z \in \mathbb{C}_+ : \left| \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \right| < \frac{\sqrt{1-2|\lambda| b}}{|\lambda| b} \}. \qquad /3.6/$$

Полугрупповое свойство и аналитичность проверяются так же, как в случае $\lambda = 0$. Из /3.5/ и /3.6/ следует, что $G_\lambda(z) \in \mathcal{H}(\omega, a'(\lambda))$, где $a'(\lambda) \geq a + a|\lambda|/(1 - b|\lambda|)$, а угол $\omega = \operatorname{arctg}(\sqrt{1-2|\lambda| b}/|\lambda| b)$, см. рис. 2.□

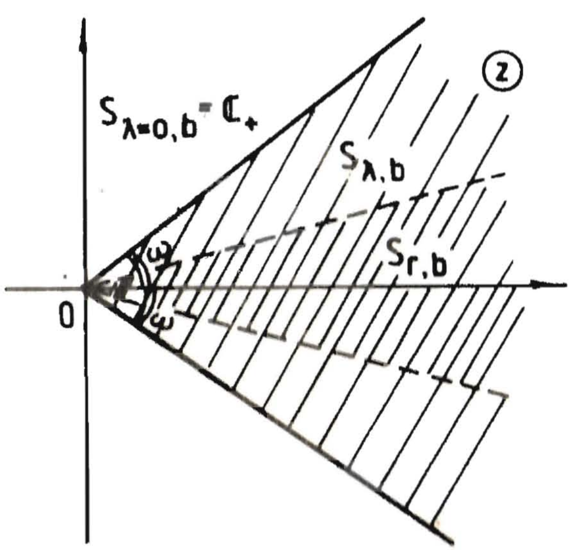

Рис. 2

Замечание 3.3. Если T - генератор гиббсовской полугруппы $G_T(t)$, а $U \in \mathcal{P}_1$, то из этого не следует, что возмущенная полугруппа $G_\lambda(t)$, для $\lambda \in C_b$, также будет гиббсовской. Для этого необходимы либо дополнительные условия на оператор $\lambda \cdot U$ /теорема 3.2 и замечание 3.2/, либо дополнительные условия на генератор T, которые мы рассмотрим в следующем разделе.

4. ГИББСОВСКИЕ ПОЛУГРУППЫ С p-ГЕНЕРАТОРАМИ

Пусть невозмущенная полугруппа $G_T(t)$ является гиббсовской. Для возмущений из класса $\mathcal{P}_0$ это гарантирует, что полугруппа $G_\lambda(t)$ для $\lambda \in \mathbb{C}$ будет гиббсовской, см. раздел 2. Теорема 3.2 гарантирует это и для полугруппы $G_{T+U}(t)$, если возмущение $U \in \mathcal{P}_1$ и является симметричным оператором. Замечание 3.2 разъясняет, какой ценой можно избавиться от условия $U \in \mathcal{P}_1$, при этом симметричность оператора U по-прежнему существенна. Поскольку для возмущения $\lambda \cdot U$ с комплексным параметром λ это свойство не выполняется, то начнем с выяснения условий, обеспечивающих устойчивость гиббсовских полугрупп относительно такого рода возмущений, см. замечание 3.3.

Определение 4.1. Будем говорить, что самосопряженная гиббсовская полугруппа порождается p-генератором T, если для некоторого $\zeta_0 \in P(T)$ резольвента $R_{\zeta_0}(T) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ для конечного $p \geq 1$, ср.[6].

Замечание 4.1. Пусть $T_\sigma(\Lambda^N) = [\sum_{j=1}^{N} (-\Delta/2m)]_\sigma$ - оператор кинетической энергии N частиц, помещенных в конечный сосуд $\Lambda \subset R^d$, а σ фиксирует граничные условия на $\partial\Lambda$, определяющие соответствующее самосопряженное расширение. Тогда легко убедиться, что $R_{\zeta_0}(T_\sigma(\Lambda^N)) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ для $p \geq N{\cdot}d/2$ и произвольного $\zeta_0 \in P(T_\sigma(\Lambda^N))$.

Теорема 4.1. *Если самосопряженный оператор $T \geq -a$ является p-генератором сильно непрерывной группы $G_T(t)$, тогда она является гиббсовской $\|\cdot\|_1$-голоморфной полугруппой в $\mathbb{C}_+$, а возмущенная полугруппа $G_\lambda(z)$ является, для $U \in \mathcal{P}_1$, гиббсовской и $\|\cdot\|_1$-аналитической по z внутри сектора $S_{\lambda, b}$ /3.6/ для любого $\lambda \in C_b = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < (2b)^{-1}\}$.*

Доказательство. Для произвольной точки $\zeta \in P(T)$ имеем $R_\zeta(T) = R_{\zeta_0}(T) + (\zeta_0 - \zeta) R_\zeta(T) R_{\zeta_0}(T)$. Поэтому $R_\zeta(T) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ для любого ζ из резольвентного множества $P(T)$. Следовательно, интеграл /3.2/ по контуру Γ_0 /рис. 1/ является $\|\cdot\|_p$-сходящимся интегралом Бохнера и полугруппа $G_T(t) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ для $t > 0$. Тогда $G_T(t) = [G_T(t/p)]^p \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, а её $\|\cdot\|_1$-голоморфность: $G_T(z) \in \mathcal{H}(\pi/2, a)$ проверяется так же, как в теореме 3.1. Для оценки $\|\cdot\|_p$ -нормы полугруппы $G_\lambda(z)$ воспользуемся разложением /3.3/ и формулой /3.2/ для случая, когда контур $\Gamma = \Gamma_{\lambda, b}$ /рис. 1/:

$$\|G_\lambda(z)\|_p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{\lambda, b}} |d\zeta| e^{-\operatorname{Re}(\zeta \cdot z)} \|R_\zeta(T)\|_p (1 - |\lambda| \, \|U R_\zeta(T)\|)^{-1} \leq$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{\lambda,b}} |d\zeta|\, e^{-(\mathrm{Re}\,\zeta\,\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,\zeta\,\mathrm{Im}\,z)}\, \|R_{\zeta_0}(T)\|_p\, \frac{1+|\zeta_0-\zeta|\,\|R_\zeta(T)\|}{1-|\lambda|\,\|UR_\zeta(T)\|} \qquad /4.1/$$

Тогда в силу теоремы 3.3 правая часть /4.1/ ограничена для $z\in S_{\lambda,n}$ и $|\lambda|<(2b)^{-1}$, см. /3.5/, /3.6/. Следовательно, полугруппа $G_\lambda(z)=[G_\lambda(z/p)]^p\in\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, а её $\|\cdot\|_1$-аналитичность в секторе $S_{\lambda,b}: G_\lambda(z)\in\mathcal{H}(\omega,\alpha'(\lambda))$ проверяется так же, как и в теореме 3.3. □

Обратимся теперь к доказательству $\|\cdot\|_1$-аналитичности полугруппы $G_\lambda(z)$ по параметру $\lambda\in C_b=\{|\lambda|<(2b)^{-1}\}$, когда $z\in S_{\lambda,b}$ /3.6/. В качестве первого шага установим $\|\cdot\|_p$-аналитичность.

<u>Лемма 4.1.</u> *Пусть $U\in\mathcal{P}_1$, а генератор полугруппы $G_T(z)$ является p-генератором. Тогда гиббсовская полугруппа $G_\lambda(z)$ является $\|\cdot\|_p$-аналитической по параметру λ внутри круга C_b /т.е. для произвольной замкнутой области $\mathfrak{D}\subset C_b$/, если $z\in\bigcap_{\lambda\in\mathfrak{D}} S_{\lambda,b}$.*

<u>Доказательство.</u> Фиксируем некоторое $r<(2b)^{-1}$ и $z\in\bigcap_{|\lambda|\le r} S_{\lambda,b}\equiv S_b(r)$ /рис. 2/. Тогда для всех $\lambda:|\lambda|\le r$, можно выбрать общий для семейства полугрупп $\{G_\lambda(z)\}_{|\lambda|\le r}$ контур $\Gamma_{r,b}\subset\subset\bigcap_{|\lambda|\le r}\tilde{P}(H_\lambda)$ /см. /3.5/ и рис. 1/, обеспечивающий $\|\cdot\|_p$-сходимость интеграла /3.2/, который можно оценить с помощью /4.1/. Из разложения /3.3/, неравенства /3.4/ и оценки

$$\|R_\zeta(H_\lambda)-R_\zeta(T)\sum_{n=0}^{N}(\lambda UR_\zeta(T))^n\|_p\le$$

$$\le\|R_\zeta(T)\|_p\|\lambda UR_\zeta(T)\|^{N+1}(1-\|\lambda UR_\zeta(T)\|)^{-1}$$

следует, что для $\zeta\in\Gamma_{r,b}$ ряд /3.3/ сходится равномерно по $\lambda:|\lambda|\le r$, в топологии, задаваемой $\|\cdot\|_p$-нормой. Следовательно, он определяет $\|\cdot\|_p$-аналитическую внутри этого круга резольвенту $R_\zeta(H_\lambda)$. Поэтому для каждого $z\in\mathfrak{D}\subset S_b(r)$ ряд /3.3/ можно почленно интегрировать по контуру $\Gamma_{r,b}$:

$$G_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r,b}}d\zeta\, e^{-\zeta z}\, R_\zeta(T)(UR_\zeta(T))^n. \qquad /4.2/$$

Ряд в правой части /4.2/ сходится в топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|_p$, равномерно внутри круга C_b и определяет $\|\cdot\|_p$-аналитическую по $\lambda\in C_b$ функцию, совпадающую с гиббсовской полугруппой $G_\lambda(z)$. □

<u>Теорема 4.2.</u> *Пусть выполнены условия леммы 4.1. Тогда гиббсовская полугруппа $G_\lambda(z)$ является $\|\cdot\|_1$-аналитической внутри круга C_b по параметру λ для каждого $z\in\bigcap_{\lambda\in\mathfrak{D}} S_{\lambda,b}$.*

<u>Доказательство.</u> Из доказанной в лемме 4.1 $\|\cdot\|_p$-аналитичности полугруппы $G_\lambda(z)$ внутри круга C_b следует, что её можно представить в виде $\|\cdot\|_p$-сходящегося ряда Тейлора:

$$G_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\partial_\lambda^n G_\lambda(z)\big|_{\lambda=0},\quad z\in S_{\lambda,b}. \qquad /4.3/$$

Причем производные по λ можно представить в виде

$$\partial_\lambda^n G_\lambda(z)\big|_{\lambda=0}=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma d\mu\,\mu^{-(n+1)}\,G_\mu(z), \qquad /4.4/$$

где контур γ лежит внутри круга C_b и охватывает точку $\mu=0$. Например, $\gamma=\gamma_r$ – окружность радиуса $r<(2b)^{-1}$. Однако из /4.4/ и того, что $G_\mu(z)\in\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ для $\mu\in C_b$ и $z\in S_{\mu,b}$ /теорема 4.1/ получаем неравенство

$$\|\partial_\lambda^n G_\lambda(z)\big|_{\lambda=0}\|_1\le\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\, r\cdot r^{-(n+1)}\sup_{|\mu|\le r}\|G_\mu(z)\|_1= \qquad /4.5/$$

$$=n!\,r^{-n}M_r(z).$$

Поэтому из оценки

$$\|G_\lambda(z)-\sum_{n=0}^{N}\frac{\lambda^n}{n!}\partial_\lambda^n G_\lambda(z)\big|_{\lambda=0}\|_1\le\sum_{n=N+1}^{\infty}|\lambda|^n r^{-n}M_r(z)$$

вытекает, что для $\lambda\in C_b$ и $z\in S_{\lambda,b}$ всегда найдется контур $\gamma_r\subset\subset C_b$, такой, что ряд /4.3/ сходится /равномерно по $\lambda:|\lambda|\le r$/ в топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|_1$. □

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Суммируя результаты разделов 3 и 4, получаем, что для возмущений гиббсовских полугрупп с p-генераторами отображение

$$G_\lambda(z): C_b \times S_{\lambda,b} \to \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \qquad /5.1/$$

является $\|\cdot\|_1$-аналитическим по обоим параметрам, если ограничиться возмущениями из класса $\mathcal{P}_1$.

Если относительная граница возмущения $b \to 0$, то из /5.1/ получаем результаты раздела 2:

$$G_\lambda(z): C \times C_+ \to \mathcal{C}_1(\mathcal{H}). \qquad /5.2/$$

Хотя в этом пределе от требования того, чтобы генератор невозмущенной гиббсовской полугруппы был $\mathcal{P}$-генератором, можно отказаться.

Для квантовой статистической механики существенным следствием результатов /5.1/ и /5.2/ является свойство аналитичности по параметрам $\{\lambda, \beta\}$, где β - обратная температура, статистической суммы

$$Z_\Lambda(\lambda, \beta) = \mathrm{Tr}\, G_\lambda(\beta);\ \lambda \in C_b,\ \beta \in S_{\lambda,b}, \qquad /5.3/$$

для систем в конечном объеме Λ. Это свойство является прямым следствием $\|\cdot\|_1$-аналитичности отображения $\mathrm{Tr}: \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \to C$ и часто используется в приложениях, например, при выводе неравенств[16,17] и доказательстве теорем, использующих выпуклость по λ и β[19,20].

Изучение гиббсовских полугрупп было начато в работе[21], где были рассмотрены возмущения их генераторов ограниченными операторами $U \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. В работе[6] была сделана попытка распространить теорию возмущений на случай, когда U не является ограниченным оператором. Однако в ней содержался ряд неточностей и, прежде всего, при исследовании аналитических свойств полугруппы $G_\lambda(t)$ по параметру λ, которое было основано на неверном использовании формулы Дюамеля, см. также[20,24]. Поэтому в[3] была построена теория возмущений для более узкого класса неограниченных операторов $\mathcal{P}_0$. В настоящей работе этот класс расширен до $\mathcal{P}_1$, причем показано, что области C_b и $S_{\lambda,b}$ отличаются от тех, которые предсказаны в[6]. Далее, в работе[4] изучались свойства компактности семейств гиббсовских полугрупп, которые существенно используются в квантовой статистической механике, например, при изучении сингулярных потенциалов[14,15]. Наконец, в недавней работе[22] обсуждается формула Троттера для гиббсовских полугрупп. Последняя часто используется в квантовой статистической механике для аппроксимации полугруппы $G_{T+U}(t)$ под знаком Tr, что требует доказательства сходимости в формуле Троттера в топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, том 1: Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
3. Angelescu N., Nenciu G., Bundaru M. - Commun. Math. Phys., 1975, 42, No.1, p.29.
4. Zagrebnov V.A. - Commun.Math.Phys., 1980, 76, No.3, p.269.
5. Загребнов В.А., Бранков Й.Г., Тончев Н.С. - ДАН СССР, 1975, 225, №1, с.71.
6. Maison H.D. - Commun. Math. Phys., 1971, 22, No.2, p.166.
7. Grümm H.R. - Rep. on Math. Phys., 1973, 4, No.3, p.211.
8. Simon B. Trace Ideals and Their Applications. London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 35. Cambridge: Univ. Press, 1979.
9. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, том.2: Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
10. Хилле Е., Филлипс Р.С. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
11. Ginibre J., Gruber C. - Commum. Math. Phys., 1969, 11, No.3, p.198.
12. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
13. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, том 1. М.: Мир, 1982.
14. Zagrebnov V.A. - Ann. of Phys. /NY/, 1976, 102, No.1, p.108.
15. Загребнов В.А. Труды Московского математического общества, том 41, с.101. М.: Изд-во Московского университета, 1979.
16. Боголюбов Н.Н. /мл./ и др. - УМН, 1984, 39, №6, с.3.
17. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971.
18. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, том. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
19. Zagrebnov V.A. - Z. für Phys. B, 1984, 55, No.1, p.75.
20. Thirring W. A Course in Mathematical Physics, vol.4: Quantum Mechanics of Large Systems. New York-Wien: Springer-Verlag, 1980.
21. Uhlenbrock D. - J. Math. Phys., 1971, 12, No.12, p.2503.
22. Zagrebnov V.A. - J. Math. Phys., 1988, 29, No.4, p.888.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 сентября 1988 года.