объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-649

Б.Ф.Костенко

ИНФОРМАЦИОННО-НЕЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ И РЕДУКЦИЯ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

1988

ВВЕДЕНИЕ

В книге "Фейнмановские лекции по физике"[1] описан эксперимент, в котором разрушение интерференционной картины обусловлено источником света, позволяющим определить /регистрируя рассеявшиеся фотоны/, через какое из отверстий в экране прошла частица. Далее Фейнман формулирует правило, согласно которому процесс описывается:

а/ на языке теории вероятностей, если внешнему наблюдателю в принципе доступна информация о текущем состоянии системы;

б/ на языке амплитуд вероятности, если информация недоступна.

Правило Фейнмана может быть получено в рамках следующего механизма "стохастизации фаз". Пусть состояние системы $\psi(x)$ представляет собой суперпозицию пакетов $\psi_i(x)$, каждый из которых отвечает определенному значению a_i некоторой наблюдаемой:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i(x),$$

тогда

$$|\psi(x)|^2 = \sum_i |\psi_i(x)|^2 + \sum_{i,j} \mathrm{int},$$

где int - итерференционные члены, зависящие от разности фаз $\phi_i - \phi_j$ состояний ψ_i и ψ_j. Процесс описывается на языке амплитуд; внешнему наблюдателю информация о числе частиц /это может быть 0 или 1/ пока недоступна.

Пусть далее включается измерительное устройство, передающее в макрообстановку информацию о том, в каком из состояний ψ_i находится сейчас частица. Тогда вследствие соотношения неопределенности фаза - число частиц, фазовые соотношения между отдельными составляющими пакета оказываются утерянными, и наименее искаженное состояние, которое можно себе представить, выглядит так:

$$\psi'(x) = \sum_i \psi_i(x) e^{i\phi_i},$$

где $e^{i\phi_i}$ - случайные, нескоррелированные друг с другом фазовые множители:

$$<\phi_i - \phi_j> = 0,$$

$<...>$ - усреднение по ансамблю наблюдений. В этом случае интерференция отсутствует:

$$<|\psi(x)|^2> = \sum_i |\psi_i(x)|^2.$$

Хорошо известно, что уравнение Шредингера, вследствие его линейности, не описывает разрушения интерференционной картины[2]. Именно это обстоятельство препятствует построению динамической теории квантовых измерений на основе уравнений Шредингера /проблема редукции волнового пакета в квантовой механике/. Однако в свете вышесказанного так и должно быть - уравнение Шредингера относится лишь к изолированным в информационном отношении системам. В следующих разделах мы обсудим некоторое уравнение, которое:

1/ переходит в уравнение Шредингера, если система не взаимодействует с наблюдательным устройством,

2/ осуществляет стохастизацию фаз отдельных составляющих волнового пакета, если информация о состоянии системы поступает в макрообстановку.

В рамках такого подхода проблема редукции волнового пакета может быть решена. В дальнейшем мы будем использовать метод стохастических дифференциальных уравнений, изложенный в[3].

1. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА-СТРАТОНОВИЧА

Будем считать, что в уравнении Шредингера /УШ/

$$\partial_t |\psi_t> = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi_t>,$$

гамильтониан в общем случае зависит не только от времени, но и от набора случайных параметров $\{\xi_a(t)\}$:

$$\hat{H} = \sum_a \mathcal{E}_a(t, \xi(t)) |a><a|,$$

где $\vec{\xi}(t)$ - некоторый случайный процесс. Для простоты примем, что $\vec{\xi}$ - белый шум:

$$<\xi_a(t) \xi_{a'}(t')> = \delta_{aa'} \delta(t-t').$$

С математической точки зрения предпочтительнее перейти к винеровскому случайному процессу $\vec{W}(t)$, для которого $d\vec{W}(t) = \vec{\xi}(t)dt$, $dw_a dw_{a'} = \delta_{aa'} dt$. Тогда в представлении, отвечающем наблюдаемой

$$\hat{a} = \sum_a a|a\rangle\langle a|, \quad [\hat{\mathcal{H}}, \hat{a}] = 0,$$

УШ принимает вид

$$d\psi(a,t) = -\frac{i}{\hbar}\{E_a(t)\,dt + g_a(t)\,dW_a(t)\}\psi(a,t), \qquad /1/$$

где $\psi(a,t) = \langle a|\psi_t\rangle$, $E_a(t)$, $g_a(t)$ - обычные /неслучайные/ функции времени*, E_a - энергия системы, отвечающая значению наблюдаемой a, $\hat{H}(t) = \sum_a E_a(t)|a\rangle\langle a|$ - гамильтониан информационно-изолированной системы, т.е. обычный гамильтониан.

Стохастическое дифференциальное уравнение /СДУ/ /1/ будет пониматься в смысле Стратоновича. С физической точки зрения это означает, что стохастический процесс имеет гладкую природу. СДУ /1/ эквивалентно уравнению Ито:

$$d\psi(a,t) = -\frac{i}{\hbar}\{E_a(t)\,dt + g_a(t)\,dW_a(t)\}\phi(a,t) - \frac{g_a^2}{2\hbar^2}\psi(a,t)\,dt,$$

где последний член демпфирует негладкую часть случайного процесса.

Решение этого уравнения

$$\psi(a,t) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}(\int_0^t E_a(\tau)\,d\tau + \int_0^t g_a(\tau)\,dW_a(\tau))\}\psi(a,0) \qquad /2/$$

имеет очевидную интерпретацию - оператор эволюции, помимо регулярной составляющей

$$U_t = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}(\tau)\,d\tau\}$$

приобрел флуктуацию

$$\tilde{U}_t = \sum_a \exp\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t g_a(\tau)\,dW_a(\tau)\}|a\rangle\langle a|, \qquad /3/$$

хаотизирующую отдельные компоненты $\langle a|\psi_t\rangle$ пакета $|\psi_t\rangle$. Коррелятор, если $g_a(t) \equiv g_a = \text{const}$, имеет вид

$$\langle|a_t\rangle\langle a_s|\rangle = U_t|a_0\rangle\langle a_0|U_s^{-1}\exp\{-\frac{g_a^2}{2\hbar^2}|t-s|\} \qquad /4/$$

и описывает ослабление скоррелированности фаз состояний $|a_t\rangle$ и $|a_s\rangle$ по мере увеличения интервала $|t-s|$ /локализация состояний во времени/; g_a характеризует интенсивность шума, ассоциированного с наблюдением величины a. При расчете корреля-

---

* Что, впрочем, не является обязательным. Далее мы рассмотрим некоторые модели без этого ограничения.

тора мы воспользовались тем, что

$$\Phi_a(t) = \int_0^t g_a(\tau)\,dW_a(\tau)$$

является гауссовским случайным процессом*; тем, что для всякой гауссовской случайной величины z

$$\langle e^z\rangle = e^{\langle z^2\rangle/2} \qquad /5/$$

и тем, что

$$\langle (W(t) - W(s))^2\rangle = |t-s|.$$

2. РЕДУКЦИЯ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА ДЛЯ ИНФОРМАЦИОННО-НЕЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ

Приведенных формул достаточно для более подробной иллюстрации идей, обсуждавшихся во введении. Пусть система описывается СДУ /1/. Тогда вероятность обнаружить частицу в точке x в момент времени t есть

$$\langle|\psi(x,t)|^2\rangle = \langle \mathrm{Sp}(|x\rangle\langle x|\psi_t\rangle\langle\psi_t|)\rangle =$$

$$= \sum_{a,a'} \langle a|x\rangle\langle x|a'\rangle\langle\langle a'|\psi_t\rangle\langle\psi_t|a\rangle\rangle =$$

/вводим обозначения $\Phi_a(x) = \langle x|a\rangle$, $\psi_0(a) = \langle a|\psi_0\rangle$, $P_a = |\psi_0(a)|^2$/

$$= \begin{cases} \sum_a P_a|\Phi_a(x)|^2, & a = a'; \\ \sum_{a,a'} \Phi_a^*(x)\,\Phi_{a'}(x)\,\psi_0^*(a)\,\psi_0(a')\exp\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t (E_{a'} - E_a)(\tau)\,d\tau\}\times \\ \times\exp\{-\frac{1}{2h^2}\int_0^t [g_{a'}^2(\tau) + g_a^2(\tau)]\,d\tau\}, & a \neq a'. \end{cases}$$

---

* Утверждения легко проверить, вычисляя моменты величины $\Phi(t)$. При помощи формул Ито $\langle\int_0^t g_a(\tau)\,dW_a(\tau)\rangle = 0$, /3/, /4/, $\langle[\int_0^t g_a(\tau)\,dW_a(\tau)]^2\rangle = \int_0^t g_a^2(\tau)\,d\tau$ находим

$$\langle\Phi^{2k-1}\rangle = 0, \quad \langle\Phi^{2k}\rangle = (2k-1)!!\,\langle\Phi^2\rangle^k$$

моменты гауссовского распределения.

Поскольку недиагональные члены матрицы плотности $\rho_{\alpha\alpha'}(t)$ быстро затухают, то

$$<|\psi(x,t)|^2> \approx \sum_\alpha P_\alpha |\Phi_\alpha(x)|^2 .$$

Поэтому, с точки зрения средних значений наблюдаемых, рассматриваемое случайное состояние квантовой системы эквивалентно состоянию

$$\hat\rho = \sum_\alpha P_\alpha |\alpha><\alpha| .$$

В последнее время в литературе неоднократно обсуждался вопрос об описании квантовой системы, динамическая эволюция которой прерывается в моменты времени t_1, t_2, ... измерениями наблюдаемых $\hat a_1$, $\hat a_2$, ... /4-6/. В рамках рассматриваемой стохастической динамики нетрудно построить модель, отвечающую рассматриваемому процессу /концепция квантового инструмента/. Пусть наблюдения производятся в интервалах

$$(t_i - \frac{\tau}{2},\ t_i + \frac{\tau}{2})$$

и пусть, для простоты, в течение времени наблюдения имеет место сильное возмущение системы

$$g_\alpha \gg E_\alpha .$$

Тогда

$$|\psi_t> = U(t,t_k)\tilde U_{\hat a_k}(t_k) U(t_k,t_{k-1}) \dots \tilde U_{\hat a_1}(t_1) U(t_1,t_0)|\psi_0>,$$

где

$$U(t,t_k) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_k}^{t}\hat H(\tau)\,d\tau\},$$

$$\tilde U_{\hat a_k}(t_k) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i-\tau/2}^{t_i+\tau/2} g_\alpha(\tau)\,dW_\alpha(\tau)\}\,|\alpha_k><\alpha_k|,$$

k - индекс типа измеряемой величины. Совершенно аналогично предыдущим оценкам получаем, что недиагональные члены оператора плотности при усреднении по ансамблю наблюдений подавлены фактором

$$<\rho_{\alpha\alpha'}(t)> \sim \exp\{-\frac{(g^2_{\alpha_k} + g^2_{\alpha'_k})\tau}{2\hbar^2}\},\quad t_k \le t \le t_{k+1},\quad \tau > 0.$$

Вследствие этого эволюция усредненной по стохастическому ансамблю матрицы плотности фактически может быть описана формулой

$$<\hat\rho_t> = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots} \dots U(t_2,t_1)\hat P_{\hat a_1} U(t_1,t_0)\hat\rho_0 U^{-1}(t_1,t_0)\hat P_{\hat a_1} U^{-1}(t_2,t_1)\dots ;$$

$$\hat P_{\hat a_i} = |\alpha_i><\alpha_i| ,$$

отвечающей неселективному квантовому измерению. Редукция наблюдаемой к некоторому определенному значению α носит теперь чисто информационный характер и имеет ту же природу, что и в обычной теории вероятности /информация об α уже поступила в макрообстановку/.

3. СЛАБОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Мы рассмотрели модель эволюции

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi(\alpha,t)}{\psi(\alpha,t)} = -\dfrac{i}{\hbar}dF_\alpha(t), \\ dF_\alpha(t) = E_\alpha(t)\,dt + g_\alpha(t)\,dW_\alpha(t), \end{cases}$$

в которой энергия системы $E_\alpha(t)$ не флуктуировала, а фаза $F_\alpha(t)$ могла отличаться от своего динамического значения $\int_0^t E_\alpha(\tau)\,d\tau$ на сколь угодно большую величину /при $t\to\infty$/ $\int_0^t g_\alpha(\tau)\times dW_\alpha(\tau)$. Подобное описание возмущения квантовой динамической системы внешним измерительным устройством не представляется ни единственно возможным, ни даже наиболее естественным. В качестве примера рассмотрим другую возможность:

$$dF_\alpha(t) = E_\alpha(F_\alpha(t),t)\,dt + g_\alpha(F_\alpha(t),t)\,dW_\alpha(t). \qquad /6/$$

В этом случае

$$F_\alpha(t) = \int_0^t E_\alpha(F_\alpha(\tau),\tau)\,d\tau + \int_0^t g_\alpha(F_\alpha(\tau),\tau)\,dW_\alpha(\tau) + F_\alpha(0)$$

- интегральное уравнение для $F_\alpha(t)$.

Если шум мал

$$g_\alpha(F_\alpha(t),t) = \epsilon\tilde g_\alpha(F_\alpha(t),t),$$

$$\tilde g_\alpha \sim E_\alpha,\quad \epsilon \lesssim 1,$$

задачу можно решить методами теории возмущений[3]*. Полагая

$$F_\alpha(t) = F_\alpha^{(0)}(t) + F_\alpha^{(1)}(t)\epsilon + F_\alpha^{(2)}(t)\epsilon^2 + \dots,$$

$$E_\alpha(F_\alpha^{(0)} + F_\alpha^{(1)}\epsilon + F_\alpha^{(2)}\epsilon^2 + \dots; t) =$$

$$= E_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t) + \frac{\partial E_\alpha(F_\alpha, t)}{\partial F_\alpha}\Big|_{F_\alpha = F_\alpha^{(0)}} (F_\alpha^{(1)}\epsilon + F_\alpha^{(2)}\epsilon^2 + \dots) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_\alpha(F_\alpha, t)}{\partial F_\alpha^2}\Big|_{F_\alpha = F_\alpha^{(0)}} (F_\alpha^{(1)}\epsilon + F_\alpha^{(2)}\epsilon^2 + \dots)^2 + \dots,$$

$$\tilde{g}_\alpha(F_\alpha^{(0)} + F_\alpha^{(1)}\epsilon + F_\alpha^{(2)}\epsilon^2 + \dots; t) =$$

$$= \tilde{g}_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t) + \frac{\partial \tilde{g}_\alpha(F_\alpha, t)}{\partial F_\alpha}\Big|_{F_\alpha = F_\alpha^{(0)}} (F_\alpha^{(1)}\epsilon + F_\alpha^{(2)}\epsilon^2 + \dots) + \dots,$$

получаем систему СДУ

$$\begin{cases} dF_\alpha^{(0)}(t) = E_\alpha(t)\,dt, \\ dF_\alpha^{(n)}(t) = [-A_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t)\, F_\alpha^{(n)}(t) + C_\alpha^{(n)}(F_\alpha^{(0)}, F_\alpha^{(1)}, \dots, \\ F_\alpha^{(n-1)}, t)]dt + q_\alpha^{(n-1)}(F_\alpha^{(0)}, F_\alpha^{(1)}, \dots, F_\alpha^{(n-1)}, t)\, dW_\alpha(t), \end{cases} \qquad /7/$$

где $E_\alpha(t)$ - собственные значения нефлуктуирующей части гамильтониана /т.е. гамильтониана изолированной системы/ $\hat{H}(t) = \sum_\alpha E_\alpha(t)|\alpha\rangle\langle\alpha|$. В /7/ мы обозначили

$$A_\alpha(F_\alpha^{(0)}(t), t) = -\frac{\partial E_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t)}{\partial F_\alpha^{(0)}},$$

*Далее будет видно, что при решении уравнения /6/ по теории возмущений безразлично, как его трактовать - в смысле Ито или в смысле Стратоновича.

$$\begin{cases} C_\alpha^{(1)}(F_\alpha^{(0)}(t), t) = 0, \\ C_\alpha^{(2)}(F_\alpha^{(0)}(t), F_\alpha^{(1)}(t), t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t)}{\partial F_\alpha^{(0)\,2}} F_\alpha^{(1)}(t), \\ C_\alpha^{(3)}(F_\alpha^{(0)}(t), F_\alpha^{(1)}(t), F_\alpha^{(2)}(t), t) = \frac{\partial^2 E_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t)}{\partial F_\alpha^{(0)\,2}} F_\alpha^{(1)}(t) F_\alpha^{(2)}(t) + \\ + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 E_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t)}{\partial F_\alpha^{(0)\,3}} F_\alpha^{(1)}(t)^3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ q_\alpha^{(0)}(F_\alpha^{(0)}(t), t) = \tilde{g}_\alpha(F_\alpha^{(0)}(t), t), \quad \tilde{g}_\alpha = \frac{g}{\epsilon}, \\ q_\alpha^{(1)}(F_\alpha^{(0)}(t), F_\alpha^{(1)}(t), t) = \frac{\partial \tilde{g}_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t)}{\partial F_\alpha^{(0)}} F_\alpha^{(1)}(t), \\ q_\alpha^{(2)}(F_\alpha^{(0)}(t), F_\alpha^{(1)}(t), F_\alpha^{(2)}(t), t) = \\ = \frac{\partial \tilde{g}_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t)}{\partial F_\alpha^{(0)}} F_\alpha^{(2)}(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{g}_\alpha(F_\alpha^{(0)}, t)}{\partial F_\alpha^{(0)\,2}} F_\alpha^{(1)\,2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad /8/$$

Например, в первом порядке теории возмущений имеем хорошо известное уравнение Орнштейна-Уленбека:

$$dF_\alpha^{(1)}(t) = -A_\alpha(F_\alpha^{(0)}(t), t) F_\alpha^{(1)}(t)\, dt + $$
$$+ B_\alpha(F_\alpha^{(0)}(t), t)\, dW_\alpha(t),$$

где

$$F_\alpha^{(0)}(t) = F_\alpha^{(0)}(0) + \int_0^t E_\alpha(\tau)\, d\tau,$$

$$B_\alpha^{(0)}(F_\alpha^{(0)}, t) = \frac{\partial \tilde{g}(F_\alpha^{(0)}, t)}{\partial F_\alpha^{(0)}}.$$

Вводя интегрирующий множитель $\exp\{\int_0^t d\tau\, A(F^{(0)}(\tau),\tau)\}$ и учитывая, согласно технике Ито, члены вплоть до второго порядка, находим

$$d\mathfrak{F} = d(\exp\int_0^t d\tau A(F^{(0)}(\tau),\tau))\, dF^{(1)} +$$

$$+ d(\exp\int_0^t d\tau A(F^{(0)}(\tau),\tau))\, F^{(1)} + (\exp\int_0^t d\tau A(F^{(0)}(\tau),\tau))\, dF^{(1)}.$$

Поскольку интегрирующий множитель является детерминированной функцией времени, видно, что первый член в правой части имеет порядок $dt\,dF^{(1)} = -A dt^2 + B dt dW(t)$ и, следовательно, должен быть отброшен* . Аналогичная ситуация имеет место и в общем случае, поэтому исходное уравнение /6/ для фазы может трактоваться как в смысле Ито, так и в смысле Стратоновича, когда используется обычная техника дифференцирования.

В результате находим

$$d\mathfrak{F} = \exp\{\int_0^t d\tau A(F^{(0)}(\tau),\tau)\} B(F^{(0)}(t),t)\, dW(t).$$

Интегрируя и возвращаясь к переменной $F^{(1)} = \exp\{-\int_0^t d\tau A\}\mathfrak{F}$, имеем

$$F_\alpha^{(1)}(t) = \exp\{-\int_0^t d\tau A_\alpha(F_\alpha^{(0)}(\tau),\tau)\} F_\alpha^{(1)}(0) +$$

$$+ \int_0^t \exp\{-\int_{t'}^t d\tau A_\alpha(F_\alpha^{(0)}(\tau),\tau)\} B_\alpha(F_\alpha^{(0)}(t'),t')\, dW_\alpha(t'), \qquad /9/$$

. . . .

$$F_\alpha^{(n)}(t) = \exp\{-\int_0^t d\tau A_\alpha(F_\alpha^{(0)}(\tau),\tau)\} F_\alpha^{(n)}(0) +$$

$$+ \int_0^t \exp\{-\int_{t'}^t d\tau A_\alpha(F_\alpha^{(0)}(\tau),\tau)\}(C^{(n)}(t')\,dt' + q^{(n)}(t')\,dW(t')),$$

где $C^{(n)}$, $q^{(n)}$ определяются формулой /8/. Предполагается, что прежде чем решить уравнение для фазы в n-порядке, мы нашли решение всех $n-1$ предыдущих уравнений, так что $C^{(n)}$ и $q^{(n)}$ - известные функции времени.

---

* Так как, согласно технике Ито, учитываются только члены второго порядка типа $dW_\alpha(t)\, dW_\beta(t) = \delta_{\alpha\beta}\, dt$.

Процесс Орнштейна-Уленбека, подобно винеровскому процессу, рассмотренному ранее, приводит к редукции волнового пакета. Полагая для простоты в формуле /9/ $A_\alpha(\tau) = a_\alpha = \mathrm{const}$, $B_\alpha(\tau) = b_\alpha = \mathrm{const}$ и пользуясь /3/-/5/, находим

$$\langle|\psi(x,t)|^2\rangle_{OY} = \langle Sp(\hat P_x \hat\rho_t)\rangle_{OY} =$$

$$\begin{cases} \sum_\alpha P_\alpha |\Phi_\alpha(x)|^2, & \text{если } \alpha = \alpha'; \\ \sum_{\substack{\alpha,\alpha' \\ \alpha\neq\alpha'}} \Phi^*_\alpha(x)\Phi_{\alpha'}(x)\psi_0^*(\alpha)\psi_0(\alpha') & \\ \exp\{-\frac{1}{2\hbar^2}(b_\alpha^2 \frac{1-e^{-2a_\alpha t}}{a_\alpha} + b_{\alpha'}^2 \frac{1-e^{-2a_{\alpha'} t}}{a_{\alpha'}})\}, & \end{cases}$$

откуда видно, что при $t \ge \frac{1}{a_\alpha}, \frac{1}{a_{\alpha'}}$ интерференционные члены подавлены фактором

$$\sim \exp\{-\frac{1}{2\hbar^2}(\frac{b_\alpha^2}{a_\alpha} + \frac{b_{\alpha'}^2}{a_{\alpha'}})\}.$$

Основное отличие открытой системы такого типа от системы, рассмотренной в предыдущем разделе, заключается в том, что теперь энергия системы

$$E_\alpha(F(t),t) = E_\alpha(t) + \epsilon F_\alpha^{(1)}(t),$$

флуктуирует вблизи своего динамического значения /а фаза не отклоняется от него с течением времени как угодно далеко, как это было раньше/. Такое возмущение естественно назвать слабым. Оно имеет место, например, в классическом пределе, когда системе "самой по себе" можно приписать, по крайней мере приближенно, определенное значение энергии. В нашей модели возникает гауссовское распределение с дисперсией

$$\sigma_\alpha = \lim_{t\to\infty} \langle(E_\alpha^{(1)}(t) - \langle E_\alpha^{(1)}(t)\rangle)^2\rangle =$$

$$= \epsilon^2 \lim_{t\to\infty} \langle(F_\alpha^{(1)}(t) - \langle F_\alpha^{(1)}(t)\rangle)^2\rangle =$$

$$= \epsilon^2 \lim_{t\to\infty} ([\mathrm{var}\{F_\alpha^{(1)}(0)\} - \frac{b_\alpha^2}{2a_\alpha}]\, e^{-2a_\alpha t} +$$

$$+\frac{b_\alpha^2}{2a_\alpha}) = \epsilon^2 \frac{b_\alpha^2}{2a_\alpha}.$$

Эта дисперсия отвечает стационарному процессу, который получается из /9/, если в качестве нижнего предела интегрирования взять не 0, а $-\infty$. Кроме того, модель дает различные корреляционные характеристики, например, средние значения случайных добавок к динамическому значению энергии $E_\alpha(t)$, связанные соотношением

$$<E_\alpha^{(1)}(t)> = <E_\alpha^{(1)}(0)> e^{-a_\alpha t}.$$

Аналогично, временная корреляционная функция имеет вид

$$<(F^{(1)}(t) - <F^{(1)}(t)>)(F^{(1)}(s) - <F^{(1)}(s)>)> =$$

$$= [\operatorname{var}\{F^{(1)}(0)\} - \frac{b_\alpha^2}{2a_\alpha}] e^{-a_\alpha(t+s)} + \frac{b_\alpha^2}{2a_\alpha} e^{-a_\alpha|t-s|}.$$

4. ДИФФУЗИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

В предыдущих разделах мы обсуждали стохастические дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию отдельной квантовой системы. Существует, однако, альтернативный рассмотренному метод, когда имеют дело со статистическим ансамблем таких систем, а уравнения движения не содержат случайных величин/3/.

Пусть имеется система СДУ типа Ито для фазы

$$dF_\alpha(t) = E_\alpha(F_\alpha(t), t)\, dt + g_\alpha(F_\alpha(t), t)\, dW_\alpha(t), \qquad /10/$$

и пусть $f(\vec{F}(t))$ - произвольная неупреждающая функция, которая дважды непрерывно-дифференцируема и удовлетворяет условиям на бесконечности

$$\lim_{F_\alpha \to \pm\infty} f(\vec{F}) = 0, \qquad \lim_{F_\alpha \to \pm\infty} \frac{\partial f(\vec{F})}{\partial F_\alpha} = 0.$$

Тогда, пользуясь формулой Ито для дифференциала /см. примечание на странице 10/.

$$df(\vec{F}) = \sum_\alpha [(E_\alpha \frac{\partial f}{\partial F_\alpha} + \frac{1}{2} g_\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial F_\alpha^2})\, dt + g_\alpha \frac{\partial f}{\partial F_\alpha} dW_\alpha(t)],$$

находим

$$\frac{d<f(\vec{F}(t))>}{dt} \equiv \frac{<df(\vec{F}(t))>}{dt} =$$

$$= \sum_\alpha [<E_\alpha(F_\alpha, t) \frac{\partial f(\vec{F})}{\partial F_\alpha}> + \frac{1}{2} <g_\alpha^2(F_\alpha, t) \frac{\partial^2 f(\vec{F})}{\partial F_\alpha^2}>].$$

С другой стороны*

$$<f(\vec{F}(t))> = \int d\vec{F} f(\vec{F}) P(\vec{F}, t | \vec{F}_0, t_0),$$

где $P(\vec{F}, t|\vec{F}_0, t_0)$ - условная вероятность перехода $\vec{F}_0 \to \vec{F}$ за время $t - t_0$,

$$d\vec{F}(t) \equiv \prod_\alpha dF_\alpha(t).$$

Поэтому

$$\int d\vec{F} f(\vec{F}) \partial_t P(\vec{F}, t| \vec{F}_0, t_0) =$$

$$= \int d\vec{F} \sum_\alpha [E_\alpha \frac{\partial f}{\partial F_\alpha} + \frac{1}{2} g_\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial F_\alpha^2}] P(\vec{F}, t| \vec{F}_0, t_0).$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая, что $f(\vec{F})$ - достаточно произвольная функция, находим

$$\partial_t P(\vec{F}, t| \vec{F}_0, t_0) = -\sum_\alpha \partial_{F_\alpha} [E_\alpha(F_\alpha, t) P(\vec{F}, t| \vec{F}_0, t_0)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_\alpha \partial_{F_\alpha}^2 [g_\alpha^2(F_\alpha, t) P(\vec{F}, t| \vec{F}_0, t_0)].$$

Это - хорошо известное уравнение Фоккера-Планка, которое в данном случае описывает диффузию в гильбертовом пространстве состояний. Очевидно, что гауссовскому процессу, рассмотренному в разделах 1, 2, отвечает уравнение Фоккера-Планка

$$\partial_t P = -\sum E_\alpha(F_\alpha, t) \partial_{F_\alpha} P + \frac{1}{2} \sum g_\alpha^2(F_\alpha, t) \partial_{F_\alpha}^2 P.$$

---

* Если наблюдаемая $\hat{a}$ пробегает непрерывный спектр значений, то $\int d\vec{F}$ - континуальный интеграл.

Его решение, удовлетворяющее условию нормировки

$$\int P(\vec{F},t\,|\,\vec{F}_0,t_0)\,d\vec{F}=1,$$

есть

$$P(\vec{F},t\,|\,\vec{F}_0,t_0)=\frac{\exp\{-\frac{1}{2}\sum\limits_\alpha \frac{\Delta F_\alpha^2}{<\Delta F_\alpha^2>}\}}{\prod\limits_\alpha (2\pi<\Delta F_\alpha^2>)^{1/2}},$$

где

$$\Delta F_\alpha=F_\alpha(t)-F_\alpha(t_0)-\int_{t_0}^{t}E_\alpha(\tau)\,d\tau,$$

$$<\Delta F_\alpha^2>=<[\int_{t_0}^{t}g_\alpha(\tau)\,dW_\alpha(\tau)]^2>=\int_{t_0}^{t}g_\alpha^2(\tau)\,d\tau.$$

Можно также убедиться в том, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}P(\vec{F},t\,|\,\vec{F}_0,t_0)=\delta(\vec{F}-\vec{F}_0).$$

Если информация о состоянии системы не поступает в макрообстановку, то для всех α

$$g_\alpha(F_\alpha,t)=0,$$

так что уравнение Фоккера-Планка сводится к уравнению Лиувилля

$$\partial_t P=-\sum_\alpha E_\alpha(t)\cdot\partial_{F_\alpha}P,$$

с начальным условием

$$P(\vec{F},t_0\,|\,\vec{F}_0,t_0)=\delta(\vec{F}-\vec{F}_0).$$

Его решением является

$$P(\vec{F},t\,|\,\vec{F}_0,t_0)=\delta(\vec{F}-\vec{F}(t)),$$

где

$$F_\alpha(t)=\int_{t_0}^{t}E_\alpha(\tau)\,d\tau+F_\alpha(0).$$

Очевидно, что в этом случае эволюция системы строго детерминирована уравнением Шредингера.

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что решением уравнения Фоккера-Планка для процесса Орнштейна-Уленбека /первый порядок теории возмущения/ является

$$P(\vec{F},t\,|\,\vec{F}_0,t_0)=\frac{\exp\{-\sum\limits_\alpha \frac{a_\alpha}{b_\alpha^2}(F_\alpha-F_\alpha^{(0)}(t)-F_{\alpha_0})^2\}}{\prod\limits_\alpha (\pi\frac{b_\alpha^2}{a_\alpha})^{1/2}}.$$

При решении некоторых задач подход, основанный на УФП, гораздо эффективнее метода СДУ. Не имея возможности останавливаться здесь на этих вопросах, отметим в заключение, что если СДУ /10/ трактовать в смысле Стратоновича, то уравнение Фоккера-Планка для $P(\vec{F},t\,|\,\vec{F}_0,t_0)$ имеет вид

$$\partial_t P=-\sum_\alpha\partial_{F_\alpha}(E_\alpha(F_\alpha,t)P)+\frac{1}{2}\sum_\alpha\partial_{F_\alpha}\{g_\alpha(F_\alpha,t)\,\partial_{F_\alpha}[g_\alpha(F_\alpha,t)P]\}.$$

5. СЛУЧАЙНЫЕ КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ

Рассмотрим квантовополевой аналог модели, обсуждавшейся в разделах 1, 2. Следуя стандартной процедуре вторичного квантования, введем полевые операторы $\hat{\psi}(\vec{x},t)$ и $\hat{\psi}^+(\vec{x},t)$, которые в представлении Гейзенберга подчиняются уравнению движения

$$i\partial_t\hat{\psi}(\vec{x},t)=[\hat{\psi}(\vec{x},t),\tilde{H}(t)]_- \qquad /11/$$

и удовлетворяют одновременным коммутационным /для бозонов/ или антикоммутационным /для фермионов/ соотношениям:

$$\left\{\begin{aligned}&[\hat{\psi}(\vec{x},t),\hat{\psi}^+(\vec{x}',t)]_\mp=\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\&[\hat{\psi}(\vec{x},t),\hat{\psi}(\vec{x}',t)]_\mp=[\hat{\psi}^+(\vec{x},t),\hat{\psi}^+(\vec{x}',t)]_\mp=0.\end{aligned}\right. \qquad /12/$$

Нетрудно убедиться, что уравнение Гейзенберга /11/ будет иметь такой же вид, что и уравнение Шредингера со стохастическими параметрами

$$i\partial_t<\vec{x}|\psi_t>=\int<\vec{x}\,|\,\mathcal{H}\,|\,\vec{x}'>\psi(\vec{x}',t)\,d\vec{x}',$$

$$\mathcal{H}=\sum_\alpha[E_\alpha(t)+g_\alpha(t)\,\xi_\alpha(t)]\,|\,\alpha><\alpha\,|,\quad \hbar=1,$$

если в качестве гамильтониана $\tilde{H}$ системы взять

$$\tilde{H}(t)=\int d\vec{x}'d\vec{x}''\hat{\psi}^+(\vec{x}')<\vec{x}'\,|\,\mathcal{H}(t)\,|\,\vec{x}''>\hat{\psi}(\vec{x}'')=$$

$$=\sum_{\alpha}\int d\vec{x}'d\vec{x}''[E_\alpha(t)+g_\alpha(t)\xi_\alpha(t)]\cdot\langle\vec{x}'|\alpha\rangle\langle\alpha|\vec{x}''\rangle\hat{\psi}^+(\vec{x}')\hat{\psi}(\vec{x}'').$$

Действительно, используя /12/, а также соотношения

$$\hat{\psi}(\vec{x},t)=\exp\{i\int_0^t\tilde{H}(\tau)d\tau\}\hat{\psi}(\vec{x})\exp\{-i\int_0^t\tilde{H}(\tau)d\tau\},$$

$$[\tilde{H}(t),\tilde{H}(\tau)]=0,$$

для правой части уравнения Гейзенберга найдем

$$[\hat{\psi}(\vec{x},t),\tilde{H}(t)]=\exp\{i\int_0^t\tilde{H}(\tau)d\tau\}[\hat{\psi}(\vec{x}),\tilde{H}(t)]\exp\{-i\int_0^t\tilde{H}(\tau)d\tau\}=$$

$$=\int\langle\vec{x}|\mathcal{H}|\vec{x}'\rangle\hat{\psi}(\vec{x}',t)d\vec{x}'.$$

Решение такого операторного аналога УШ имеет вид /ср. с /2//

$$\hat{\psi}(\vec{x},t)=\sum_{\alpha}\hat{a}_\alpha\exp\{-i\int_0^t\mathcal{E}_\alpha(\tau)d\tau\}\psi_\alpha(\vec{x}),$$

где операторы $\hat{a}_\alpha$, $\hat{a}^+_\alpha$ подчиняются коммутационным /антикоммутационным/ соотношениям:

$$[\hat{a}_\alpha,\hat{a}^+_{\alpha'}]_{\mp}=\delta_{\alpha\alpha'},$$

$$[\hat{a}_\alpha,\hat{a}_{\alpha'}]_{\mp}=[\hat{a}^+_\alpha,\hat{a}^+_{\alpha'}]_{\mp}=0,$$

$$\psi_\alpha(\vec{x})=\langle\vec{x}|\alpha\rangle,\quad\mathcal{E}_\alpha(t)=E_\alpha(t)+g_\alpha(t)\xi_\alpha(t)\ -$$

собственные функции и собственные значения оператора $\mathcal{H}$,

$$\int_0^t\mathcal{E}_\alpha(\tau)d\tau=\int_0^t[E_\alpha(\tau)d\tau+g_\alpha(\tau)dW_\alpha(\tau)].$$

Таким образом, возмущение $g_\alpha(t)\xi_\alpha(t)$ - динамического значения, энергия $E_\alpha(t)$ носит в рассматриваемой модели характер "теплового шума".

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы исходили из того, что понятие информации о состоянии системы является фундаментальным элементом физической теории /наряду с понятиями энергии, поля и др./. Видимо, именно это обстоятельство неоднократно подчеркивалось Н.Бором, В.Гейзенбергом, И. фон Нейманом, Ю.Вигнером и другими создателями квантовой механики, когда они говорили о субъекте как о неустранимом элементе физической теории[7]. С нашей точки зрения парадоксальность такого утверждения может быть значительно понижена, если заменить представление о субъекте представлением о физическом процессе передачи информации о состоянии системы в макрообстановку /впрочем, само понятие информации трудно отделить от понятия "субъект", но это уже философский вопрос/.

"Реликт" этой чисто квантовой особенности описания физической реальности обнаруживается даже в классическом пределе. Именно исследования классических траекторий движения при малых возмущениях начальных условий /см., например,[8] / есть не что иное, как явный учет количества информации о состоянии системы, реально доступной макроскопическому наблюдателю. В этом смысле классическую стохастическую динамику следует рассматривать как теорию информационно-незамкнутой классической системы, аналогичную квантовой теории, основанной на уравнении Шредингера-Стратоновича. С методологической точки зрения важно то, что в обоих случаях теория предсказывает не точные значения наблюдаемых величин, а лишь некоторое распределение вероятности. Редукция наблюдаемой к определенному значению носит здесь чисто информационный характер и не описывается динамически. Например, классическая стохастическая динамика может предсказать вероятность выпадения некоторой определенной стороны игральной кости /мы заведомо знаем, что это приблизительно 1/6/, однако выпало это значение или нет, мы можем проверить, лишь непосредственно посмотрев на кость. Такое описание явлений природы имеет явно вероятностный характер / "... бог играет в кости"/.

В заключение отмечу, что несмотря на то, что идея стохастизации фаз хорошо известна в квантовой кинетике, автору неизвестно ни одной попытки построить на этой основе теорию квантовых измерений. В недавно вышедшей работе[9], на основе несколько других физических соображений также введен некоторый "оператор спектральной рандомизации", позволяющий описать редукцию волнового пакета динамическим образом. Однако возникающее при этом уравнение эфолюции для оператора плотности отличается от нашего

$$d\hat{\rho}_t=-\frac{i}{\hbar}\{[\hat{H},\hat{\rho}_t]dt+\sum_{\alpha}g_\alpha(t)[\hat{P}_\alpha,\hat{\rho}_t]dW_\alpha(t)\},$$

тем, что обычную динамическую эволюцию в этом случае нельзя выделить в правой части уравнения явным образом.

Автору приятно поблагодарить А.С.Холево, Н.В.Махалдиани, Ж.Ж.Мусульманбекова, Ю.Ю.Лобанова, О.К.Пашаева за стимулирующее обсуждение некоторых вопросов, затронутых в настоящей публикации. Автор признателен И.С.Алексееву за обсуждение некоторых философских проблем квантовой теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Квантовая механика. М.: Мир, 1978.
2. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
3. Гардинер Н.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
4. Wigner E. The Subject of Our Discussions. Proc. Int. School of Phys. "Foundations of Quantum Mechanics", Varenna,1970.
5. Barchielli A., Lanz Z., Prosperi G.M. In: Proc. Int. Symp. "Foundations of Quantum Mechanics", Tokyo, 1983, p.165.
6. Вайнштейн В.Д., Гольфанд Ю.А. Квантовые измерения и теория макроскопических процессов. Труды ФИАН, 1986, т.173, с.17.
7. Jammer M. Philosophy of Quantum Mechanics. N.Y., 1974.
8. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
9. Машкевич В.С. Индетерминистская квантовая динамика. Лекции для молодых ученых. ОИЯИ, Р2-88-150, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 августа 1988 года.

Костенко Б.Ф. Р5-88-649

Информационно-незамкнутые системы
и редукция волнового пакета

Для описания эволюции квантовых систем, информация о которых поступает в макрообстановку, предложено использовать уравнение Шредингера со стохастическими параметрами /уравнение Шредингера-Стратоновича/. В рамках физической концепции информационно-незамкнутых систем сформулирована динамическая теория квантовых измерений для двух предельных случаев - сильного и слабого возмущения системы внешним измерительным устройством. Обсуждается связь теории с классической стохастической динамикой и переход к квантовой теории случайных полей. Показано, что возможно как индивидуальное, так и ансамблевое описание системы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой.

Kostenko B.F. P5-88-649

Informationally Open Systems
and Reduction of Wave Packet

For description of evolution of quantum systems when information about them is transmitted to the physical surrounding, the Schroedinger equation with stochastic parameters /Schroedinger-Stratonovich equation/ is suggested. In the framework of the physical concept of informally open systems a dynamical theory of measuring process is elaborated for the cases of strong and weak interactions of a macroscopic measuring apparatus. The connection between this theory and classical stochastic dynamics as well as transition to the quantum stochastic fields are discussed. It is shown that both individual and statistical descriptions of the system is possible.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988